

Podróże po Imperium Liczb

10 Liczby i Funkcje Rzeczywiste

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Ostatnia aktualizacja: 11 grudnia 2012

Wstęp	1
1 Liczby rzeczywiste	5
1.1 Liczba e	5
1.2 Liczba π	8
1.3 Rozwinięcia dziesiętne pewnych liczb rzeczywistych	13
1.4 Kolejne wyrazy ciągów i rozwinięcia dziesiętne	14
1.5 Niewymierność pewnych liczb rzeczywistych	16
1.6 Całkowitość lub wymierność pewnych liczb rzeczywistych	18
1.7 Przybliżenia wymierne	20
1.8 Maksima i minima	21
1.9 Metryki	22
1.10 Liczby postaci $x + 1/x$	26
1.11 Różne fakty i zadania dotyczące liczb rzeczywistych	29
2 Liczby z pierwiastkami	31
2.1 Rozwinięcia dziesiętne liczb z pierwiastkami	31
2.2 Równości z pierwiastkami kwadratowymi	33
2.3 Pierwiastki kwadratowe i potęgi	35
2.4 Pierwiastki trzeciego stopnia	38
2.5 Równości z pierwiastkami trzeciego i drugiego stopnia	39
2.6 Równości z pierwiastkami wyższych stopni	41
2.7 Wymierność lub niewymierność liczb z pierwiastkami	42
2.8 Nieskończone ciągi z pierwiastkami	48
2.9 Granice ciągów z pierwiastkami	49
2.10 Przybliżenia wymierne liczb z pierwiastkami	50
2.11 Różne fakty i zadania z pierwiastkami	51
3 Ciągi liczb rzeczywistych	53
3.1 Skończone ciągi arytmetyczne	53
3.2 Nieskończone ciągi arytmetyczne	54
3.3 Ciągi geometryczne	56
3.4 Ciągi arytmetyczne i geometryczne	57
3.5 Skończone ciągi liczb rzeczywistych	58
3.6 Nieskończone ciągi liczb rzeczywistych	59
3.7 Granice ciągów	60
3.8 Sumy szeregów	60

4	Część całkowita liczby rzeczywistej	63
4.1	Równości z częścią całkowitą (bez pierwiastków)	64
4.2	Równości z częścią całkowitą i pierwiastkami	66
4.3	Część całkowita dla liczb z rozszerzeń kwadratowych	70
4.4	Nierówności z częścią całkowitą	72
4.5	Część całkowita i ciągi	74
4.6	Część całkowita, nwd i nww	77
4.7	Część całkowita i liczby pierwsze	78
4.8	Część całkowita i relacja podzielności	80
4.9	Część całkowita i liczby kwadratowe	82
4.10	Liczby postaci $[nx]$	85
4.11	Część całkowita i wielomiany	88
4.12	Ciąg $x_{n+1} = x_n + 1/[x_n]$	89
4.13	Różne fakty i zadania z częścią całkowitą	91
5	Równania z częścią całkowitą	93
5.1	Równania pierwszego stopnia z częścią całkowitą	93
5.2	Równanie $ax^2 + b[x] + c = 0$	95
5.3	Równanie $a[x]^2 + bx + c = 0$	101
5.4	Inne równania drugiego stopnia z częścią całkowitą	106
5.5	Równania trzeciego stopnia z częścią całkowitą	107
5.6	Równania z pierwiastkami i częścią całkowitą	107
5.7	Różne równania z częścią całkowitą	108
6	Część ułamkowa liczby rzeczywistej	109
6.1	Równości z częścią ułamkową	109
6.2	Równania z częścią ułamkową	110
6.3	Nierówności z częścią ułamkową	112
6.4	Różne fakty i zadania z częścią ułamkową	113
7	Funkcje trygonometryczne	115
7.1	Wartości funkcji trygonometrycznych dla pewnych kątów ostrych	115
7.2	Wielokrotności kąta $\frac{\pi}{7}$	118
7.3	Tożsamości trygonometryczne z sumami	119
7.4	Tożsamości trygonometryczne z iloczynami	121
7.5	Nierówności trygonometryczne	123
7.6	Różne zadania z funkcjami trygonometrycznymi	124
8	Funkcje rzeczywiste	125
8.1	Przykłady i pewne własności funkcji rzeczywistych	125
8.2	Punkty stałe	126
8.3	Przykłady funkcji okresowych	127
8.4	Sumy funkcji okresowych	129
8.5	Funkcje ciągłe	130
8.6	Funkcje różniczkowalne	131
9	Równania funkcyjne	133
9.1	Wielomianowe równanie $(x-a)f(x-p) = (x-b)f(x-q)$	133
9.2	Inne wielomianowe równania funkcyjne	135
9.3	Równania funkcyjne z iteracjami funkcji niewiadomej	137
9.4	$a(x)f(u(x)) + b(x)f(v(x)) = c(x)$	139
9.5	Różne równania funkcyjne jednej zmiennej	141
9.6	$f(x+y) = f(x) + f(y)$, funkcje Hamela, równanie Cauchy'ego	142
9.7	$f(x+y) = f(x) + f(y) + a(x,y)$	144
9.8	$x^s f(y) \pm y^r f(x) = a(x,y)$	145

