Podróże po Imperium Liczb

Część 10. Liczby i Funkcje Rzeczywiste

Rozdział 1

---

1. Liczby rzeczywiste

Andrzej Nowicki 11 grudnia 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

1 Liczby rzeczywiste

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}$. Każda liczba rzeczywista ma dokładnie jedno nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Dla przykładu takim nieskończnonym rozwinięciem dziesiętnym liczby $\frac{1}{3}$ jest $0,3333\cdots$, a liczby $\frac{1}{2}$ jest $0,4999\cdots$. Dana liczba rzeczywista jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jej nieskończone rozwinięcie dziesiętne jest od pewnego miejsca okresowe.

1.1 Liczba e

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad \boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

1.1.1. *Rozwinięcie dziesiętne liczby e (tysiąc cyfr).*

$$\begin{aligned} e \;=\; & 2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240 \\ & 766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290 4 \\ & 3572900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011 \\ & 5738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118 \\ & 5374234544243710753907774499206955170276183860626133138458300075204 \\ & 4933826560297606737113200709328709127443747047230696977209310141692 \\ & 8368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468 \\ & 6445490598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989 \\ & 5193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117301 \\ & 2381970684161403970198376793206832823764648042953118023287825098194 \\ & 5581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727 \\ & 3866738589422879228499892086805825749279610484198444363463244968487 \\ & 5602336248270419786232090021609902353043699418491463140934317381436 \\ & 4054625315209618369088870701676839642437814059271456354906130310720 \\ & 8510383750510115747704171898610687396965521267154688957035035\cdots \end{aligned}$$ (Maple).

1.1.2. *Liczba pierwsza utworzona z* 85 *początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby e:*

2718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571.

Liczby utworzone z n początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby e są pierwsze, gdy $n = 1$, 3, 7 lub 85. *Czy są jeszcze inne tego rodzaju liczby pierwsze?* (Maple).

1.1.3. *Tabela przedstawia pewne liczby pierwsze utworzone z kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby e. Podano: numer cyfry początkowej, liczbę cyfr oraz liczbę pierwszą* (Maple).

2	49	7182818284590452353602874713526624977572470936999
2	114	718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724 076630353547594571382178525166427427466391932003
2	126	718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724 076630353547594571382178525166427427466391932003059921817413
4	25	8281828459045235360287471
4	26	82818284590452353602874713
4	33	828182845904523536028747135266249

1.1.4.
$$\begin{aligned}\sqrt{e} &= 1,6487212707001281468486507878141635716537761007101480115750\cdots,\\ e^e &= 15,154262241479264189760430272629911905528548536856139769140 8\cdots,\\ \log e &= 0,4342944819032518276511289189166050822943970058036665661144\cdots,\\ \log_2 e &= 1,4426950408889634073599246810018921374266459541529859341354\cdots,\\ \log_3 e &= 0,9102392266268373936142401657361070006126360572552117 44\cdots \text{(Maple)}.\end{aligned}$$

★ R. G. Stoneham, *A study of* 60,000 *digits of the transcendental* e, [Mon] 72(5)(1965) 483-500.

1.1.5. *Liczba e jest niewymierna.*

D. Przypuśćmy, że e jest liczbą wymierną. Niech $e = \frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. Wiemy, że $2 < e < 3$, a więc e nie jest liczbą całkowitą i wobec tego $b \geqslant 2$. Mnożymy obie strony równości $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ przez $b!$ i mamy:

$$(*) \qquad a(b-1)! = \Big(b! + b! + (3\cdot 4\cdots b) + (4\cdot 5\cdots b) + \cdots + b + 1\Big) + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots.$$

Ale $b \geqslant 2$, więc $0 < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{2}$. Stąd wynika, że równość $(*)$ jest sprzecznością; po lewej stronie tej równości jest liczba naturalna, a po prawej nie. ⊠

Dalej znajdziemy inny dowód niewymierności liczby e (patrz 1.5.3).

★ A. A. Buchsztab, *Niewymierność liczby* e, [Buch] 65.
R. Courant, H. Robbins, *Liczba Eulera* e, [CouR] 381-383.
M. Eastham, *The irrationality of* e^4*; a simple proof*, [MG] 88(512)(2004) 205-207.
A. E. Parks, π*, e, and other irrational numbers*, [Mon] 9(1986) 722-723.
J. Sondow, *A geometric proof that e is irrational and a new measure of its irrationality*, [Mon] 113(7)(2006) 637-641.

W 1873 roku matematyk francuski Charles Hermite (1822 − 1901) udowodnił, że liczba e nie jest algebraiczna, tzn. jest liczbą przestępną, czyli nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych.

1.1.6 (Hermite 1973). *Liczba e jest przestępna.*

★ A. Baker, *Transcendence of* e, [Bak] 3-6.
A. A. Buchsztab, *Przestępność liczby* e, [Buch] 267.
A. I. Gałoczkin, Y.V. Nesterenko, A. B. Szydłowski, *Przestępność liczby* e, [G-ns] 113-118.
I. Stewart, *Transcendence of* e, [Stet] 272-273.
O. Veblen, *The transcendence of* π *and* e, [Mon] 11(12)(1904) 219-223.

Następne dwie równości dotyczą ułamków łańcuchowych, o których dokładniej powiemy w ostatnim rozdziale tej książki.

1.1.7. $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \dots]$ *(ułamek łańcuchowy). Innymi słowy,* $e = \Big[2; (a_n)\Big]$, *gdzie* $a_{3n} = a_{3n+1} = 1$ *oraz* $a_{3n-1} = 2n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([Buch] 216).

1.1.8. $\dfrac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, 18, \dots]$. *Dokładniej,* $\dfrac{e+1}{e-1} = \Big[2; (a_n)\Big]$, *gdzie* $a_n = 4n + 2$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([Buch] 215).

★ H. Cohn, *A short proof of the simple continued fract. expansion of* e, [Mon] 113(1)(2006) 57-42.
T.J. Osler, *A proof of the continued fraction expansion of* $e^{1/M}$, [Mon] 113(1)(2006) 62-66.

1.1.9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{(2n+1)!} = e.$ ([Crux] 2000 s.308).

1.1.10. $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^3}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\right)^{-1} = e^2.$ ([Crux] 2000 s.254 z.2450).

1.1.11. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right)^{2/n^2} = e.$ ([Dlt] 2/1995 12).

1.1.12. *Jeśli* $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = (n+1)(a_{n+1} + a_n)$, *to*

$$\lim \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e}. \quad \text{([Mat] 5/1963 209).}$$

1.1.13. *Która z liczb* $(2.71)^e$ *oraz* $e^{2.71}$ *jest większa ?*

1.1.14. *Dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi równość*

$$\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1}\right] = n - 1. \quad \text{([Dlt] 7/2000 z.398).}$$

D. ([Dlt] 7/2000). Liczba e jest granicą ciągów (a_n) i (b_n), gdzie $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Wiadomo, że ciąg (a_n) jest rosnący. Ciąg (b_n) jest natomiast malejący (łatwo to wynika ze znanej nierówności Bernoulliego). Mamy zatem:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n,$$

dla $n \geqslant 2$. Stąd $1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < 1 + \frac{1}{n-1}$ i mamy: $n - 1 < \frac{1}{\sqrt[n]{e}-1} < n$, a zatem $\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}-1}\right] = n - 1$ (dla $n = 1$ to jest również prawdą). ⊠

★ J.L. Coolidge, *The number* e, [Mon] 57(9)(1950) 591-602.
Zofia Kowalska, *Pewne własności i zastosowania liczby* e, [Pmgr] 1983.
E. Kuźmin, A. Szirszow, *Liczba* e, [Kw] 8/1979 3-8.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Liczba π

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2.1. *Rozwinięcie dziesiętne liczby π (tysiąc cyfr).*

$$
\begin{aligned}
\pi \;=\; 3,&1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078\\
&1640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058\\
&2231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964\\
&4288109756659334461284756482337867831652712019091456485669234603486\\
&1045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282\\
&9254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433\\
&0572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673\\
&5188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522\\
&4737190702179860943702770539217176293176752384674818467669405132000\\
&5681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301\\
&4654958537105079227968925892354201995611212902196086403441815981362\\
&9774771309960518707211349999998372978049951059731732816096318595024\\
&4594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865\\
&8753320838142061717766914730359825349042875546873115956286388235378\\
&759375195778185778053217122680661300192787661119590921642019\,8\cdots \text{(Maple)}.
\end{aligned}
$$

W książce Joaquina Navarro [Nava] podano 10 tysięcy początkowych cyfr liczby π. W tej książce, na stronie 119 jest informacja, że na 762 pozycji po przecinku, rozpoczyna się blok składający się z sześciu dziewiątek i zauważył to po raz pierwszy laureat Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki, Richard Feynman (1918 – 1988). Również z tej książki dowiadujemy się, że na pozycji 12 387 594 880 po przecinku, rozpoczyna się blok 0123456789. Odkryto to za pomocą komputera. W internecie można znaleźć ponad milion cyfr po przecinku rozwinięcia dziesiętnego liczby π.

1.2.2. *Liczba pierwsza utworzona z 38 początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π:*

$$31415926535897932384626433832795028841.$$

Liczby utworzone z n początkowych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π są pierwsze, gdy $n = 1,\ 2,\ 6$ lub 38. Innych liczb pierwszych tego typu nie znaleziono.

([Szu87] 63, Maple, K.Brown *Primes in the decimal expansion of π*).

1.2.3. *Tabela przedstawia pewne liczby pierwsze utworzone z kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby π. Podano: numer cyfry początkowej, liczbę cyfr oraz liczbę pierwszą* (Maple).

2	5	14159
2	12	141592653589
3	12	415926535897
3	26	41592653589793238462643383
3	38	41592653589793238462643383279502884197
4	7	1592653
4	41	15926535897932384626433832795028841971693
7	50	26535897932384626433832795028841971693993751058209
7	81	265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640 628620899862803
7	193	265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640 628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223 172535940812848111745028410270193852110555964462294895493038 1

1.2.4.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\pi} &= 1,7724538509055160272981674833411451827975494561223871282138 1\cdots\\
\log\pi &= 0,49714987269413385435126828829089887365167832438044244613405\cdots\\
\log_2\pi &= 1.6514961294723187980432792951080073350184769267630415294067 8\cdots,\\
\log_3\pi &= 1.0419780459921858651147431958638606343305719287245737879633 4\cdots,\\
\pi^2 &= 9.8696044010893586188344909998761511353136994072407906264133 2\cdots,\\
\pi^2/6 &= 1.6449340668482264364724151666460251892189499012067984377355 6\cdots,\\
\pi^\pi &= 36.462159607207911770990826022692123666365508402228818738709 0\cdots,\\
e^\pi &= 23.140692632779269005729086367948547380266106242600211993445 0\cdots,\\
\pi^e &= 22.459157718361045473427152204543735027589315133996692249203 0\cdots,\\
e\cdot\pi &= 8.5397342226735670654635508695465744950348885357651149618796 0\cdots,\\
e+\pi &= 5.8598744820488384738229308546321653819544164930750653959\cdots \text{(Maple)}.
\end{aligned}
$$

★ P. Borwein, L. Jörgenson, *Visible structures in number theory*, [Mon] 10(2001) 897-910; tutaj są ilustracje dotyczące np. 1600 cyfr po przecinku modulo 2 liczby π.

