Podróże po Imperium Liczb

Część 07. Ciągi rekurencyjne

Rozdział 12

12. Całkowitość wyrazów pewnych ciągów rekurencyjnych

Andrzej Nowicki 17 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

⊡⊡

12 Całkowitość wyrazów pewnych ciągów rekurencyjnych

⊡⊡

W rozdziałach 10 i 11 zajmowaliśmy się problemem całkowitości wyrazów pewnych jednorodnych ciągów rekurencyjnych. W tym rozdziale zajmujemy się tym samym problemem dla innych ciągów rekurencyjnych.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.1 Ciąg $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.1.1. *Niech $x_1 = 1$ oraz*

$$x_n = \frac{4n-6}{n} x_{n-1}.$$

dla $n \geqslant 2$. Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

Wsk. $x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. ([Bryn] 5.15b).

12.1.2. *Niech $x_1 = 1$, $\quad x_n = \frac{4n-2}{n} x_{n-1}$. Wtedy x_{2000} jest liczbą całkowitą.*
([MG] 501(2000) s.533).

12.1.3. *Niech $x_1 = 2$ oraz*

$$x_n = \frac{4n-2}{n} x_{n-1}.$$

dla $n \geqslant 2$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.

Dowód. $a_n = \binom{2n}{n}$. ([OM] Irlandia 1994, [Pa97], [Crux] 1998 s.458).

12.1.4. *Niech $k \in \mathbb{N}$ i niech $x_1 = 1$,*

$$x_{n+1} = \frac{nx_n + 2(n+1)^{2k}}{n+2}.$$

dla $n \geqslant 1$. Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są liczbami całkowitymi. Ponadto, x_n jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy

$$n \equiv 1 \pmod 4 \quad \textit{lub} \quad n \equiv 2 \pmod 4.$$

([MM] 62(3)(1989) 199, [OM] Taiwan 1992, [Pa97]).

12.1.5. *Niech $x_1 = 0$,*

$$(n+1)^3 x_{n+1} = 2n^2(2n+1)x_n + 2(3n+1)$$

dla $n \geqslant 1$. Ciąg ten posiada nieskończenie wiele wyrazów będących liczbami naturalnymi.
([OM] Serbia-Czarnogóra 2004).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.2 Ciąg $x_{n+2} = f(n)x_{n+1} + g(n)x_n$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.2.1. *Niech* $x_0 = x_1 = 1$,

$$(n+1)x_{n+1} = (2n+1)x_n + 3nx_{n-1}.$$

Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) *są liczbami całkowitymi.* ([KoM] 1997 N149).

12.2.2. *Niech* $x_0 = x_1 = 1$,

$$(n+3)x_{n+1} = (2n+3)x_n + 3nx_{n-1}.$$

Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) *są liczbami całkowitymi.* ([KoM] 2000(3) A233).

U. ([KoM]) $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 9$, $x_5 = 21$, $x_6 = 51$, $x_7 = 127$, $x_8 = 323$, $x_9 = 835$, $x_{10} = 2188$. Można wykazać, że

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} x_k x_{n-k}.$$

Można wykazać również, że

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}\binom{2k}{k}}{k+1}. \boxtimes$$

12.2.3. *Niech* $x_2 = x_3 = 1$, $\quad (n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2-n-1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1}$. *Wówczas* x_n *jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy* n *jest liczbą pierwszą.* ([Mon] 106(2)(1999) 169).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.3 Ciąg $x_{n+2} = (x_{n+1}^s + 1)/x_n$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.3.1. *Niech* $s \in \mathbb{N}$ *i niech* $x_1 = x_2 = 1$, $\quad x_{n+2} = \dfrac{x_{n+1}^s + 1}{x_n}$. *Ciąg ten posiada następujące własności.*

(1) *Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.* ([Crux] 1997 s.123)

(2) *Każde dwa sąsiednie wyrazy są względnie pierwsze.*

(3) x_{n+1} *jest podzielnikiem liczby* $x_n^s + 1$.

(4) $x_n x_{n+1}$ *jest podzielnikiem liczby* $x_n^s + x_{n+1}^s + 1$.