9.9	$f(xf(y)) = a(x,y)$	146
9.10	Różne równania funkcyjne dwóch i więcej zmiennych	146
9.11	Funkcje $f(g(x))$ i $g(f(x))$	148
9.12	Dwie funkcje i równania funkcyjne	149
9.13	Nierówności funkcyjne	150
10	Pierścień funkcji ciągłych	153
10.1	Definicje i początkowe własności	153
10.2	Elementy odwracalne	155
10.3	Dzielniki zera	156
10.4	Idempotenty i przestrzenie spójne	156
10.5	Zbiory zer	157
10.6	z -Ideały	158
10.7	Ideały maksymalne	159
10.8	Ideały pierwsze	160
10.9	Homomorfizmy pierścieni funkcji ciągłych	163
11	Ułamki łańcuchowe	167
11.1	Podstawowe pojęcia wstępne	167
11.2	Skończone ułamki łańcuchowe	168
11.3	Nieskończone ułamki łańcuchowe	170
11.4	Rozwinięcia dla pierwiastków kwadratowych	172
11.5	Dodatkowe fakty	177
	Spis cytowanej literatury	178
	Skorowidz nazwisk	185
	Skorowidz	189

Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn

Skorowidz

- Aczel J., 144, 145, 149, 178
Aleksiejew P., 21
Alexanderson G.L., 88
Alfutova N.B., 178
Andžāns A., 178
Anderson J., 60
Andreescu T., 29, 178
Andrica D., 178
Archangielski A.W., 178
Arnold V.I., 172, 176
Aron R.M., 164, 165
- Baker A., 6, 178
Balcerzyk S., 3, 162
Banaś J., 144
Banarski A.J., 169, 178
Baranowa I.W., 178
Beardon A.F., 140
Beatta, 85
Bednarek W., 21, 42, 49, 128, 178
Belov A., 180
Berndt B.C., 178
Bernik V.I., 178
Besicovitch A.S., 46, 48
Bobiński Z., 56, 58, 181
Bohmer P.E., 177
Boltianski W.G., 178
Borwein P., 9, 178
Boswell Jr. R.D., 145
Breusch R., 10
Brodski Ya.S., 140, 141
Brokos J., 118, 179
Browkin J., 30, 118, 178, 179
Brown K., 8, 10
Bryński M., 179
Buchsztab A.A., 6, 10, 11, 169, 177, 179
Budden F.J., 140
- Carlitz L., 148
Castillo E., 145, 148, 149, 179
Chądzzyński J., 179
Chan H., 13
Chartres R., 11
Chau L.H., 179
Chentzov N.N., 183
Choe B.R., 11
Ciesielski K., 179
Cohen H., 179
Cohn E., 7
Conway J.H., 179
Coolidge J.L., 7
Courant R., 6, 179
- Crilly, 177
Czakyryjan K., 179
- Dekański D., 48
Dharmadhikari S.W., 148
Djukić D., 179
Doduniekow S., 179
Dorofiejew G., 128
Dowbor P., 48
Duda R., 179
Dynkin E.B., 179
- Eastham M., 6
Efthimiou C., 124, 144, 179
Enescu B., 178
Engelking R., 180
Erdelyi T., 178
Erickson M., 172, 180
Euler, 10–12
Evans R.J., 178
- Fedorov R., 180
Fejér, 123
Feldman A.M., 184
Feng Z., 178
Feynman R., 8
Fletcher C.R., 38
Fomin D.V., 180
Frączek K., 144
Fricke G.H., 164, 165
Friedman D., 144
Fuks D.B., 21
Fuks M.B., 21
- Gałkin E., 18
Gałoczkin A.I., 6, 11, 180
Gaal L., 180
Galovich S., 123
Galpieri G.A., 180
Gauss, 117
Gelca R., 29, 178
Gelfand I.M., 160
Gelfand M.S., 14
Gelfand S.I., 180
Genkin S.A., 180
Gerber M.L., 62
Gerst I., 30
Gerwer M.L., 60, 180
Gillman L., 4, 153, 180
Golasiński M., 157, 158, 165
Golovanov A., 89
Golubov B., 62