A. Zwonkin, *Co to jest π?*, [Kw] 11(1978) 28-31.

1.2.5 (J.H. Lambert 1766)**.** *Liczba π jest niewymierna.*

Po raz pierwszy udowodnił to Johann Heinrich Lambert (1728-1777); matematyk i astronom szwajcarski pochodzenia francuskiego. Dzisiaj znamy kilka różnych dowodów tego faktu. Krótki i bardzo elegancki dowód podał w 1947 roku Ivan Niven.

D. (Niven 1947). Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ rodzinę wszystkich takich wielomianów $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla których wszystkie wartości

$$g(0),\ g(\pi),\ g'(0),\ g'(\pi),\ g''(0),\ g''(\pi),\ \dots,\ g^{(k)}(0),\ g^{(k)}(\pi),\ \dots$$

są liczbami całkowitymi. (Przez $g^{(k)}$ oznaczamy k-tą pochodną wielomianu g). Wielomiany z rodziny $\mathcal{P}$ posiadają następujące dwie własności.

(1) *Jeśli $g(x)\in\mathcal{P}$, to $\int_0^\pi \sin(x)g(x)dx$ jest liczbą całkowitą.*

Wynika to z całkowania przez części:

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \Big[f_1(x)g(x) - f_2(x)g'(x) + f_3(x)g''(x) - \cdots + (-1)^d f_{d+1}(x)g^{(d)}(x)\Big]_0^\pi,$$

gdzie d jest stopniem wielomianu $g(x)$ oraz $f_n(x)$ jest ciągiem funkcji zdefiniowanych następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(x), & \text{gdy } n\equiv 0 \pmod 4,\\ -\cos(x), & \text{gdy } n\equiv 1 \pmod 4,\\ -\sin(x), & \text{gdy } n\equiv 2 \pmod 4,\\ \cos(x), & \text{gdy } n\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

(2) *Jeśli $g(x), h(x)\in\mathcal{P}$, to $g(x)h(x)\in\mathcal{P}$.*

To z kolei wynika ze wzoru Leibniza: $(g\cdot h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)$.

Mamy udowodnić, że π jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy, że tak nie jest. Załóżmy, że $\pi=\frac{a}{b}$, gdzie $a,b\in\mathbb{N}$. Rozpatrzmy ciąg wielomianów $g_0(x), g_1(x), g_2(x),\dots$ zdefiniowanych następująco:

$$g_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n,$$

dla $n = 0, 1, 2, \cdots$. Udowodnimy indukcyjnie, że każdy wielomian $g_n(x)$ należy do rodziny $\mathcal{P}$. Dla $n = 0$ jest to oczywiste. Dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$g_n'(x) = g_{n-1}(x) \cdot (a - 2bx).$$

Zauważmy, że wielomian $a - 2bx$ należy do rodziny $\mathcal{P}$. Jeśli więc wielomian $g_{n-1}(x)$ należy do rodziny $\mathcal{P}$, to - na mocy (2) oraz powyższej równości - do tej rodziny należy również wielomian $g_n'(x)$. Ale $g_n(0) = g_n(\pi) = 0$, więc jeśli $g_{n-1}(x) \in \mathcal{P}$, to $g_n(x) \in \mathcal{P}$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli r jest liczbą z przedziału $(0, \pi)$, to każda liczba $g_n(r)$ jest ostro większa od zera i wobec tego każda liczba $\sin(r) g_n(r)$ jest również ostro większa od zera. Stąd w szczególności wynika, że każda całka $\int_0^\pi \sin(x) g_n(x) dx$ jest liczbą dodatnią. Wiemy jednak, na mocy (1), że każda taka całka jest liczbą całkowitą. Zatem,

$$\int_0^\pi \sin(x) g_n(x) dx \geqslant 1 \tag{3}$$

dla wszystkich $n = 0, 1, 2, \cdots$. Niech M będzie maksymalną wartością wielomianu $x \cdot (a - bx)$ w przedziale $[0, \pi]$. Dla każdej liczby naturalnej n mamy wtedy:

$$\int_0^\pi \sin(x) g_n(x) dx \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!} dx = \pi \frac{M^n}{n!}.$$

Ale $\lim_{n \to \infty} \frac{M^n}{n!} = 0$, więc mamy sprzeczność z (3). Przypuszczenie, że π jest liczbą wymierną prowadzi więc do sprzeczności. ⊠

★ K. Brown, *Proof that π is irrational.*
R. Breusch, *A proof of the irrationality of* π, [Mon] 61(9)(1954) 631-632.
A. A. Buchsztab, *Niewymierność liczby* π, [Buch] 66.
J. Hanel, *A simple proof of the irrationality of* π^4, [Mon] 93(5)(1986) 374-375.
M. K. Mentzen, *Krótka prezentacja długiej historii liczby* π, [Min] 14(2004), 21-42.
T. Nagell, *Irationality of the number e and* π, [Nagl] 38-40.
I. Niven, *A simple proof that* π *is irrational*, [Bams] 53(1947), 509.
A. E. Parks, π, *e, and other irrational numbers*, [Mon] 9(1986) 722-723.

1.2.6 (Tożsamość Eulera). $\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$.

1.2.7. $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$. ([Nava] 95).

W 1882 roku matematyk niemiecki Ferdynand Lindemann (1852 - 1939) udowodnił, że π jest liczbą przestępną. Udowodnił on nawet więcej:

1.2.8 (Lindemann 1882). *Jeśli $u_1, \dots, u_n$ (gdzie $n \geqslant 1$) są niezerowymi liczbami algebraicznymi oraz $v_1, \dots, v_n$ są parami różnymi liczbami algebraicznymi, to liczba*

$$u_1 e^{v_1} + u_2 e^{v_2} + \cdots + u_n e^{v_n}$$

jest różna od zera. ([Bak] 6-8, [Buch]).

Z tego twierdzenia otrzymujemy:

1.2.9 (Lindemann 1882). *Liczba π jest przestępna.*

D. Przypuśćmy, że π jest liczbą algebraiczną. Wtedy πi jest również liczbą algebraiczną i wobec tego z twierdzenia 1.2.8 wynika, że liczba $1 \cdot e^{\pi i} + 1 \cdot e^0$ jest różna od zera. Tymczasem, na mocy tożsamości Eulera 1.2.6, liczba ta jest równa zero. ⊠

★ A. A. Buchsztab, *Przestępność liczby* π, [Buch] 269.
A. I. Gałoczkin, Y. V. Nesterenko, A. B. Szydłowski, *Przestępność liczby* π, [G-ns] 118-130.
I. Niven, *The transcendence of* π, [Mon] 46(8)(1939) 469-471.
I. Stewart, *Transcendence of* π, [Stet] 274-276.
O. Veblen, *The transcendence of* π *and* e, [Mon] 11(12)(1904) 219-223.

1.2.10 (Euler). $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

1.2.11. $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ([Cmj] 1978 s.180, [Nava] 78).

1.2.12 (R. Chartres 1904). *Prawdopodobieństwo tego, że dwie wybrane losowo liczby całkowite są względnie pierwsze wynosi* $\frac{6}{\pi^2}$. ([Nava] 67).

1.2.13. *Niech* $\Phi(n) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wówczas:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2\Phi(n)} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \text{([Nava] 95).}$$

★ B. R. Choe, *An elementary proof of* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, [Mon] 94(7)(1987) 662-663.
Y. Matsuoka, *An elementary proof of the formula* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, [Mon] 68(5)(1961) 485-487.
E. L. Stark, *Another proof of the formula* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, [Mon] 76(5)(1969) 552-553.
P. Strzelecki, *O równości* $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$, [Dlt] 4/2002 4-5.

1.2.14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \pi$. ([Crux] 2002 s.187).

1.2.15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. ([Crux] 1998 s.413).

1.2.16. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. ([Nava] 79).

1.2.17 (J. Gregory 1670). $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots$.

Wstawiając $x = 1$, otrzymujemy:

1.2.18 (Leibniz). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. ([Nava] 29).

1.2.19 (Euler)**.** *Dla każdej liczby naturalnej m zachodzi równość*

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{2^{2m-1}B_{2m}}{(2m)!}\pi^{2m},$$

gdzie ζ jest funkcją zeta Riemanna oraz B_{2m} jest liczbą Bernoulliego. Przykłady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}=\frac{\pi^8}{9450},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}.$$

([IrR] 231).

1.2.20. *Niech A, B, C oznaczają zbiory wszystkich liczb naturalnych odpowiednio niekwadratowych, bezkwadratowych oraz pełnopotęgowych (patrz [N-9]). Wtedy*

$$\sum_{n\in A}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2(15-\pi^2)}{90},\quad \sum_{n\in B}\frac{1}{n^2}=\frac{15}{\pi^2},\quad \sum_{n\in C}\frac{1}{n^2}=\frac{15015}{1382\pi^2}.$$

([Cmj] 17(1)(1986) 98-99).

1.2.21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$. ([Mon] 113(7)(2006) 597).

1.2.22 (Viéte 1597)**.** $\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{32}\cdots=\frac{2}{\pi}$. *Wykorzystując tożsamość* $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$, *powyższą równość można przedstawić w postaci*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots=\frac{2}{\pi}.$$

([Mat] 1/2003 13-14).

1.2.23. $\displaystyle\left(\frac{1}{1^2}\right)\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{3^2}+\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^4}{120}$. ([Mon] 41(1)(1934) s.29).

1.2.24 (J. Wallis 1656)**.** $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$, *tzn.:*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}=\frac{\pi}{2}.$$

([Mon] 5(1980) s.391, [Nava] 81, [Mat] 3/2003 137-139).

1.2.25 (Euler)**.** $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)^2-1}=\frac{\pi^2}{8},\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^4}{(2n+1)^4-1}=\frac{5\pi^4}{9\cdot 16}.$

1.2.26. *Niech* $a_0=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{1+a_n^2}$. *Wtedy* $\lim\frac{a_n}{2^n}=\frac{4}{\pi}$. ([OM] Polska 1989).