D. Liczby $x_3 = 2$, $x_4 = 2^s + 1$ są oczywiście naturalne. Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że wszystkie wyrazy $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}$ są liczbami naturalnymi. Wtedy $x_{n+2}x_n - x_{n+1}^s = 1$ i stąd wynika, że liczby x_n i x_{n+1} są względnie pierwsze. Mamy wówczas:

$$x_{n+2}^s + 1 = \left(\frac{x_{n+1}^s + 1}{x_n}\right)^s + 1 = \frac{\gamma_n x_{n+1} + 1 + x_n^s}{x_n^s} = \frac{\gamma_n x_{n+1} + x_{n+1}x_{n-1}}{x_n^s} = \frac{x_{n+1}(\gamma_n + x_{n-1})}{x_n^s},$$

gdzie γ_n jest pewną liczbą naturalną. Ponieważ liczby x_{n+1} i x_n^s są względnie pierwsze, więc $x_{n+2}^s + 1$ jest podzielne przez x_{n+1}. Zatem x_{n+3} jest liczbą naturalną i stąd (na mocy indukcji) wszystkie liczby postaci x_n są naturalne. Udowodniliśmy własności (1) i (2). Z równości $x_{n+1}x_{n-1} - x_n^s = 1$ wynika (3) i stąd dalej (4). $\boxtimes$

12.3.2. *Niech $s \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ i niech $x_1 = 1$, $x_2 = a$*

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^s + 1}{x_n}.$$

Jeśli wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi, to $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

12.3.3. *Niech $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + 1}{a_n}$. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną. Ciąg ten jest okresowy z czystym okresem $1, 1, 2, 3, 2$.* Dowód. *Jest to wniosek z* 12.3.1.

12.3.4. *Niech $a_1 = a$, $a_2 = b$,*

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}$$

gdzie a, b są danymi liczbami całkowitymi.

(1) *Ciąg ten jest okresowy z czystym okresem:*

$$a,\ b,\ \frac{b+1}{a},\ \frac{a+b+1}{ab},\ \frac{a+1}{b}.$$

(2) *Jeśli $a \mid b+1$ i $b \mid a+1$ i przy tym $a \neq -1$ oraz $b \neq -1$, to każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.*

12.3.5. *Niech $b_1 = b_2 = 1$, $b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1}^2 + 1}{b_n}$. Ciąg ten posiada następujące własności.*

(1) *Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.*

(2) *Nie ma wyrazu podzielnego przez* 3.

(3) *Ciąg $(b_n \pmod{10})$ jest okresowy z czystym okresem długości* 30.

(4) $b_n^2 + b_{n+1}^2 = 3b_n b_{n+1} - 1$.

(5) $b_{n+2} = 3b_{n+1} - b_n$. ([Crux] 1997 s.123).

(6) $b_n = u_{2(n-2)+1}$, $n \geqslant 2$, *gdzie (u_n) jest ciągiem liczb Fibonacciego.*

D. Własność (1) jest konsekwencją 12.3.1. Ciąg $(b_n \pmod 3)$ jest okresowy i jego okres jest równy $1, 1, 2, 2$. Stąd wynika (2). Pozostałe własności sprawdzamy bez trudu. ⊠

Przykłady:

n	b_n
1	1
2	1
3	2
4	5
5	13
6	34
7	89
8	233
9	610
10	1597

n	b_n
11	4181
12	10946
13	28657
14	75025
15	196418
16	514229
17	1346269
18	3524578
19	9227465
20	24157817

n	b_n
21	63245986
22	165580141
23	433494437
24	1134903170
25	2971215073
26	7778742049
27	20365011074
28	53316291173
29	139583862445
30	365435296162

12.3.6. *Niech* $c_1 = c_2 = 1, \quad c_{n+2} = \dfrac{c_{n+1}^3 + 1}{c_n}.$

(1) *Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.*

(2) *Każde dwa sąsiednie wyrazy są względnie pierwsze.*

(3) *Liczba* $c_n^3 + 1$ *jest podzielna przez* c_{n+1}.

(4) *Liczba* $c_n^3 + c_{n+1}^3 + 1$ *jest podzielna przez* $c_n c_{n+1}$.

(5) *Niech* $x_n = c_n^2 c_{n+1},\ y_n = c_{n+1}^2,\ z_n = c_n\ t_n = (c_n^3 + c_{n+1}^3 + 1)/c_n c_{n+1}$. *Wówczas liczby* x_n, y_n, z_n *są względnie pierwsze oraz*

$$\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{z_n} + \frac{z_n}{x_n} = t_n.$$

([Mat] 5/1959).