- Górnicki J., 126
Graham R.L., 87, 180
Grant M., 18
Gregory J., 11
Gresz J., 48
Gribanow W.U., 180
Grigorjan A.A., 183
Gross F., 137
Gucewicz-Sawicka I., 30
Gurewicz W.J., 184
Gutt W., 50
Guzicki W., 48
- Hajłasz R., 18
Halberstam H., 30
Hall M., 176
Hamel G., 142
Hanel J., 10
Haruki H., 144
Henriksen M., 165
Hensley D., 180
Hermite Ch., 6, 65
Hewitt E., 160, 165
Hille E., 30
- Iglesias A., 145, 148, 149, 179
Ireland K., 180
Isaacs I.M., 180
Itenberg I.W., 180
Iverson K.E., 63
Iwiński T.B., 62
Iwlew B., 128
- Jackson T., 123
Jadrenko M.I., 184
Janković V., 179
Janous W., 37
Jarek P., 181
Jędrzejewicz P., 172
Jędrzejewski J., 180
Jegorow A.A., 113, 118, 184
Jerison L., 153
Jerison M., 4, 180
Jones A.J., 179
Jorgenson L., 9
Joung G.S., 141
- Kamniew L.N., 48
Kanel-Belov A.J., 180
Kaniel-Bielow A.J., 180
Kannappan P., 123, 124, 137, 141, 144, 148, 181
Kartaszow I.W., 184
Kedlaya K.S., 181
Khoi L.H., 179
Kiryłow A.A., 180
- Klamkin M.S., 23
Klonowska E., 144
Klosinski L.F., 88
Kmosek M., 177
Knuth D.E., 180
Kołmogorow A.N., 160
Kołodziejczyk J., 141
Kofler E., 13, 181
Kohls C.W., 162
Kolagin J.M., 128
Koninck De J.-M., 30, 66, 177, 180, 181
Konjagin S.W., 183
Kovaldzhii A., 180
Kowaldży A.K., 180
Kowalska Z., 7
Kuźmin E., 7
Kuczma Marcin, 181
Kuczma Marek, 133, 149, 181
Kudriaszow A.D., 128
Kurlandczyk L., 21, 53, 181
Kurschak J., 181
- Laeng E., 137
Lagrange, 177
Lambert J.H., 9
Lapin C.E., 178
Larson L.C., 88
Lebiediew W.P., 55
Lehmer D.H., 85
Leibniz, 11
Leja F., 181
LeLionnais F., 181
Leman W.G., 178
Lidster M., 38
Lin C., 87
Lin S., 87
Lindemann F., 10
Łodkin A., 141
Lopszyc A.M., 144
- Mąkowski A., 121
Martyanov B., 131, 137
Marzantowicz W., 181
Masłowska A.M., 91, 106
Matić I., 179
Matsuoka Y., 11
Mazur M., 177
Meir A., 23
Melnikow O.W., 178
Mentzen M.K., 10
Mercier A., 30, 66, 177, 180, 181
Michailowski W.I., 184
Mieszczeraikow A.S., 128
Mnich W., 128, 130
Mołczanow S.A., 179

- Mollin R.A., 172, 176, 182
 Molnar J., 181
 Mordkowicz A.G., 55, 91
 Morozowa E.A., 182

 Nagell T., 10, 182
 Narkiewicz W., 182
 Navarro J., 8, 182
 Nesterenko Y.V., 6, 11, 177, 180
 Nikishin E.M., 177
 Niven I., 9–11, 16
 Nodzyński P., 58, 181
 Northshield S., 177
 Norwa J., 48
 Nowicki A., 182
 Nyblom M.A., 34, 42, 80, 81, 182