1.2.27. *Niech* (a_n) *będzie ciągiem liczb rzeczywistych takim, że* $a_n a_{n+1} = n$ *dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$. *Wtedy* $\pi a_1^2 = 2$. ([Putn] 1969).

1.2.28. $e^{\pi} > \pi^{e}$. ([Uiuc] 2002, [MG] 87(509)(2003) s.306).

1.2.29. $(3.14)^{\pi} > \pi^{3.14}$. ([Uiuc] 2007).

1.2.30. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$. ([Ssm] 102(6)(2002) z.4706 rozw.).

Zanotujmy jeszcze kilka innych całek.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

1.2.31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1-x^2} = \pi, \qquad \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx = \frac{22}{7} - \pi, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$ ([Nava]).

★ H. Chan, *More formulas for* π, [Mon] 113(5)(2006) 452-455.
E. Kofler, *Kwadratura koła*, [Kofl] 289-319.
M. Skwarczyński, *Sto lat dla ludolfiny*, [Dlt] 3/1983 10-15.

Witold Więsław opublikował w czasopiśmie [Mat] serię 23 interesujących artykułów o liczbie π. Pierwszy z tych artykułów pt. *O kole i walcu, czyli* π *po raz pierwszy*, jest w [Mat] 2(2000) s.74. Ostatni artykuł pt. *O czym jeszcze nie wiemy;* π *po raz dwudziesty trzeci*, jest w [Mat] 1(2004) 7-8.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Rozwinięcia dziesiętne pewnych liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1.
$$\begin{aligned} 0,5773502691\ldots &= \sqrt{3}/3, \\ 0,693147805\ldots &= \ln 2, \\ 1,618033988\ldots &= (1+\sqrt{5})/2, \\ 2,6651441426\ldots &= 2^{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$
[Lion].

Przykłady otrzymane przy pomocy Maple.

1.3.2.
$$\begin{aligned}
\ln 2 &= 0,6931471805599453094172321214581765680755001343602552541206 8\cdots, \\
\ln 3 &= 1,0986122886681096913952452369225257046474905578227494517346 9\cdots, \\
\ln 4 &= 1,3862943611198906188344642429163531361510002687205105082413 6\cdots, \\
\ln 5 &= 1,6094379124341003746007593332261876395256013542685177219126 5\cdots, \\
\ln 6 &= 1,7917594692280550008124773583807022727229906921830047058553 7\cdots, \\
\ln 7 &= 1,9459101490553133051053527434431797296370847295818611884593 9\cdots, \\
\ln 8 &= 2,0794415416798359282516963643745297042265004030807657623620 4\cdots, \\
\ln 9 &= 2,1972245773362193827904904738450514092949811156454989034693 9\cdots, \\
\ln 10 &= 2,3025850929940456840179914546843642076011014886287729760333 3\cdots.
\end{aligned}$$

1.3.3.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010299956639811952137388947244930267681898814621085413104 27\cdots,\\
\log 3 &= 0,4771212547196624372950279032551153092001288641906958648298 63\cdots,\\
\log 4 &= 0,6020599913279623904274777894489860535363797629242170826208 54\cdots,\\
\log 5 &= 0,6989700043360188047862611052755069732318101185378914586895 73\cdots,\\
\log 6 &= 0,7781512503836436325087667979796083359683187456528044061402 91\cdots,\\
\log 7 &= 0,8450980400142568307122162585926361934835723963239654065036 34\cdots,\\
\log 8 &= 0,9030899869919435856412166841734790803045696443863256239312 82\cdots,\\
\log 9 &= 0,9542425094393248745900558065102306184002577283813917296597 31\cdots.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log_2 3 &= 1,5849625007211561814537389439478165087598144076924810604557 5\cdots,\\
\log_2 5 &= 2,3219280948873623478703194294893901758648313930245806120547 6\cdots,\\
\log_2 6 &= 2,5849625007211561814537389439478165087598144076924810604557 5\cdots,\\
\log_2 7 &= 2,8073549220576041074419693172318308086410266259661407836772 9\cdots,
\end{aligned}$$

1.3.4.

$$\begin{aligned}
\log_3 2 &= 0,6309297535714574370995271143427608542995856401318804278706 5\cdots,\\
\log_3 4 &= 1,2618595071429148741990542286855217085991712802637608557413 1\cdots,\\
\log_3 5 &= 1,4649735207179271671970404076786403963079323666660496890529 0\cdots,\\
\log_4 3 &= 0,7924812503605780907268694719739082543799072038462405302278 7\cdots,\\
\log_4 5 &= 1,1609640474436811739351597147446950879324156965122903060273 8\cdots.
\end{aligned}$$

1.3.5. *W każdym ułamku dziesiętnym istnieją dowolnie długie ciągi następujących po sobie cyfr, występujące w rozwinięciu nieskończenie wiele razy.* ([Mat] 6/1954 68, [S59] 307, [S64] 165).

1.3.6. *Każda liczba dodatnia jest sumą dziewięciu liczb, których rozwinięcia dziesiętne zawierają tylko cyfry* 0 *i* 7. ([TTss] 1981, [Kw] 7/1982 43).

D. Niech $a > 0$. Jest oczywiste, że każda liczba dodatnia, a więc w szczególności liczba $a/7$, jest sumą dziewięciu liczb, których rozwinięcia dziesiętne zawierają tylko cyfry 0 i 1. Zatem $a = 7 \cdot (a/7)$ jest sumą dziewięciu liczb z zerami i siódemkami. ⊠

★ M. S. Gelfand, *Rozwinięcia dziesiętne pewnych liczb*, [Kw] 7/1983 25.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Kolejne wyrazy ciągów i rozwinięcia dziesiętne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4.1. *Liczba* $0,123456789101112131415\ldots$ *jest niewymierna.* ([S50] 222, [BoL] 276 76, [B-zm]).

D. Przypuśćmy, że jest to liczba wymierna. Wtedy rozważane nieskończone rozwinięcie dziesiętne jest (od pewnego miejsca) okresowe. Niech s będzie długością okresu i załóżmy, że tym okresem jest ciąg cyfr $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$. Ponieważ badana liczba powstała z cyfr kolejnych liczb naturalnych, w jej rozwinięciu dziesiętnym występuje nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ jedynek. Okres $(a_1, \ldots, a_s)$ składa się więc z samych jedynek. W tym rozwinięciu dziesiętnym występuje również nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ dwójek. Okres $(a_1, \ldots, a_s)$ składa się więc z samych dwójek. Mamy zatem sprzeczność: $1 = a_1 = 2$. ⊠

1.4.2. *Po zerze i przecinku wypisano kolejne liczby kwadratowe* $1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots$. *Powstała liczba* $0,1491625364964\cdots$. *Jest to liczba niewymierna.*

D. Przypuśćmy, że jest to liczba wymierna. Wtedy rozważane nieskończone rozwinięcie dziesiętne jest (od pewnego miejsca) okresowe. Niech s będzie długością okresu i załóżmy, że tym okresem jest ciąg cyfr $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$. W [N-2] wykazaliśmy, że jeśli m jest dowolnym skończonym ciągiem cyfr, to istnieje nieskończenie wiele takich liczb kwadratowych, których początkowe cyfry tworzą dany ciąg m. Badana liczba powstała z cyfr kolejnych liczb kwadratowych. W jej rozwinięciu dziesiętnym występuje więc nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ jedynek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych jedynek. Z tych samych powodów tym rozwinięciu dziesiętnym występuje również nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ dwójek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych dwójek. Mamy zatem sprzeczność: $1 = a_1 = 2$. ⊠

W ten sam sposób wykazujemy następne stwierdzenie

1.4.3. *Po zerze i przecinku wypisano kolejne sześciany* $1, 8, 27, 64, 125, 216, \cdots$. *Powstała liczba* $0,182764125216343\cdots$. *Jest to liczba niewymierna.*

Stosując odpowiednie fakty o początkowych cyfrach, podane i udowodnione w [N-2], można w ten sam sposób udowodnić następujące twierdzenie. Powyższe stwierdzenia są szczególnymi przypadkami tego twierdzenia.

1.4.4. *Po zerze i przecinku wypisano kolejno liczby* $f(1), f(2), f(3), \dots,$ *gdzie* f *jest wielomianem jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych takim, że* $f(x) > 0$ *dla* $x > 0$. *Wówczas otrzymana liczba jest niewymierna.* ([Nagl] s.126 z.55, [B-zm] 116).

1.4.5. *Po zerze i przecinku wypisano kolejno liczby pierwsze. Powstała liczba*

$$0,23571113171923\cdots.$$

Jest to liczba niewymierna. ([S59] 347).

D. Przypuśćmy, że jest to liczba wymierna. Wtedy rozważane nieskończone rozwinięcie dziesiętne jest (od pewnego miejsca) okresowe. Niech s będzie długością okresu i załóżmy, że tym okresem jest ciąg cyfr $(a_1, a_2, \dots, a_s)$.

Z twierdzenia Dirichleta o liczbach pierwszych w postępie arytmetycznym (patrz [N-4]) wynika, że jeśli m jest dowolnym skończonym ciągiem cyfr (przy czym ostatnią cyfrą jest $1, 3, 7$ lub 9), to istnieje nieskończenie wiele takich liczb pierwszych, których końcowe cyfry tworzą dany ciąg m. Badana liczba powstała z cyfr kolejnych liczb pierwszych. W jej rozwinięciu dziesiętnym występuje więc nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ jedynek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych jedynek. Z tych samych powodów tym rozwinięciu dziesiętnym występuje również nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ trójek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych trójek. Mamy zatem sprzeczność: $1 = a_1 = 3$. ⊠

1.4.6. *Niech* (a_n) *będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych, w którym* $a_{n+1} \leqslant 10a_n$ *dla wszystkich* n. *Wtedy nieskończony ułamek dziesiętny* $0, a_1a_2a_3\dots$ *jest liczbą niewymierną.* ([GaT] 11/1980).

1.4.7. *Niech* $a_n = 1$, *gdy* n *jest bezkwadratowe i niech* $a_n = 0$ *w przeciwnym wypadku. Wtedy nieskończony ułamek dziesiętny* $0, a_1a_2a_3\dots$ *jest liczbą niewymierną.* ([Nagl] s.125 z.54).

1.4.8. *Po zerze i przecinku wypisano kolejno liczby* $2^1,\ 2^2,\ 2^4,\ 2^8,\ 2^{16}, \dots$. *Wykazać, że otrzymana liczba jest niewymierna.* ([Dlt] 2/1981, [Fom] 29/71, [Mat] 6/1983 360).