D. Własności (1) – (4) wynikają z 12.3.1. Własność (5) jest łatwa do sprawdzenia. Dowody znajdziemy np. w [Mat] 5/1959 (zadania konkursowe 538, 539). ⊠

U. Wyrazy badanego ciągu szybko rosną. Kilka przykładów:

$$c_3 = 2, \quad c_4 = 9, \quad c_5 = 365, \quad c_6 = 5403014, \quad c_7 = 432130991537958813,$$
$$c_8 = 14935169284101525874491673463268414536523593305. \quad \boxtimes$$

12.3.7. *Niech* $b_1 = b_2 = 1, \quad b_{n+2} = \dfrac{b_{n+1} + 2}{b_n}$. *Wyrazy tego ciągu nie muszą być liczbami całkowitymi. Przykłady:* $b_3 = 3$, $b_4 = 5$, $b_5 = 7/3$, $b_6 = 13/15$, $b_7 = 43/35$, $b_8 = 339/91$.

12.3.8. *Niech* $k \geqslant 2$ *i* $c \geqslant 1$ *będą liczbami naturalnymi. Niech* $x_0 = 1, \quad x_1 = 1$,

$$x_{n+2}x_n = cx_{n+1}^k + 1,$$

dla $n \geqslant 0$. *Wykazać, że wszystkie wyrazy ciągu* (x_n) *są całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy* $c = 1$.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.4 Ciąg $x_{n+2} = (x_{n+1}^2 + p)/x_n$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.4.1. *Ciąg* (y_n) *spełnia warunki:* $y_1 \neq 0,\ y_2 \neq 0$,

$$y_{n+2} = \frac{y_{n+1}^2 + p}{y_n},$$

gdzie p *jest daną liczbą. Oznaczmy:* $b = \dfrac{y_1^2 + y_2^2 + p}{y_1 y_2}$.

(1) *Każdy wyraz ciągu* (y_n) *jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby* y_1, y_2, b *są całkowite.* ([Balk] 1986).

(2) *W szczególności, jeśli* $y_1 = y_2 = 1$ *i* $p \in \mathbb{Z}$, *to każdy wyraz ciągu* (y_n) *jest liczbą całkowitą.*

(3) *Załóżmy, że każdy wyraz ciągu* (y_n) *jest liczbą całkowitą. Czy wtedy* $p \in \mathbb{Z}$ *?*

(4) $\dfrac{y_{n+2}+y_n}{y_{n+1}} = \dfrac{y_n^2+y_{n+1}^2+p}{y_ny_{n+1}} = b$, *dla wszystkich* $n \geqslant 1$.

(5) (y_n) *jest uogólnionym ciągiem Fibonacciego:*

$$y_{n+2} = by_{n+1} - y_n.$$

([OM] Bułgaria 1978, [Pa97]).

D. Z definicji ciągu (y_n) wynika, że $y_{n+1}y_{n+3} + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2 + p + y_{n+1}^2 = y_{n+2}^2 + y_ny_{n+2}$. Stąd otrzymujemy równości

$$\frac{y_{n+3}+y_{n+1}}{y_{n+2}} = \frac{y_{n+2}+y_n}{y_{n+1}} = \cdots = \frac{y_3+y_1}{y_2} = \frac{\frac{y_2^2+p}{y_1}+y_1}{y_2} = \frac{y_1^2+y_2^2+p}{y_1y_2} = b,$$

z których bez trudu wykażemy wszystkie własności oprócz (3). Nie znam odpowiedzi na pytanie postawione w (3). ⊠

12.4.2. *Ciąg* (a_n) *jest określony wzorami:* $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+2}{a_n}.$$

Ciąg ten posiada następujące własności.

(1) $a_3 = 3, a_4 = 11, a_5 = 41, a_6 = 153, a_7 = 571, a_8 = 2131, a_9 = 7953, a_{10} = 29681.$

(2) *Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.* Dowód. *Wynika z* 12.4.1. ([Dlt] 12/1985)

(3) *Wszystkie wyrazy* (a_n) *są liczbami nieparzystymi.*

(4) *Ciąg* $(a_n \pmod 5)$ *jest okresowy z okresem* $1, 1, 3$.

(5) *Ciąg* $(a_n \pmod{100})$ *jest okresowy. Okres ma długość* 60.

12.4.3. *Ciąg* (b_n) *określony jest wzorami:* $b_1 = b_2 = 1$,

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2+3}{b_n}.$$

Ciąg ten posiada następujące własności.

(1) $b_3 = 4,\ b_4 = 19,\ b_5 = 91,\ b_6 = 436,\ b_7 = 2089,\ b_8 = 10009.$

(2) *Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.* Dowód. *Wynika z* 12.4.1.

(3) *Ciąg* $(b_n \pmod{10})$ *jest okresowy i jego okres jest czysty i ma długość 12.*

(4) *Ciąg* $(b_n \pmod{100})$ *jest okresowy i jego okres jest czysty i ma długość 60.*

12.4.4. *Dany jest ciąg* (a_n) *określony wzorami:* $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2+4}{a_n}.$$

Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą. (Wynika z 12.4.1).