 Olszowy L., 144
 Osler T.J., 7

 Parks A.E., 6, 10, 16, 18, 118
 Patashnik O., 180
 Pawłowski H., 182, 183
 Perella M., 18, 140
 Petrović N., 179
 Piegat E., 183
 Pietrakow I.S., 182
 Poczujew W.P., 62
 Polya G., 183
 Pompe W., 42
 Ponomariow W.I., 178
 Poonen B., 181
 Prasolov V.V., 38, 137, 183

 Rabczuk R., 128
 Rademacher H., 21, 183
 Rempała J., 178
 Rice R.E., 139
 Richards I., 46, 48
 Robbins H., 6, 179
 Roman S., 48, 183
 Rosen M., 180
 Rozental A.L., 179
 Rozow N., 128
 Ruiz-Cobo R., 145, 148, 149, 179
 Ryll J., 131, 177
 Rywkin A.A., 128

 Sadowicz W.A., 183
 Santos D.A., 183
 Sawoń Z., 62
 Schinzel A., 177, 183
 Schweizer B., 139
 Shallit J., 177
 Shklarsky D.O., 183

 Sieklucki K., 180
 Sierpiński W., 172, 176, 183
 Sklar A., 139
 Skwarczyński M., 13
 Slipenko A.K., 140, 141
 Small Ch.G., 144, 183
 Smyszlakow W., 91
 Sobolev C.I., 21
 Sofo A., 42
 Solowiew J.P., 48
 Sondow J., 6
 Stark E.L., 11
 Stein S.K., 148
 Steinhaus H., 21, 183
 Stewart I., 6, 11, 183
 Stoneham R.G., 6
 Straszewicz S., 178, 184
 Strzelecki E., 30
 Strzelecki P., 11
 Subba K., 55
 Svrcek J., 181
 Świętek A., 181
 Świętochowski Z., 91
 Szczepański J., 179
 Szego G., 183
 Szirszow A., 7
 Szneperman L.B., 184
 Szurek M., 184
 Szustef F.M., 184
 Szydłowski A.B., 6, 11, 180
 Szymiczek K., 21, 123

 Tattersall J.J., 169, 172, 184
 Terlecki J., 48
 Titow P.I., 180
 Tołpygo A.K., 179, 180
 Toeplitz O., 21, 183
 Trost E., 184
 Turowicz A., 18, 184

 Uscka-Wehlou H., 177
 Uscki M., 58, 181
 Usiskin Z., 123
 Ustinov A.W., 178

 Vakil R., 181
 Vazzana A., 172, 180
 Veblen O., 6, 11
 Viete, 12

 Wagutien N., 38
 Wakulicz A., 176
 Wallis J., 12
 Wasilev J.B., 180
 Wasilev N.B., 184

Weintraub S.H., 184
Wertgein B., 126
Wetzel J.E., 151
Więsław W., 13
Wilczynski W., 180
Wilenkij I.J., 178
Wilenkin N.J., 62
Wiles A., 42
Williams K.S., 178
Winkler P., 183
Winogradow I., 184
Worobjow N.N., 177, 184
Woronin S.M., 184
Wright E.M., 80
Wyszenskij W.A., 184