D. Przypuśćmy, że jest to liczba wymierna. Wtedy rozważane nieskończone rozwinięcie dziesiętne jest (od pewnego miejsca) okresowe. Niech s będzie długością okresu i załóżmy, że tym okresem jest ciąg cyfr $(a_1, a_2, \dots, a_s)$. W [N-2] wykazaliśmy, że jeśli m jest dowolnym skończonym ciągiem cyfr, to istnieje nieskończenie wiele takich potęg dwójki, których początkowe cyfry tworzą dany ciąg m. Badana liczba powstała z cyfr kolejnych potęg dwójki. W jej rozwinięciu dziesiętnym występuje więc nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ jedynek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych jedynek. Z tych samych powodów tym rozwinięciu dziesiętnym występuje również nieskończenie wiele bloków składających się z $2s$ dwójek. Okres $(a_1, \dots, a_s)$ składa się więc z samych dwójek. Mamy zatem sprzeczność: $1 = a_1 = 2$. ⊠

W ten sam sposób wykazujemy następne stwierdzenie.

1.4.9. *Po zerze i przecinku wypisano kolejno liczby* $3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4, \dots$. *Wykazać, że otrzymana liczba jest niewymierna.* ([Dlt] 11/1985).

1.4.10. *Po zerze i przecinku wypisano kolejno potęgi danej liczby naturalnej większej od* 1. *Wykazać, że otrzymana liczba jest niewymierna.* ([Mat] 1/1985 z.1128).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Niewymierność pewnych liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Na stronie 9 przedstawiliśmy dowód Nivena niewymierności liczby π. Drobne modyfikacje tego dowodu pozwalają udowodnić następujące twierdzenie.

1.5.1 (A.E. Parks 1986). *Niech $c > 0$ będzie liczbą rzeczywistą i niech $f : [0, c] \to \mathbb{R}$ będzie taką funkcją ciągłą, że $f(x) > 0$ dla wszystkich x z przedziału otwartego $(0, c)$. Niech ponadto $f_1, f_2, f_3, \dots$ będą funkcjami różniczkowalnymi z $[0, c]$ do $\mathbb{R}$ takimi, że*

$$f_1' = f, \quad f_2' = f_1, \quad f_3' = f_2, \quad \cdots.$$

Jeśli dla każdego $n \geqslant 1$ liczby $f_n(0)$ oraz $f_n(c)$ są całkowite, to c jest liczbą niewymierną.

D. (A.E. Parks 1986). Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ rodzinę wszystkich takich wielomianów $g(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, dla których wszystkie wartości

$$g(0),\ g(c),\ g'(0),\ g'(c),\ g''(0),\ g''(c),\ \dots,\ g^{(k)}(0),\ g^{(k)}(c),\ \dots$$

są liczbami całkowitymi. (Przez $g^{(k)}$ oznaczamy k-tą pochodną wielomianu g). Wielomiany z rodziny $\mathcal{P}$ posiadają następujące dwie własności.

(1) *Jeśli $g(x) \in \mathcal{P}$, to $\int_0^c f(x)g(x)dx$ jest liczbą całkowitą.*

Wynika to całkowania przez części:

$$\int_0^c f(x)g(x)dx = \Big[f_1(x)g(x) - f_2(x)g'(x) + f_3(x)g''(x) - \cdots + (-1)^d f_{d+1}(x)g^{(d)}(x)\Big]_0^c,$$

gdzie d jest stopniem wielomianu $g(x)$.

(2) *Jeśli $g(x), h(x) \in \mathcal{P}$, to $g(x)h(x) \in \mathcal{P}$.*

To z kolei wynika ze wzoru Leibniza:

$$(g \cdot h)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)\ .$$

Mamy udowodnić, że c jest liczbą niewymierną. Przypuśćmy, że tak nie jest. Załóżmy, że $c = \frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy ciąg wielomianów $g_0(x), g_1(x), g_2(x), \dots$ zdefiniowanych następująco:

$$g_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n,$$

dla $n = 0, 1, 2, \cdots$. Udowodnimy indukcyjnie, że każdy wielomian $g_n(x)$ należy do rodziny $\mathcal{P}$. Dla $n = 0$ jest to oczywiste. Dla $n \geqslant 1$ zachodzi równość

$$g_n'(x) = g_{n-1}(x) \cdot (a - 2bx).$$

Zauważmy, że wielomian $a - 2bx$ należy do rodziny $\mathcal{P}$. Jeśli więc wielomian $g_{n-1}(x)$ należy do rodziny $\mathcal{P}$, to - na mocy (2) oraz powyższej równości - do tej rodziny należy również wielomian $g_n'(x)$. Ale $g_n(0) = g_n(c) = 0$, więc jeśli $g_{n-1}(x) \in \mathcal{P}$, to $g_n(x) \in \mathcal{P}$.

Zauważmy jeszcze, że jeśli r jest liczbą z przedziału $(0, c)$, to każda liczba $g_n(r)$ jest ostro większa od zera i wobec tego każda liczba $f(r)g_n(r)$ jest również ostro większa od zera. Stąd w szczególności wynika, że każda całka $\int_0^c f(x)g_n(x)dx$ jest liczbą dodatnią. Wiemy jednak, na mocy (1), że każda taka całka jest liczbą całkowitą. Zatem,

$$\int_0^c f(x)g_n(x)dx \geqslant 1 \tag{3}$$

dla wszystkich $n = 0, 1, 2, \cdots$. Oznaczmy przez M oraz L maksymalne wartości odpowiednio wielomianu $x \cdot (a - bx)$ oraz funkcji $f(x)$ na przedziale $[0, c]$. Dla każdej liczby naturalnej n mamy wtedy:

$$\int_0^c f(x)g_n(x)dx \leqslant \int_0^c L\frac{M^n}{n!}dx = cL\frac{M^n}{n!}.$$

Ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$, więc mamy sprzeczność z (3). Przypuszczenie, że c jest liczbą wymierną prowadzi więc do sprzeczności. ⊠

1.5.2. *Niech $r > 0$, $r \neq 1$. Jeśli r jest liczbą wymierną, to $\ln(r)$ jest liczbą niewymierną.*

D. (Parks 1986). Zamieniając ewentualnie r na $1/r$, możemy założyć, że $r > 1$. Wtedy $\ln(r) > 0$. Niech $r = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Niech $c = \ln(r)$ oraz

$$f(x) = be^x.$$

Przyjmujemy ponadto, że $f_n(x) = f(x) = be^x$ (dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$) i mamy spełnione wszystkie założenia twierdzenia 1.5.1. Na mocy tego twierdzenia liczba $\ln(r) = c$ jest niewymierna. ⊠

Na stronie 6 przedstawiliśmy pewien dowód niewymierności liczby e.. Teraz możemy podać drugi dowód.

1.5.3. *Liczba e jest niewymierna.*

D. Oczywiście $e > 0$ oraz $e \neq 1$. Przypuścmy, że $e \in \mathbb{Q}$. Wtedy (na mocy poprzedniego twierdzenia) $1 = \ln(e)$ jest liczbą niewymierną; sprzeczność. ⊠

1.5.4. *Jeżeli liczba naturalna n nie jest potęgą dziesiątki, to $\log n$ jest liczbą niewymierną.* ([S59] 40, [Kw] 5/1978 4).

1.5.5. *Niech $s \in \mathbb{N}$. Liczba $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^s}$ jest niewymierna.* ([Mat] 5-6/1975 353).

1.5.6. *Jeśli* $1 < a_1 < a_2 < \cdots$ *jest ciągiem liczb naturalnych, to liczba*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{a_n}}{a_n!}$$

jest niewymierna. ([Mon] 99(10)(1992) E923).

1.5.7.

(1) *Czy istnieją liczby rzeczywiste* a *i* b *takie, że* $a+b \in \mathbb{Q}$ *oraz* $a^n+b^n \notin \mathbb{Q}$ *dla wszystkich naturalnych* $n > 1$*?* Odp. *Istnieją. Przykład:* $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = -\sqrt{2}$.

(2) *Czy istnieją liczby rzeczywiste* a *i* b *takie, że* $a+b \notin \mathbb{Q}$ *oraz* $a^n+b^n \in \mathbb{Q}$ *dla wszystkich naturalnych* $n > 1$*?* Odp. *Nie istnieją.* ([OM] ZSRR 1989).

1.5.8. *Załóżmy, że co najmniej jedna z liczb* x *i* y *jest niewymierna. Wtedy co najmniej jedna z liczb* $x^2 - y$, $y^2 - x$, $x + y$ *jest niewymierna.* ([OM] St Petersburg 1992).

1.5.9. *Danych jest* 6 *liczb niewymiernych. Wykazać, że można z nich wybrać trzy liczby* a, b, c *takie, że liczby* $a + b$, $b + c$ *i* $c + a$ *są niewymierne.* ([MOc] 2000 z.15).

★ E. Gałkin, *Wymierne czy niewymierne?*, [Kw] 5/1977 45-47.
M. Grant, M. Perella, *Descending to the irrational*, [MG] 497(1999) 263-267.
R. Hajłasz, *Dowody niewymierności pewnych liczb*, [Dlt] 10/1994 1-3.
A. E. Parks, *π, e, and other irrational numbers*, [Mon] 9(1986) 722-723.
A. Turowicz, *Usuwanie niewymierności z mianownika*, [Mat] 1/1974 51-54.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Całkowitość lub wymierność pewnych liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. *Niech* p *będzie nieparzystą liczbą całkowitą. Jeśli liczby rzeczywiste* a *i* b *są pierwiastkami wielomianu* $x^2 + px - 1$*, to dla każdego naturalnego* n *liczby*

$$a^n + b^n \quad i \quad a^{n+1} + b^{n+1}$$

są całkowite i względnie pierwsze. ([Str72] 11, [B-rs] 184).

1.6.2. *Jeśli liczby rzeczywiste* a *i* b *są pierwiastkami wielomianu* $x^2 - 6x + 1$*, to dla każdego naturalnego* n *liczby* $a^n + b^n$ *są całkowite i niepodzielne przez* 5*.* ([BoL] 110 s.61).

1.6.3. *Niech* x_1, x_2 *będą pierwiastkami wielomianu* $g(x) = x^2 + ax + b$*, gdzie* $a, b \in \mathbb{Z}$*. Jeśli* $f(x)$ *jest dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, to*

$$f(x_1) + f(x_2)$$

jest liczbą całkowitą. ([Szn] 11.72, patrz 1.6.6).