12.4.5. *Dany jest ciąg* (a_n) *określony wzorami:* $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - 2}{a_n}.$$

Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą. Dokładniej:

$$a_{2n-1} = (-1)^{n+1}, \quad a_{2n} = (-1)^{n+1}.$$

12.4.6. *Ciąg rekurencyjny* (x_n) *określony jest wzorami:*

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1, \quad dla \;\; n \geqslant 0.$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) *są całkowite oraz, że* $x_{n+2} + x_n + 1 \equiv 0 \pmod{x_{n+1}}$ *dla* $n \geqslant 0$.

12.4.7. *Niech* a, b *będą niezerowymi liczbami całkowitymi takimi, że* $|a| \neq |b|$*. Ciąg* (x_n) *określony jest wzorami:*

$$x_1 = b, \quad x_2 = b^2 - a^2, \quad x_{n+2}x_n = x_{n+1}^2 - a^{2(n+1)}, \quad dla \;\; n \geqslant 1.$$

Wykazać, że wszystkie wyrazy ciągu (x_n) *są całkowite.* ([MM] 61(2)(1988) 115-116).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.5 Ciąg $x_{n+3} = (x_{n+1}x_{n+2} + p)/x_n$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.5.1. *Niech* $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 1}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$*. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.* ([Mon] 68(4)(1961) E1431, [Mock] 1/2004).

12.5.2. *Niech* $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ *oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 2}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$*. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą.* ([OM] Irlandia 2002).

D. Można łatwo sprawdzić, że $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$, gdy n jest parzyste oraz $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, gdy n nieparzyste. ⊠

12.5.3. *Niech* $a_1 = a_2 = 1$ *oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 1989}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$*. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.* ([AnE] s.82).

D. ([AnE]). Mamy dwie równości $a_{n+1}a_{n-2} = a_n a_{n-1} + 1989$, $a_n a_{n-3} = a_{n-1}a_{n-2} + 1989$. Odejmując stronami otrzymujemy równość $a_{n-2}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_{n-1} + a_{n-3})$, czyli $\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}$. Mamy zatem:

$$\frac{a_{2n+1} + a_{2n-1}}{a_{2n}} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n-3}}{a_{2n-2}} = \cdots = \frac{a_3 + a_1}{a_2} = \frac{200}{1} = 200;$$
$$\frac{a_{2n+2} + a_{2n}}{a_{2n+1}} = \frac{a_{2n} + a_{2n-2}}{a_{2n-1}} = \cdots = \frac{a_4 + a_2}{a_3} = \frac{2189}{199} = 11.$$

Wykazaliśmy więc, że $a_{2n+1} = 200a_{2n} - a_{2n-1}$, $a_{2n+2} = 11a_{2n+1} - a_{2n}$. Stąd wynika, że każde a_n jest liczbą całkowitą. Jest oczywiste, że każde a_n jest liczbą dodatnią; jest więc liczbą naturalną. ⊠

Powtarzając powyższy dowód, otrzymujemy:

12.5.4. *Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że a_1, a_2, a_3 są liczbami naturalnymi oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + b}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie b jest daną liczbą naturalną. Jeżeli liczby $\frac{a_2a_3+b}{a_1}$, $\frac{a_1+a_3}{a_2}$, $\frac{a_1a_2+a_2a_3+b}{a_1a_3}$ są naturalne, to każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną.

12.5.5. *Niech $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$ oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + 7}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną. ([OM] Niemcy 2002/2003).

12.5.6. *Niech $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = u$ oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + p}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie p, u są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy $p = ru - 1$, gdzie $r \in \mathbb{Z}$. ([Mon] 68(4)(1961) s.379).

12.5.7. *Niech u będzie liczbą naturalną i p liczbą pierwszą. Niech $a_1 = a_2 = a_3 = p$ oraz*

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} + u}{a_n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

(1) *Jeśli $p \geqslant 3$, to każde a_n jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy $p^2 \mid u$.*

(2) *Jeśli $p = 2$, to każde a_n jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid u$.*

([MM] 61(4)(1988) 262-263).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.6 Ciągi rekurencyjne z pierwiastkami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.6.1. *Niech* $x_1 = 3$ *oraz*

$$\sqrt{x_{n+1}} = 2\sqrt{x_n} + \sqrt{3(1+x_n)}.$$

Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną. ([OM] ZSRR 1986).