Yaglom I.M., 183
Yashchenko I., 180

Zarzycki P., 181
Zemlakow A., 126, 128
Żuk I.K., 178
Zwonkin A., 9

Skorowidz

- algorytm Euklidesa, 168, 169
arcus tangens, 11
- baza przestrzeni liniowej, 45, 46
bezwzględna wartość, 20, 21, 23–25, 30, 50, 54, 59, 73, 112, 123, 126, 150, 151, 156, 157, 161, 170, 171
biegun północny, 24, 25
- całka, 9, 10, 13, 16, 17
ceiling, 63
ciąg
 arytmetyczny, 15, 53–55, 57, 58, 79, 130
 Fibonacciego, 56, 113, 177
 funkcyjny, 126
 geometryczny, 56–58, 113
 monotoniczny, 7, 15, 55, 58–61, 85
 nieskończony, 74
 ograniczony, 20, 59, 61, 126, 172
 okresowy, 76, 77, 173
 rekurencyjny, 12, 26, 29, 48, 49, 60, 76, 80, 84–86, 89, 113, 116
 $w(x)$, 89
ciało, 35, 43, 45, 135, 154, 159, 167, 168
cosinus, 23, 28, 29, 51, 115–124, 128
cotangens, 115–117, 120, 122, 123
cyfry, 53, 91
 końcowe, 15, 20, 91
 początkowe, 5, 8, 15, 16, 31–33
 rozwinęcia dziesiętnego, 5, 8, 9, 14–16, 31–33
część całkowita, 3, 7, 20, 29, 48, 63–66, 68–91, 93–113, 170–173, 177
część ułamkowa, 3, 20, 89, 90, 109–113, 128, 147
- domknięcie zbioru, 160
dzielnik zera, 156
- element odwracalny, 155
- floor, 63
funkcja, 21, 51, 86, 91, 113, 137–140, 145–151, 167
 Δ , 154
 φ , 2, 11
 f^+ , 158
 f^- , 158
 t_a , 154
 bijekcja, 24, 26, 125, 141
 ciągła, 3, 16, 125, 129–131, 137–139, 141–145, 147, 148, 150, 153, 155, 165
 Hamela, 142, 144
 liniowa, 126, 131, 147
 mierzalna w sensie Lebesque’a, 143
 monotoniczna, 91, 126, 137, 148
 nieparzysta, 27, 125, 126, 128, 131
 odległości, 22
 odwrotna, 24, 25, 125, 126, 141, 154
 ograniczona, 142, 143
 okresowa, 127–131, 140, 141, 149
 parzysta, 27, 125, 126, 129, 131, 144
 różniczkowalna, 16
 rosnąca, 143
 różniczkowalna, 131, 139, 143, 145, 147, 151
 różnowartościowa, 125, 150
 symetryczna, 21
 trygonometryczna, 116–124, 128
 wymierna, 167, 170
 zeta Riemanna, 12
- granica ciągu, 5, 7, 10, 12, 13, 17, 25, 26, 29, 39, 49, 60, 61, 77, 113, 143, 163, 170, 171
grupa, 140
- homeomorfizm, 163, 165
homomorfizm pierścieni, 163
- ideał, 157
 maksymalny, 157–160
 pierwszy, 158, 160–162
 radykalny, 158
- idempotent, 156, 157
iloczyn nieskończony, 12
IMO, 1, 55, 119
 Longlist, 30, 64, 74, 82, 83, 85, 86, 91, 106, 112, 122, 123
 Shortlist, 49, 50, 82, 85–87, 108, 113, 121, 123
indukcja matematyczna, 10, 17, 27, 43, 72, 117, 168
izomorfizm pierścieni, 154, 157, 163
- kolejne
 liczby naturalne, 14, 19
 liczby pierwsze, 15
 wyrazy ciągu, 14–16, 36, 53, 58
- kongruencja, 72, 78, 81, 82, 95, 109
- liczba
 γ , 30
 π , 8, 9, 12, 13, 16, 51, 80, 117–124
 e , 5–7, 9, 13, 17
 algebraiczna, 6, 10
 Bernoulliego, 12
 bezkwadratowa, 12, 15, 45, 68
 całkowita, 120
 Fibonacciego, 41, 177