D. $f(x) = h(x)g(x) + cx + d$, gdzie $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $c, d \in \mathbb{Z}$. Wtedy $f(x_1) + f(x_2) = c(x_1 + x_2) + 2d = -ca + 2d \in \mathbb{Z}$. ⊠

1.6.4. *Jeśli liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami równania $x^3 - x^2 + (a+1)x - 1 = 0$, gdzie a jest liczbą całkowitą różną od $0, \pm 1, \pm 3$, to każda liczba postaci*

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n$$

jest całkowita i niepodzielna przez a. ([Mat] 2/1965 88).

1.6.5. *Niech x_1, x_2, x_3 będą pierwiastkami wielomianu $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi. Jeśli $f(x)$ jest dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, to*

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

jest liczbą całkowitą. ([Szn] 11.72, patrz 1.6.6).

D. $f(x) = h(x)g(x) + px^2 + qx + r$, gdzie $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $p, q, r \in \mathbb{Z}$. Wtedy $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + q(x_1 + x_2 + x_3) + 3r = p(a^2 - b) + qa + 3r \in \mathbb{Z}$. ⊠

1.6.6. *Niech $z_1, z_2, \dots, z_n$, będą wszystkimi pierwiastkami wielomianu monicznego $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia n. Jeśli $f(x)$ jest dowolnym wielomianem o współczynnikach całkowitych, to liczba*

$$f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n)$$

jest całkowita.

D. Rozpatrzmy wielomian n-zmiennych $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$. Jest to symetryczny wielomian należący do $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Ze znanego twierdzenia o wielomianach symetrycznych wynika, że istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ taki, że $h(x_1, \dots, x_n) = w(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, gdzie $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ są podstawowymi wielomianami symetrycznymi zmiennych $x_1, \dots, x_n$. Ponieważ wielomian $g(x)$ jest moniczny i ma całkowite współczynniki, wszystkie liczby postaci $\sigma_i(z_1, \dots, z_n)$, dla $i = 1, \dots, n$, są całkowite (są z dokładnością do znaku równe odpowiednim współczynnikom wielomianu $g(x)$). Mamy więc: $f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) = w(\sigma_1(z_1, \dots, z_n), \dots, \sigma_n(z_1, \dots, z_n)) \in \mathbb{Z}$ i to kończy dowód. ⊠

1.6.7. *Niech $x \neq y$ będą liczbami rzeczywistymi (mogą być nawet liczbami zespolonymi). Jeśli dla czterech kolejnych liczb naturalnych n liczba*

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

jest całkowita, to jest całkowita dla każdego n. ([Mon] E2998, [OM] Bułgaria 1995).

1.6.8. *Niech $x, y \in \mathbb{R}$.*

(1) *Jeśli liczby $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^4 + y^4$ są całkowite, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $x^n + y^n$ jest całkowita.* ([OM] Polska 1998/1999)

(2) *Jeśli liczby $x + y$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$ są całkowite, to nie musi być prawdą, że każda liczba postaci $x^n + y^n$ jest całkowita. Przykład: Jeśli $x = \sqrt{2}/2$ i $y = -\sqrt{2}/2$, to $x + y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^3 + y^3 = 0$, $x^4 + y^4 = \frac{1}{2}$.* ([OM] Polska 1997).

1.6.9. *Niech $a \neq b$ będą liczbami rzeczywistymi. Jeśli liczby*

$$a - b, \quad a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3 \quad \dots$$

są całkowite, to liczby a i b również są całkowite. ([OM] Indie 1994).

1.6.10. *Niech $a \neq b$ będą liczbami zespolonymi. Jeśli liczby*

$$a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3, \quad a^5 - b^5$$

są wymierne, to liczby a i b również są wymierne. ([MM] 2000 s.328).

1.6.11. *Niech $x \in \mathbb{R}$. Jeśli $x^2 - x \in \mathbb{Z}$ oraz $x^n - x \in \mathbb{Z}$ dla pewnego $n \geqslant 3$, to $x \in \mathbb{Z}$.* ([OM] Irlandia 1998).

1.6.12. *Niech $x \in \mathbb{R}$. Jeśli liczby $x^{1919} - x$, $x^{1960} - x$ i $x^{2001} - x$ są całkowite, to x jest liczbą całkowitą.* ([OM] RPA 2001).

1.6.13. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Załóżmy, że $xy, yz, zx \in \mathbb{Q}$. Wtedy:*

(1) $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$;

(2) *jeśli $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q}$, to $x, y, z \in \mathbb{Q}$.* ([OM] Rumunia 2001).

1.6.14. *Dla każdej niewymiernej liczby a istnieją niewymierne liczby b, c takie, że liczby $a + b$, ac są wymierne i liczby ab, $a + c$ są niewymierne.* ([A-P] 2005).

1.6.15. *Liczby*

$$\frac{\log(8 + 3\sqrt{21})}{\log(1 + \sqrt{21}) - \log 2}, \quad \frac{2\log 6 + \log(33 + 19\sqrt{3})}{\log(\sqrt{3} - 1) - \log 2 - \log\sqrt{3}}, \quad \frac{\log(97 - 56\sqrt{3})}{\log(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - \log 2}$$

są całkowite. ([Mat] 5/1954 54).

1.6.16. *Niech $f(m, n) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^i$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Każda liczba postaci $f(m, n)$ jest całkowita.*

(2) *Ostatnią cyfrą liczby $f(1, n)$ może być tylko $0, 2$ lub 6.* ([Mon] 102(2)(1995) 175-176 z.10231).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Przybliżenia wymierne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7.1. *Wykazać, że istnieje nieskończony i ograniczony ciąg (x_n) taki, że*

$$|x_n - x_m| \geqslant \frac{1}{|n - m|}$$

dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$. ([WaJ] 257(78)).

O. Np. $x_n = 4\{n\sqrt{2}\}$, gdzie $\{a\} = a - [a]$. ⊠

1.7.2. *Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieją liczby naturalne a, b takie, że*

$$|ax - b| \leqslant \frac{1}{3}. \quad \text{([B-zm] 98).}$$

1.7.3. *Niech u będzie liczbą niewymierną z odcinka $(0,1)$. Dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby wymierne $a = \dfrac{p}{q}$, $b = \dfrac{r}{s}$, gdzie $p, q, r, s \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$a < u < b, \quad b - a < \frac{1}{n} \quad \textit{oraz} \quad rq - ps = 1. \quad \text{([Bryn] 2.6).}$$

1.7.4. *Niech α będzie liczbą niewymierną. Dla dowolnych liczb rzeczywistych ε, β, przy czym $\varepsilon > 0$, istnieją liczby całkowite m, n takie, że $|m\alpha + \beta - n| < \varepsilon$.* ([Kw] 12/1974 28, 72).

1.7.5. *Jeśli α jest niewymierną liczbą rzeczywistą, to istnieje nieskończenie wiele par (x,y), względnie pierwszych liczb całkowitych takich, że $\left|\frac{x}{y} - \alpha\right| < \frac{1}{y^2}$.* ([Nagl] 37).

★ W. Bednarek, *Przybliżone sumowanie*, [Dlt] 9/1994 4-6.
D. B. Fuks, M. B. Fuks, *O najlepszych przybliżeniach*, [Kw] 6/1971 1-7, [Kw] 11/1971 8-15.
D. B. Fuks, M. B. Fuks, *Przybliżenia wymierne i transcendentność*, [Kw] 12/1973 10-11.
H. Rademacher, O. Toeplitz, [RaT] 136-145.
C. I. Sobolev, *O przybliżeniach przypadkowych*, [Kw] 5/1987 45-49.
K. Szymiczek, *O aproksymacjach diofantycznych*, [Dlt] 11/1995 1-4.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Maksima i minima

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. *Jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$, to $x + y = \min(x,y) + \max(x,y)$ oraz*

$$\max(x,y,z) = x + y + z - \min(x,y) - \min(y,z) - \min(z,x) + \min(x,y,z).$$

1.8.2. *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(x, f(y))$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $f(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}$.* ([OM] Rosja 1998).

1.8.3. $\max(0, -a) + \max(1, a, b) = \max(0, a - \max(1, b)) + \max(1, b, 1 - a, b - a)$.
([MOc] 1997/1998 z25).

1.8.4. *Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że*

$$\max(a,b) + \max(c, 1997) = \min(a,c) + \min(b, 1998).$$

Wykazać, że $b \geqslant c$. ([OM] St Petersburg 1998).

1.8.5. *Znaleźć wszystkie dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c takie, że*

$$\max(a,b)\max(c,1998) = \min(a,c)\min(b,1998).$$

([OM] St Petersburg 1998).

1.8.6 (H. Steinhaus). *Funkcja $f(x,y,z) = ||x-y| + x + y - 2x| + |x - y| + x + y + 2z$ jest symetryczna.* ([Mat] 4/1957 55).

R. $f(x,y,z) = 4\max(x,y,z)$. ⊠

1.8.7. $\left|\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}\right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c} = 4 \cdot \max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$. ([OM] Jugosławia 1973, [Pa97]).

★ P. Aleksiejew, L. Kurlandczyk, *Suma minimów i minimum sumy*, [Kw] 3/1991 49-52.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Metryki

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie niepustym zbiorem. Funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nazywamy *metryką* (lub *funkcją odległości*) w zbiorze X, jeśli dla dowolnych elementów $x, y, z \in X$ spełnione są następujące warunki:

(1) $d(x, y) \geqslant 0$,

(2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

1.9.1. *Warunek* (1) *wynika z pozostałych warunków.*

D. $d(x, y) = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, y)) = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(y, x)) \geqslant \frac{1}{2}d(x, x) = 0$. ⊠

1.9.2. *Każda funkcja $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$, spełniająca dla dowolnych elementów $x, y, z \in X$ następujące dwa warunki:*

(a) $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(y, z)$,

jest metryką w zbiorze X. ([JedW]).

D. Z warunków (a) i (b) wynika, że $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, x) + \delta(y, x) = \delta(y, x)$ oraz $\delta(y, x) \leqslant \delta(y, y) + \delta(x, y) = \delta(x, y)$. Zatem $\delta(x, y) \leqslant \delta(y, x)$ i $\delta(y, x) \leqslant \delta(x, y)$, czyli $\delta(x, y) = \delta(y, x)$. Funkcja δ spełnia więc warunki (2), (3) i (4) podane w definicji metryki. Warunek (1) jest również spełniony (patrz 1.9.1). ⊠

Jeśli $d : X \times X \to \mathbb{R}$ jest metryką w zbiorze X, to zbór X nazywa się *przestrzenią metryczną* względem metryki d.

1.9.3. *Niech $d : X \times X \to \mathbb{R}$ będzie metryką w zbiorze X i niech $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem*

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

dla $x, y \in X$. Funkcja δ też jest metryką w zbiorze X. ([JedW]).