D. Łatwo sprawdzić, że $x_2 = 48$ oraz, że $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n + 6$. ⊠

12.6.2. *Niech* $x_0 = 1$ *oraz*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(3x_n + \sqrt{5x_n^2 - 4}\right).$$

Każdy wyraz tego ciągu jest liczbą naturalną. ([OM] W.Brytania 2002).

12.6.3. *Niech* $x_1 = c, \quad x_{n+1} = cx_n + \sqrt{(c^2-1)(x_n^2-1)}$.

(1) *Jeśli c jest liczbą naturalną, to wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.* ([Bryn] 5.9, [OM] RPA 2000).

(2) $x_n = \frac{1}{2}(p^n + q^n)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *gdzie* $p = c + \sqrt{c^2-1}$, $q = c - \sqrt{c^2-1}$. ([Bryn] s.121).

12.6.4. *Niech* $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 7a_n + \sqrt{48a_n^2 + 1}$. *Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.* ([MG] 1966 307).

12.6.5. *Niech* $m, p, a \in \mathbb{Z}$ *i niech* $x_0 = a$ *oraz*

$$x_{n+1} = mx_n + \sqrt{(m^2-1)(x_n^2 - a^2) + p^2}.$$

Wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi. ([MM] 42(1969) 111-113).

12.6.6. *Niech* $a \in \mathbb{N}$ *i niech* $x_0 = 0$ *oraz*

$$x_{n+1} = (x_n + 1)a + (a+1)x_n + 2\sqrt{a(a+1)x_n(x_n+1)}.$$

Wykazać, że każde x_n jest liczbą naturalną. ([IMO] Shortlist 1983, [Djmp] 166(459)).

12.6.7. *Niech* $x_1 = 603$, $x_2 = 102$ *oraz* $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + 2\sqrt{x_n x_{n+1} - 2}$. *Wtedy:*

(1) *każdy wyraz x_n jest liczbą naturalną;*

(2) *istnieje nieskończenie wiele wyrazów z końcówką* 2003*;*

(3) *nie ma wyrazu z końcówką* 2004. ([OM] Wietnam 2004).

★ Murray S. Klamkin, *Perfect squares of the form* $(m^2-1)a_n^2 + t$, [MM] 42(3)(1969) 111-113.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7 Różne ciągi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7.1. *Wyznaczyć liczbę takich ciągów* (x_n) *liczb całkowitych, że dla dowolnej liczby naturalnej* n *spełnione są warunki*

$$x_n \neq -1, \quad x_{n+2} = \frac{x_n + 2006}{x_{n+1} + 1}.$$

Odp. *Jet* 14 *takich ciągów.* (Czesko-Polsko-Słowackie Zaw. Mat. 2006, [Zw] 2006).

12.7.2. *Niech* $a_1 = 2$, $a_2 = 500$, $a_3 = 2000$ *oraz*

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n-1}}$$

dla $n \geqslant 2$. *Wtedy:*

(1) *każdy wyraz ciągu* (a_n) *jest liczbą naturalną;*

(2) 2^{2000} *dzieli* a_{2000}*;*

(3) $a_{n+2} = 2a_n a_{n+1}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Słowenia 1999).

12.7.3. *Niech* $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ *i niech* $x_{n+3} = \dfrac{x_{n+2} + x_{n+1} + 1}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Opisać wszystkie takie ciągi, których wszystkie wyrazy są liczbami naturalnymi.* ([MOc] 2001 z.79).

O. Istnieje pięć typów takich ciągów. Są to ciągi okresowe:

$$\begin{array}{c} 1,1,1,3,5,9,5,3 \\ 1,2,1,4,3,8,3,4 \\ 1,2,2,5,4,5,2,2 \\ 1,4,1,6,2,9,2,6 \\ 2,3,2,3,2,3,2,3. \end{array}$$

Trójka (x_0, x_1, x_2) może rozpoczynać się w każdym miejscu tych okresów. ⊠

12.7.4. *Niech* $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ *oraz* $a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = 6^{n-1}$ *dla* $n \geqslant 2$. *Wykazać, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami naturalnymi.* ([OM] W.Brytania 1981).

D. Indukcyjnie wykazuje się, że $a_n = 2^n + 3^n$. ⊠

12.7.5. *Istnieje dokładnie jeden ciąg* (a_n) *taki, że* $a_1 = 1$, $a_2 > 1$, $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^3 + 1$ *i wszystkie wyrazy są całkowite.* ([OM] W.Brytania 1981).

Literatura

[AnE] T. Andreescu, B. Enescu, *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2006.

[Balk] Balkan Mathematical Olympiad.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mock] Mock Putnam Exam.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.