- kwadratowa, 14, 20, 35, 37, 53, 55, 69, 82–84, 146
 Lucasa, 41
 niekwadratowa, 12, 35, 36, 70, 71, 81, 83, 172–176
 nieparzysta, 18, 27, 36, 51, 66, 70, 71, 76, 80, 81, 109, 120, 122, 126, 171, 175
 niewymierna, 6, 10, 14–18, 20, 21, 42, 44–48, 51, 59, 82, 85, 87, 91, 111, 117, 118, 121, 127, 143, 170–173, 177
 parzysta, 27, 36, 51, 70, 71, 76, 81, 109, 120, 171
 pełnopotęgowa, 12
 pierwsza, 5, 8, 15, 31, 32, 42, 43, 45, 46, 53, 54, 56, 57, 78–80, 109, 113, 120
 przestępna, 6, 10, 11, 30
 trójkątna, 48, 75
 wymierna, 5, 20, 21, 28, 29, 35, 38, 42–44, 47, 48, 54, 56, 58, 89, 118, 119, 125, 127, 128, 143, 168, 169, 171, 173
 złożona, 79
 zespolona, 10, 19, 20, 28, 29, 136
 liczby względnie pierwsze, 11, 18, 21, 77, 109, 121
 liniowa niezależność, 45, 47
 logarytm, 6, 9, 13, 14, 17, 20, 30, 48, 60, 68, 73, 77, 113, 145, 149
 lpotęga, 84
 Maple, 1, 5, 6, 8, 9, 13, 27, 31–33, 41, 90, 103, 173–177
 max, 21, 158
 metryka, 22–26
 euklidesowa, 24, 25
 sferyczna, 24
 min, 21, 86, 130, 148, 158
 nierówność, 7, 13, 30, 50, 51, 57, 58, 99, 102, 123, 126, 150, 151, 170, 171
 Bernoulliego, 7
 funkcyjna, 150, 151
 z bezwzględną wartością, 20, 21, 30, 50, 54, 59, 73, 123, 150, 171
 z częścią całkowitą, 72–74, 78, 97
 z częścią ułamkową, 112, 113
 nwd, 1, 55, 77
 nww, 1, 77
 okrąg, 24, 28
 Olimpiada Matematyczna, 128
 Anglia, 107
 Australia, 134
 Austria, 64, 65
 Belgia, 110
 Białoruś, 50, 111, 112, 136, 137
 Bośnia-Hercegowina, 112
 Bułgaria, 19, 76, 136, 150
 Chiny, 85, 135, 147, 148
 Chorwacja, 68
 Czechosłowacja, 36, 50, 65, 68, 93, 101
 Czechy-Słowacja, 108
 Grecja, 125
 Hiszpania, 36, 40, 71, 130
 Indie, 19, 81, 84
 Iran, 62
 Irlandia, 20, 40, 69, 72, 109, 136
 Izrael, 146
 Japonia, 77
 Jugosławia, 21, 36
 Kanada, 66, 93, 94, 96, 148
 Korea, 78, 140
 Leningrad, 107, 148
 Litwa, 106
 Mołdawia, 78, 93, 106, 119
 Moskwa, 29, 53, 54, 57, 107, 110, 112, 124, 138
 Niemcy, 49
 Norwegia, 34, 59
 Polska, 12, 19, 49, 59, 66, 76, 81, 85, 107, 110, 124, 126, 128, 139, 141, 146, 147
 Rosja, 21, 37, 47, 69, 74, 80, 81, 85, 111, 112, 119, 148, 149
 RPA, 20
 Rumunia, 20, 53, 57, 71, 109, 117, 124, 139, 149
 Słowenia, 69, 123, 138
 Serbia-Czarnogóra, 72
 St Petersburg, 18, 21, 47, 55, 59, 74, 81, 83, 87, 88, 91, 107, 109, 112, 113, 120, 129, 130, 147, 151
 Szwecja, 30, 39, 107, 135
 Tajwan, 77, 110
 Ukraina, 76, 111
 USA, 54, 73, 113, 120, 150
 W.Brytania, 111
 Węgry, 107
 Węgry-Izrael, 38, 112
 Wietnam, 107, 108, 131
 ZSRR, 18, 51, 123
 operacja sprzężenia, 35, 38
 pierścień, 153
 $\mathbb{C}[x]$, 136
 $\mathbb{R}[x, y, z]$, 137
 $\mathbb{R}[x, y]$, 88
 $\mathbb{R}[x]$, 133–136, 138, 145
 $\mathbb{Z}[x]$, 18, 19, 26, 28
 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$, 19
 $k[x]$, 135
 $k[x_0, \dots, x_n]$, 167