D. Niech $x, y, z \in X$ i niech $w = d(x, z) + d(z, y) - d(x, y)$. Liczba w jest nieujemna. Z równości

$$\delta(x, z) + \delta(z, y) - \delta(x, y) = \frac{w + 2d(x, z)d(z, y) + d(x, y) + d(x, z) + d(z, y)}{(1 + d(x, z))(1 + d(z, y))(1 + d(x, y))}$$

wynika, że $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(y, z)$. Pozostałe warunki są oczywiste. ⊠

1.9.4. *Niech $f : X \to X$ będzie dowolną funkcją i niech $d : X \times X \to \mathbb{R}$ będzie metryką w zbiorze X. Definiujemy nową funkcję $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$, przyjmując*

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & gdy\ x = y, \\ d(x, f(x)) + df(f(x), f(y)) + d(f(y), y), & gdy\ x \neq y. \end{cases}$$

Funkcja δ też jest metryką w zbiorze X. ([JedW]).

1.9.5. *Niech*

$$d_r(x,y) = \frac{|x-y|}{(x+y)^r}.$$

Jeśli $r=-1$ lub $r \in [0,1]$, to funkcja d_r jest metryką w zbiorze dodatnich liczb rzeczywistych. ([Crux] 1992 z.1636 s.123-125).

1.9.6 (M. S. Klamkin, A. Meir 1982). *Niech*

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}.$$

Jeśli $p \geqslant 1$, to funkcja d jest metryką w $\mathbb{R}$. To jest też prawdą, gdy $p = \frac{1}{2}$. Dla $p = \frac{1}{4}$ funkcja ta nie jest metryką. ([Crux] 1992 s.123-125).

1.9.7 (M. S. Klamkin 1993). *Niech*

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{(|x|+|y|)^r}.$$

Jeśli $r=-1$ lub $r \in [0,1]$, to funkcja d jest metryką w zbiorze niezerowych liczb rzeczywistych. ([Crux] 1993 s.142).

1.9.8. *Funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, określona wzorem*

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}} \quad (dla \ \ x, y \in \mathbb{R}),$$

jest metryką. ([Kw] 12/1979 24).

D. Wykażemy najpierw, że $d(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) = |\sin(\alpha-\beta)|$, dla wszystkich $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
d(\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta) &= \frac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right|}{\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \cdot \sqrt{1+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}}} \\
&= \frac{|\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha|}{\sqrt{cos^2\alpha + \sin^2\alpha} \cdot \sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta}} = |\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha| \\
&= |\sin(\alpha-\beta)| \ .
\end{aligned}$$

Niech teraz x, y, z będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Istnieją wtedy $\alpha, \beta, \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ takie, że $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$ oraz $z = \operatorname{tg}\gamma$. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \Big|\sin(\alpha-\beta)\Big| = \Big|\sin\Big((\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)\Big)\Big| \\
&= \Big|\sin(\alpha-\gamma)\cos(\gamma-\beta) + \sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\Big| \\
&\leqslant \Big|\sin(\alpha-\gamma)\cos(\gamma-\beta)\Big| + \Big|\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha-\gamma)\Big| \\
&= \Big|\sin(\alpha-\gamma)\Big| \cdot \Big|\cos(\gamma-\beta)\Big| + \Big|\sin(\gamma-\beta)\Big| \cdot \Big|\cos(\alpha-\gamma)\Big| \\
&\leqslant \Big|\sin(\alpha-\gamma)\Big| + \Big|\sin(\gamma-\beta)\Big| = d(x,z) + d(z,y),
\end{aligned}$$

a zatem, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$. Pozostałe warunki są oczywiste. ⊠

Powyższa metryka d pojawia się w dość naturalny sposób i jest szczególnym przypadkiem tak zwanych metryk sferycznych. Wyjaśnijmy to dokładniej.

Rozpatrzmy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ okrąg $\mathbb{S}$ o środku w punkcie $(0, \frac{1}{2})$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$. Jest to okrąg styczny do osi x-ów. Każdy punkt (u, v), tego okręgu, spełnia równość

$$u^2 + v^2 = v.$$

Punkt $N = (0, 1)$, leżący na tym okręgu, nazwijmy *biegunem północnym.* Niech $A = (x, 0)$ będzie dowolnym punktem leżącym na osi x-ów. Prosta przechodząca przez punkty N i A przecina okrąg $\mathbb{S}$ w dokładnie jednym punkcie różnym od bieguna N. Łatwo sprawdzić, że tym punktem przecięcia jest $\left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right)$. Mamy zatem funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S} \smallsetminus \{N\}$ określoną wzorem

$$h(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}, \frac{x^2}{1+x^2}\right)$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez f funkcję z $\mathbb{S} \smallsetminus \{N\}$ do $\mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(u, v) = \frac{u}{1-v}.$$

dla wszystkich $(u,v) \in \mathbb{S} \smallsetminus \{N\}$. (Zauważmy, że $1-v \neq 0$, gdyż $u^2+v^2 = v$ oraz $(u,v) \neq (0,1)$). Bez trudu sprawdzamy, że funkcje h oraz f są wzajemnie odwrotne.

Dołączmy do prostej $\mathbb{R}$ jeszcze jeden element zwany *punktem w nieskończoności.* Oznaczmy go symbolem ∞. Nazwijmy zbiór $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *prostą domkniętą* i oznaczmy ten zbiór przez $\overline{\mathbb{R}}$. Przyjmijmy dodatkowo, że $h(\infty) = N$ oraz $f(N) = \infty$. W ten sposób otrzymujemy dwie wzajemnie odwrotne funkcje $h : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{S}$ oraz $f : \mathbb{S} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Niech $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie metryką euklidesową, tzn.

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \quad \text{dla } x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Za pomocą metryki d_2 oraz funkcji h definiujemy nową funkcję $\delta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, przyjmując

$$(*) \qquad \delta(x,y) = d_2\Big(h(x), h(y)\Big), \quad \text{dla } \ x, y \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1.9.9. *Powyższa funkcja* $\delta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *jest metryką.*

D. Wynika to natychmiast z tego, że d_2 jest metryką oraz h jest funkcją różnowarościową (a nawet bijekcją). ⊠

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące równości.

1.9.10.

(1) $\delta(x,y) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2}}$ *dla* $x, y \in \mathbb{R}$*;*

(2) $\delta(x,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *dla* $x \in \mathbb{R}$.

Widzimy więc, że metryka δ obcięta do zbioru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ jest dokładnie tą samą metryką d, którą przedstawiliśmy w 1.9.8.

1.9.11. *Niech $\delta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ będzie metryką taką jak powyżej, tzn. zdefiniowaną równością $(*)$ Niech $d_1(x,y) = |x-y|$ oraz niech $d : \mathbb{R} \times R \to \mathbb{R}$ będzie obcięciem metryki δ do zbioru $\mathbb{R} \times R$ (czyli d jest metryką podaną w 1.9.8). Mamy wówczas:*

(1) $\delta(x,y) \leqslant 1$ *dla wszystkich* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$*;*

(2) $\left(\overline{\mathbb{R}}, \delta\right)$ *jest przestrzenią zwartą.*

(3) *metryki d oraz d_1 są równoważne, tzn. jeśli (x_n) jest ciągiem o wyrazach należących do $\mathbb{R}$ oraz $a \in \mathbb{R}$, to ciąg (x_n) jest zbieżny do a względem metryki d wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (x_n) jest zbieżny do a względem metryki d_1.*

(4) *Niech (x_n) będzie ciągiem o wyrazach należących do $\mathbb{R}$. Załóżmy, że granicą ciągu $(|x_n|)$ (w zwykłym sensie) jest $+\infty$. Wtedy ciąg (x_n) jest zbieżny w $\left(\overline{\mathbb{R}}, \delta\right)$ i jego granicą jest ∞. W szczególności, ciąg $x_n = (-2)^n$ jest zbieżny względem metryki δ i jego granicą jest ∞.*

Wszystkie przedstawione konstrukcje można powtórzyć w dowolnych wymiarach. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną i niech

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, \dots, x_n);\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}, \quad \mathbb{R}^{n+1} = \Big\{(u_1, \dots, u_n, v);\ u_1, \dots, u_n, v \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Rozpatrzmy w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ sferę $\mathbb{S}^n$ o środku w punkcie $(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$. Każdy punkt $(u_1, \dots, u_n, v)$ tej sfery spełnia równość

$$u_1^2 + \cdots + u_n^2 + v^2 = v.$$

Punkt $N = (0, \dots, 0, 1)$, leżący na tej sferze, nazwijmy *biegunem północnym.* Niech $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ i niech $A = (x, 0)$. Prosta w $\mathbb{R}^{n+1}$, przechodząca przez punkty N i A, przecina sferę $\mathbb{S}^n$ w dokładnie jednym punkcie różnym od bieguna N. Łatwo sprawdzić, że tym punktem przecięcia jest $\left(\frac{x_1}{1+|x|^2}, \frac{x_2}{1+|x|^2}, \dots, \frac{x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\right)$, gdzie

$$|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Mamy zatem funkcję $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$ określoną wzorem

$$h(x) = \left(\frac{x_1}{1+|x|^2}, \frac{x_2}{1+|x|^2}, \dots, \frac{x_n}{1+|x|^2}, \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\right),$$

dla wszystkich $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez f funkcję z $\mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$ do $\mathbb{R}^n$ określoną wzorem

$$f(u, v) = \left(\frac{u_1}{1-v}, \dots, \frac{u_n}{1-v}\right),$$

dla wszystkich $(u, v) \in \mathbb{S}^n \smallsetminus \{N\}$, gdzie $u = (u_1, \dots, u_n)$. (Zauważmy, że $1 - v \neq 0$). Bez trudu sprawdzamy, że funkcje h oraz f są wzajemnie odwrotne.

Dołączmy do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jeszcze jeden element zwany *punktem w nieskończoności.* Oznaczmy go symbolem ∞. Nazwijmy zbiór $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ *przestrzenią domkniętą* i oznaczmy ten zbiór przez $\overline{\mathbb{R}^n}$. Przyjmijmy dodatkowo, że $h(\infty) = N$ oraz $f(N) = \infty$. W ten sposób otrzymujemy dwie wzajemnie odwrotne funkcje $h : \overline{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{S}^n$ oraz $f : \mathbb{S}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$.

Niech $d_s : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ (dla każdego $s \geqslant 1$) oznacza metrykę euklidesową, tzn.

$$d_s(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_s - s_2)^2}, \quad \text{dla } x = (x_1, \dots, x_s),\ y = (y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^s.$$

Za pomocą metryki d_{n+1} oraz funkcji h definiujemy nową funkcję $\delta_n : \overline{\mathbb{R}^n} \times \overline{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, przyjmując

$$\delta_n(x,y) = d_{n+1}\Big(h(x), h(y)\Big), \quad \text{dla} \quad x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}.$$

1.9.12. *Powyższa funkcja $\delta_n : \overline{\mathbb{R}^n} \times \overline{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$ jest metryką.*

D. Wynika to natychmiast z tego, że d_{n+1} jest metryką oraz h jest funkcją różnowartościową (a nawet bijekcją). ⊠

Łatwo można udowodnić następujące stwierdzenie.

1.9.13.

(1) $\delta_n(x,y) = \dfrac{d_n(x,y)}{\sqrt{1+|x|^2}\cdot\sqrt{1+|y|^2}}$ *dla* $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(2) $\delta_n(x,\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}$ *dla* $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) $\delta_n(x,y) \leqslant 1$ *dla wszystkich* $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$.

(4) $\left(\overline{\mathbb{R}^n}, \delta_n\right)$ *jest przestrzenią zwartą.*

(5) *Niech d oznacza metrykę δ_n obciętą do $\mathbb{R}^n \times R^n$. Metryki d oraz d_n są równoważne, tzn. jeśli (x_n) jest ciągiem o wyrazach należących do $\mathbb{R}^n$ oraz $a \in \mathbb{R}^n$, to ciąg (x_n) jest zbieżny do a względem metryki d wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (x_n) jest zbieżny do a względem metryki d_n.*

Opisane konstrukcje w przypadku $n = 2$ mają istotne zastosowania w analizie zespolonej. Godnymi polecenia są polskie książki: [Ch-1], [Ch-z] oraz [Leja], w których znajdziemy podstawowe twierdzenia i fakty dotyczące omawianej tematyki. Odwzorowanie $h : \overline{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{S}^2$, którym się zajmowaliśmy, nazywa się *rzutem stereograficznym* (płaszczyzny domkniętej na sferę).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10 Liczby postaci x + 1/x

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10.1. *Niech $a_n = x^n + \dfrac{1}{x^n}$, dla $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy $a_i a_j = a_{i+j} + a_{i-j}$, dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych $n \geqslant m$. W szczególności, (gdy $i = n+1, j = 1$) mamy równość*

$$a_{n+2} = a_1 a_{n+1} - a_n,$$

dla $n \geqslant 0$.

D. $a_n a_m = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) = x^{n+m} + x^{n-m} + \frac{1}{x^{n-m}} + \frac{1}{x^{n+m}} = a_{n+m} + a_{n-m}$. ⊠

1.10.2. *Rozpatrzmy ciąg $\big(A_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wielomianów należących do $\mathbb{Z}[x]$ takich, że*

$$A_0(x) = 2,\ A_1(x) = x, \quad A_{n+2} = xA_{n+1}(x) - A_n(x),\ \text{dla } n \geqslant 0.$$

Wtedy dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$A_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}.$$

D. (Indukcja ze względu na n). Dla $n = 0$ i $n = 1$ jest to oczywiste. Oznaczmy $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$, dla $n \in \mathbb{N}_0$ i niech $n \geqslant 2$. Mamy wtedy: $A_{n+1}\left(x + \frac{1}{x}\right) = A_{n+1}(a_1) = a_1 A_n(a_1) - A_{n-1}(a_1) = a_1 a_n - a_{n-1} = a_{n+1} = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$. ⊠

1.10.3. *Początkowe wielomiany $A_n(x)$ zdefiniowane w* 1.10.2 (Maple).

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 & = & x,\\
A_2 & = & x^2 - 2,\\
A_3 & = & x^3 - 3x = x(x^2-3),\\
A_4 & = & x^4 - 4x^2 + 2,\\
A_5 & = & x^5 - 5x^3 + 5x = x(x^4 - 5x^2 + 5),\\
A_6 & = & x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2 = (x^4-2)(x^2-4x+1),\\
A_7 & = & x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x = x(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7),\\
A_8 & = & x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2,\\
A_9 & = & x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x = x(x^2-3)(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3),\\
A_{10} & = & x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25x^2 - 2 = (x^2-2)(x^8 - 8x^6 + 19x^4 - 12x^2 + 1),\\
A_{11} & = & x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x = x(x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11),\\
A_{12} & = & x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + 2\\
 & & = (x^4 - 4x^2 + 2)(x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 1).
\end{array}
$$

1.10.4. *Wielomiany A_n, zdefiniowane w* 1.10.2, *mają następujące własności.*

(1) *Każdy wielomian A_n, dla $n \in \mathbb{N}$, jest moniczny stopnia n.*

(2) *Jeśli n jest parzyste, to funkcja $x \mapsto A_n(x)$ jest parzysta.*

(3) *Jeśli n jest nieparzyste, to funkcja $x \mapsto A_n(x)$ jest nieparzysta.*

(4) *Każdy wielomian postaci A_{nm}, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$ i m jest nieparzyste, jest podzielny przez wielomian A_n. Dokładniej, jeśli $m = 2k+1$ jest liczbą nieparzystą, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość*

$$A_{n(2k+1)} = A_n\Big(A_{2kn} - A_{2(k-1)n} + A_{2(k-2)n} - \cdots \pm A_{2n} \mp 1\Big).$$

D. Własności (1), (2) i (3) wynikają z definicji wielomianów postaci A_n. Wykażemy, że zachodzi równość (4). Oznaczmy przez $F(x)$ wielomian występujący po prawej stronie tej równości. Z 1.10.2 wynika, że

$$
\begin{array}{lcl}
A_{n(2k+1)}\left(x+\frac{1}{x}\right) & = & x^{n(2k+1)} + \frac{1}{x^{n(2k+1)}} = (x^n)^{2k+1} + \left(\frac{1}{x^n}\right)^{2k+1}\\
 & = & \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left((x^n)^{2k} - (x^n)^{2(k-1)} + x^{n(2k-2)} - \dots\right)\\
 & = & A_n\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(A_{2kn}\left(x+\frac{1}{x}\right) - A_{2(k-1)n}\left(x+\frac{1}{x}\right) + A_{2(k-2)n}\left(x+\frac{1}{x}\right) - \dots\right)\\
 & = & F\left(x+\frac{1}{x}\right).
\end{array}
$$

Niech $G(x) = A_{n(2k+1)}(x) - F(x)$. Z powyżej równości wynika, że $G(a + \frac{1}{a}) = 0$ dla wszystkich $a \in \mathbb{N}$. Jest oczywiste, że jeśli $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$, to $a + \frac{1}{a} \neq b + \frac{1}{b}$. Wielomian $G(x)$ ma więc nieskończenie wiele pierwiastków. Zatem $G = 0$, czyli $A_{(2k+1)n}(x) = F(x)$. ⊠

1.10.5. *Dla każej nieparzystej liczby naturalnej n istnieje wielomian moniczny $f_n(x)$, o współczynnikach całkowitych stopnia n taki, że $f_n\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^n - \frac{1}{x^n}$.* ([Putn] 1959).

D. ([AndG] 183). Wynika to z równości $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$ oraz $x^{2k+1} - \frac{1}{x^{2k+1}} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^{2k-1} - \frac{1}{x^{2k-1}}\right) - \left(x^{2k-3} - \frac{1}{x^{2k-3}}\right)$. ⊠

1.10.6. *Niech x będzie liczbą zespoloną $\cos t + i \sin t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wtedy:*

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos t, \quad x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(nt).$$

D. Wynika to ze wzoru Moivre'a. ⊠

W następnym fakcie pojawia się wielomian Czebyszewa $T_n(x)$. *Wielomianem Czebyszewa pierwszego rodzaju* nazywamy każdy wyraz ciągu $(T_n(x))$, wielomianów z $\mathbb{Z}[x]$, zdefiniowanych następująco:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1} - T_n(x).$$

Własnościami i zastosowaniami tych wielomianów zajmiemy się w [N12]). Zanotujmy jedynie znaną równość:

$$T_n(\cos t) = \cos(nt),$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$.

1.10.7. $T_n\left(\frac{1}{2}(x + x^{-1})\right) = \frac{1}{2}(x^n + x^{-n})$. ([BoE] 33, [AndG] 52).

D. Rozpatrzmy liczbę zespoloną $x = \cos t + i \sin t$. Wiemy (patrz 1.10.6), że wtedy $x + x^{-1} = 2\cos t$ oraz $x^n + x^{-n} = 2\cos(nt)$. Zatem $T_n\left(\frac{1}{2}(x + x^{-1})\right) = T_n(\cos t) = \cos(nt) = \frac{1}{2}(x^n + x^{-n})$. Skoro rozważana równość zachodzi dla wszystkich liczb zespolonych leżących na okręgu $|z| = 1$, to również zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x. ⊠

1.10.8. *Niech x będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest całkowita. Wtedy każda liczba postaci $x^n + \frac{1}{x^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest całkowita.* ([G-if] 103).

D. Wynika to z równości $x^n + \frac{1}{x^n} = A_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$, gdzie A_n jest wielomianem, o współczynnikach całkowitych, zdefiniowanym w 1.10.2. ⊠

1.10.9. *Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których każda liczba postaci*

$$x^n + \frac{1}{x^n},$$

$n \in \mathbb{N}$, jest całkowita. ([Nord] 1996).

R. Z 1.10.8 wiemy, że wystarczy by liczba $x + \frac{1}{x}$ była całkowita. Niech $x + \frac{1}{x} = m \in \mathbb{Z}$. Wtedy dla $m \neq -1, 0, 1$ mamy $m^2 - 4 \geqslant 0$ i wtedy $x = \frac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}$. ⊠

1.10.10. *Jeśli $x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $x^{2000} + \frac{1}{x^{2000}} = 2$.* ([AndG] 53).

1.10.11. *Niech x będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna. Wtedy każda liczba postaci*

$$x^n + \frac{1}{x^n},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest wymierna. ([G-if] 103).

D. Wynika to z równości $x^n + \frac{1}{x^n} = A_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$, gdzie A_n jest wielomianem, o współczynnikach całkowitych, zdefiniowanym w 1.10.2. ⊠

1.10.12. *Niech* $0 < x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Jeśli liczby* $x^k + \dfrac{1}{x^k}$ *oraz* $x^{k+1} + \dfrac{1}{x^{k+1}}$ *są wymierne, to* $x + \dfrac{1}{x}$ *jest liczbą wymierną.* ([KoM] 2000(4) A238).