- funkcji ciągłych, 154, 155
- ilorazowy, 159
- przemienny z jedynką, 3
- pochodna, 9, 16, 39, 51, 131, 151
- początkowe cyfry, 33
- podłoga, 63
- podciało, 35, 45, 51
- podzbiór, 30, 53, 55, 56, 91, 130, 150
- podzielność, 19, 42, 55, 61, 68, 71, 72, 79, 81, 85, 113, 174
 - przez 3, 35, 36, 61, 80, 118
 - przez 4, 80
 - przez 5, 18, 85
 - przez 10, 79
 - przez 14, 36
 - przez 17, 82
- potęga
 - dwójki, 11, 12, 15, 16, 18, 45, 51, 53, 55, 57–59, 65, 71, 72, 76, 78–80, 84, 85, 109, 113, 116, 120–122, 129, 171, 177
 - siódemki, 35
 - trójki, 16, 65, 118
- prawdopodobieństwo, 11
- produkt pierścieni, 154, 157
- prosta domknięta, 24
- przestrzeń liniowa, 45
- przestrzeń topologiczna, 153
 - całkowicie regularna, 155
 - dyskretna, 156, 160
 - Hausdorffa, 155, 159
 - metryczna, 22, 153, 155
 - quasi-zwarta, 160
 - skończona, 161
 - spójna, 156
 - T_2 , 155
 - $T_{3\frac{1}{2}}$, 155
 - Tichonowa, 155, 156, 160–162
 - zwarta, 25, 26, 155, 159, 160, 163, 164
- przybliżenie wymierne, 20, 21, 50, 62
- punkt
 - przecięcia, 24, 25
 - stały, 126, 130, 150, 151
 - w nieskończoności, 24, 25
- pytanie, 5, 7, 31, 32, 38, 79, 85, 91, 106, 110, 143, 171
- redukt, 171
- równanie, 19, 42, 86, 87, 126, 138, 151
 - Cauchy’ego, 142
 - funkcyjne, 133–142, 144–149
 - z częścią całkowitą, 93–108
 - z częścią ułamkową, 110, 111
- różniczkowanie, 143
- rozwiązanie dziesiętne, 5, 8, 13–16, 31–33, 177
 - okresowe, 5, 14–16
 - rzut stereograficzny, 26
- sfera, 25, 26, 141
- silnia, 5, 7, 17, 18, 79, 81
- sinus, 12, 23, 28, 29, 115–124, 128
- sprężenie, 35
- sufit, 63, 81
- symbol Newtona, 7, 11, 120
- szereg, 5, 7, 11–13, 17, 18, 20, 60–62, 177
 - tangens, 23, 115–124
 - teoria Galois, 46
 - tożsamość Eulera, 10
 - trójka
 - liczb całkowitych, 50
 - liczb rzeczywistych, 29
 - trójkowy system numeracji, 53
 - twierdzenie
 - Beatty, 85
 - Besicovitcha, 46
 - Dirichleta, 15, 79
 - Lagrange’a, 177
 - Lindemanna, 10
 - o trzech ciągach, 77, 163
 - o wielomianach symetrycznych, 19
 - wielkie Fermata, 42, 137
 - Wilesa, 42
- ułamek łańcuchowy, 7, 10, 14, 6, 167, 169, 170, 173–177
 - nieskończony, 170–173
 - normalny, 168
 - okresowy, 172–177
 - skończony, 168
- warunek Cauchy’ego, 170
- warunki równoważne, 5, 36, 40, 53–56, 58, 66, 71, 78–81, 83–86, 113, 124, 127, 128, 138, 142, 160, 173, 174, 177
- wielomian, 9, 16, 88, 127, 133, 137
 - Czebyszewa, 28
 - dwóch zmiennych, 88
 - jednej zmiennej, 15, 19, 26, 88, 117, 118, 134–138, 145
 - minimalny, 49, 51
 - moniczny, 19, 27, 136
 - n-zmiennych, 19, 167, 168, 170
 - symetryczny, 19
 - trójmian kwadratowy, 18, 135, 177
 - trzech zmiennych, 137
 - trzeciego stopnia, 19, 39, 82, 118
- wielomiany względnie pierwsze, 136
- wymiar przestrzeni liniowej, 45
- wzór Leibniza, 9, 16

wzór Moivre'a, 28

z-ideał, 158, 162

zbiór

\mathbb{N}_0 , 1, 53, 94, 171, 172

\mathbb{R}^+ , 39, 138, 145, 146, 150

domknięty, 155–157, 160, 162

gęsty, 39, 124, 143

liczb całkowitych, 1

liczb naturalnych, 1, 53, 60, 85, 86, 91, 156,
160

liczb pierwszych, 1

liczb rzeczywistych, 1, 5, 19–23, 51, 53, 91,
113, 125, 127–131, 133, 137–142, 144–
151, 153–156, 158–160, 162–165

liczb wymiernych, 1, 18, 35, 49, 51, 111, 127,
129, 147, 157

liczb zespolonych, 1, 136

otwarty, 153–156, 159, 162, 164, 165

zbiory rozłączne, 30, 53, 55, 56, 85, 86, 91, 130