1.10.13. *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i niech* $k \in \mathbb{N}$. *Jeśli liczby* $\cos(k\alpha)$ *i* $\cos((k+1)\alpha)$ *są wymierne, to* $\cos\alpha$ *jest również liczbą wymierną.*

D. Oznaczmy $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Wtedy $x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$ oraz $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\alpha)$ dla $n \in \mathbb{N}$ (patrz 1.10.6). Teza wynika zatem z 1.10.12. ⊠

1.10.14. *Niech* $a_1 = 1$ *oraz* $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy:*

(1) $a_{100} > 14$;

(2) $[a_{1000}] = 44$;

(3) $\lim \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$. ([Kw] 4/2000 M1719).

★ T. Andreescu, R. Gelca, $x + 1/x$, [AndG] 52-53.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.11 Różne fakty i zadania dotyczące liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.11.1. *Jeśli* $\dfrac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$, *to* $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{1}{3}$. ([OM] Moskwa 1994/1995).

1.11.2. *Jeśli* $\dfrac{2a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} = 2$, *to* $\dfrac{3a - b}{a + 5b} = 1$ *lub* 3. ([OM] Moskwa 1994/1995).

1.11.3. *Niech* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Jeśli* $a + b = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, *to*

$$a^3 + b^3 = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}.$$

([Mock] 3/2000).

U. Łatwo wykazać, że jeśli $a+b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, to $b = -a$ lub $b = \frac{1}{a}$. Stąd mamy np.: jeśli $a+b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, to $a^5 + b^5 = \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5}$, $a^7 + b^7 = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7}$, ... ⊠

1.11.4. *Jeśli* a, b, c, d *są parami różnymi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\frac{a^4+1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4+1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4+1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4+1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a + b + c + d.$$

([Crux] 2000 s.511 z.2487).

1.11.5. *Znaleźć wszystkie trójki* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *takie, że*

$$x(y+1) = y(z+1) = z(x+1).$$

([MOc] 2000 z.15).

R. $(x,y,z) = (-\frac{t+1}{t}, -\frac{1}{1+t}, t)$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$. Rozwiązanie wygląda niesymetrycznie. Tak jednak nie jest. ⊠

1.11.6. *Liczby* $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $-a_3b_2c_1$, $-a_2b_1c_3$, $-a_1b_3c_2$ *nie mogą być jednocześnie dodatnie.* ([B-zm] 9).

1.11.7. *Istnieją trzy dodatnie liczby rzeczywiste* a, b, c *takie, że*

$$a^2+b^2+c^2 > 2, \quad a^3+b^3+c^3 < 2 \quad \textit{oraz} \quad a^4+b^4+c^4 > 2.$$

Takimi liczbami są na przykład: $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2}{3}$, $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. ([OM] Szwecja 1977).

1.11.8. *Niech* $a < b$ *będą takimi liczbami rzeczywistymi, że odcinek* $[a,b]$ *nie zawiera żadnej liczby całkowitej. Istnieje wtedy liczba naturalna* n *taka, że odcinek* $[na, nb]$ *nie zawiera żadnej liczby całkowitej oraz*

$$|na - nb| \geqslant \frac{1}{6}.$$

(Newman Problem 43).

1.11.9. *Jeśli* A, B *są rozłącznymi podzbiorami odcinka* $[0,1]$ *takimi, że* $[0,1] = A \cup B$, *to nie istnieje żadna liczba rzeczywista* r *taka, że* $B = A + r$, *gdzie* $A + r = \{a + r;\ a \in A\}$. ([Bryn] 2.7).

1.11.10. *Z pary* (a,b) *liczb rzeczywistych można otrzymać jedną z następujących par:* $(a+1, b+2a+1)$, (ab^{-1}, b^{-1}) *jeśli* $b \neq 0$, (sa, s^2b) *dla każdego* $s \neq 0$. *Czy stosując skończoną liczbę razy tę operację można z pary* $(2,3)$ *otrzymać parę* $(44, 1992)$*?* ([Berk] 4c/92).

O. Nie. Niech (x,y) będzie parą otrzymaną z pary (a,b). Wówczas $(x^2-y)(a^2-b) > 0$. ⊠

1.11.11. *Z pary* (a,b) *liczb rzeczywistych można otrzymać parę* $(15a+5b, 5a+15b)$ *lub parę* $(45a+5b, 5a+45b)$. *Czy stosując skończoną liczbę razy tę operację można z pary* $(3,1)$ *otrzymać parę postaci* $(3\cdot 10^n, 10^n)$, *gdzie* $n \in \mathbb{N}$*?* ([Berk] 4c/93).

O. Nie można. Niech (x,y) będzie parą otrzymaną z pary (a,b). Łatwo sprawdzić, że jeśli $a > b > 0$, to $\frac{x}{y} > \frac{a}{b}$. ⊠

1.11.12. *Jeśli liczby* a *i* b *są przestępne, to jedna z liczb* $a+b$, ab *też jest przestępna.* ([Ssm] 1997(1) z.4600).

1.11.13. *Niech* $x_1, \dots, x_n$ *będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi różnymi od* 1 *takimi, że*

$$x_1 = \log_{x_{n-1}}(x_n), \quad x_2 = \log_{x_n}(x_1), \quad x_3 = \log_{x_1}(x_2), \quad \dots, \quad x_n = \log_{x_{n-2}}(x_{n-1}).$$

Wtedy $x_1x_2\cdots x_n = 1$. ([IMO] Longlist 1959-1966).

1.11.14. $\gamma = \lim(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n} - \ln n) = 0{,}5772156649\dots$

1.11.15. $\dfrac{1}{2n+2/5} < 1 + \dfrac{1}{2} + \dots + \dfrac{1}{n} - \log n - \gamma < \dfrac{1}{2n+1/3}$. ([Mon] 99(7)(1992) E3432).

★ J. Browkin, *Twierdzenie o rozszerzaniu pojedyńczym*, [Mat] 5/1973 259.
I. Gerst, *Some series for Euler's constant*, [Mon] 76(3)(1969) 273-275.
I. Gucewicz-Sawicka, *Pojęcie kresu dolnego i kresu górnego zbioru*, [Mat] 1/1979 32-36.
H. Halberstam, *Transcendental numbers*, [MG] 58(406)(1974) 276-284.
E. Hille, *Gelfond's solution of Hilbert's Seventh Problem*, [Mon] 49(10)(1942) 654-661.
J.-M. De Koninck, A. Mercier, *Classification of real numbers*, [K-Me] 99-100, 323-329.
E. Strzelecki, *Algebry nad ciałem liczb rzeczywistych*, [Mat] 2/1964 49-57.

Literatura

[A-P] Asian Pacific Mathematical Olympiad.

[AndG] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2004.

[B-rs] J. Browkin, J. Rempała, S. Straszewicz, *25 lat Olimpiady Matematycznej*, WSiP, Warszawa, 1975.

[B-zm] V. I. Bernik, I. K. Żuk, O. W. Melnikow, *Zbiór Zadań Olimpijskich z Matematyki* (po rosyjsku), Narodnaja Aswieta, Minsk, 1980.

[Bak] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, 1975.

[Bams] Bulletin of the American Mathematical Society, (Bull. Amer. Math. Soc.), czasopismo matematyczne.

[Berk] V. I. Bernik, *Byelorussian Mathematical Olympiads*, 1992-1993, Minsk, 1993.

[BoE] P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities*, Graduate Texts in Mathematics 161, Springer, 1995.

[BoL] W. G. Bołtiański, W. G. Leman, *Zbiór Zadań Moskiewskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, 1965.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[Buch] A. A. Buchsztab, *Teoria Liczb* (po rosyjsku), Moskwa 1960.

[Ch-1] J. Chądzyński, *Wstęp do Analizy Zespolonej*, Wydawnicto Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[Ch-z] J. Chądzyński, *Wstęp do Analizy Zespolonej w Zadaniach*, Wydawnicto Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2009.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[CouR] R. Courant, H. Robbins, *Co to jest Matematyka*, PWN, Warszawa, 1967.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. V. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994.

[G-ns] A. I. Gałoczkin, Ju. W. Nesterenko, A. B. Szydłowski, *Wstęp do Teorii Liczb* (po rosyjsku), Moskwa, 1984.

[GaT] G. A. Galpierin, A. K. Tołpygo, *Moskiewskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), 1935-1985, Moskwa, 1986.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[IrR] K. Ireland, M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer - Verlag New York Inc., New York, 1982.

[JedW] J. Jędrzejewski, W. Wilczyński, *Przestrzenie metryczne w zadaniach*, Wydanie III, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2007.

[K-Me] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problems in Classical Number Theory*, AMS, 2007.

[Kofl] E. Kofler, *Z Dziejów Matematyki*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 1962.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2012.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Leja] F. Leja, *Funkcje Zespolone*, PWN, Warszawa 1967.

[Lion] F. Le Lionnais, *Les nombres remarquables*, Herman, Paris, 1983.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Min] Miniatury Matematyczne, Komitet Organizacyjny Konkursu "Kangur Matematyczny", Zespół Redakcyjny: Z. Bobiński, P. Jarek, P. Nodzyński, A. Świątek, M. Uscki, Toruń, 1996-2012.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2012.

[Mock] Mock Putnam Exam.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-2] A. Nowicki, *Cyfry Liczb Naturalnych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.2, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[N-4] A. Nowicki, *Liczby Pierwsze*, Podróże po Imperium Liczb, cz.4, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N-9] A. Nowicki, *Sześciany, Bikwadraty i Wyższe Potęgi*, Podróże po Imperium Liczb, cz.9, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[N12] A. Nowicki, *Wielomiany*, Podróże po Imperium Liczb, cz.12, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[Nagl] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1964.

[Nava] J. Navarro, *Tajemnica liczby π. Dlaczego niemożliwa jest kwadratura koła?*, RBA Coleccionables S. A., Wydanie polskie, 2012.

[Nord] Nordic Mathematical Competition.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[RaT] H. Rademacher, O. Toeplitz, *O Liczbach i Figurach*, PWN, Warszawa, 1956.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[Ssm] School Science and Mathematics Journal, School Science and Mathematics Association.

[Stet] I. Stewart, *Galois Theory*, Chapman and Hall/CRC, Boca Ration, New York, London, 2004.

[Str72] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom IV, 16-20, 64/65 - 68/69, PZWS, Warszawa, 1972.

[Szn] L. B. Szneperman, *Zbiór Zadań z Algebry i Teorii Liczb* (po rosyjsku), Minsk, 1982.

[Szu87] M. Szurek, *Opowieści Matematyczne*, WSiP, Warszawa, 1987.

[TTss] Tournament of the Towns, Senior, Spring.

[Uiuc] UIUC Undergraduate Math Contest, University of Illinois at Urbana-Champaign.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988.