Podróże po Imperium Liczb

Część 10. Liczby i Funkcje Rzeczywiste

Rozdział 10

10. Pierścień funkcji ciągłych

Andrzej Nowicki 11 grudnia 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

10 Pierścień funkcji ciągłych

Zbiór wszystkich funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ oznaczany jest zwykle przez $C(\mathbb{R})$. Suma funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. W zbiorze $C(\mathbb{R})$ określone jest więc dodawanie. Iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. W zbiorze $C(\mathbb{R})$ określone jest więc również mnożenie. Zbiór $C(\mathbb{R})$, wraz z tymi działaniami, jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Jedynką jest funkcja stała, przyporządkowująca każdej liczbie rzeczywistej liczbę 1. Zerem tego pierścienia jest funkcja stała, przyporządkowująca każdej liczbie rzeczywistej liczbę 0.

Niech I będzie odcinkiem domkniętym $[a, b]$. Oznaczmy przez $C(I)$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych z I do $\mathbb{R}$. W tym zbiorze też można dodawać i mnożyć. Zbiór ten również jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

Zbiór liczb rzeczywistych i odcinki domknięte są szególnymi przykładami przestrzeni metrycznych. Odległość pomiędzy dwoma elementami określona jest tutaj przy pomocy bezwzględnej wartości różnicy tych elementów. Jeśli X jest dowolną przestrzenią metryczną, to również można mówić o funkcjach ciągłych z X do $\mathbb{R}$. Zbiór wszystkich takich funkcji ciągłych oznacza się przez $C(X)$. Jest to również pierścień przemienny z jedynką.

Można jeszcze iść dalej. Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną i oznaczmy przez $C(X)$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych z X do $\mathbb{R}$. Przypomnijmy, że jeśli X, Y są przestrzeniami topologicznymi, to funkcja $f : X \to Y$ jest *ciągła*, jeśli przeciwobraz każdego zbioru otwartego w Y jest zbiorem otwartym w X. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Jeśli X jest dowolną przestrzenią topologiczną, to zbiór $C(X)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

W tym rozdziale zajmować się będziemy algebraicznymi własnościami pierścieni postaci $C(X)$. Powiemy coś o homomorfizmach, dzielnikach zera, ideałach, produktach, itp. W sposób szczególny zajmować się będziemy pierścieniami $C(\mathbb{R})$ i $C([a, b])$.

Większość zamieszczonych tu twierdzeń i faktów pochodzi z pięknej książki L. Gillmana i M. Jerisona [G-J] z 1960 roku.

W tym rozdziale zakładamy, że Czytelnik zna podstawowe pojęcia i fakty o przestrzeniach topologicznych i pierścieniach przemiennych.

10.1 Definicje i początkowe własności

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną, to przez $C(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych z X do $\mathbb{R}$. Zbiór $\mathbb{R}$, liczb rzeczywistych, jest tutaj przestrzenią topologiczną z naturalną euklidesową topologią.

Jeśli f, g są elementami zbioru $C(X)$, czyli jeśli $f, g :\to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, to definiujemy dodawanie $f + g : X \to \mathbb{R}$, odejmowanie $f - g : X \to \mathbb{R}$ i mnożenie $fg : X \to \mathbb{R}$, przyjmując odpowiednio

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad (fg)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

dla wszystkich $x \in \mathbb{X}$.

10.1.1. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeśli f, g są funkcjami należącymi do $C(X)$, to funkcje $f+g$, $f-g$, fg również należą do $C(X)$.*

D. Rozważmy przestrzeń topologiczną $X \times X$ z topologią produktową. Bazą zbiorów otwartych w $X \times X$ jest rodzina zbiorów postaci $U \times V$, gdzie U, V są zbiorami otwartymi w X. Innymi słowy, każdy zbiór otwarty w $X \times X$ jest sumą mnogościową zbiorów postaci $U \times V$, gdzie U, V są zbiorami otwartymi w X.

Niech $\Delta : X \to X \times X$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$\Delta(x) = (x, y), \quad \text{dla } x \in X.$$

Jeśli U i V są podzbiorami przestrzeni X, to $\Delta^{-1}(U \times V) = U \cap V$. Z równości tej wynika, że $\Delta : X \to X \times X$ jest funkcją ciągłą.

Załóżmy teraz, że Y jest drugą przestrzenią topologiczną i $p, q : X \to Y$ są dowolnymi funkcjami. Mamy wtedy funkcję $p \times q : X \times X \to Y \times Y$, $(a, b) \mapsto (p(a), q(b))$. Jeśli U i V są podzbiorami przestrzeni Y, to $(p \times q)^{-1}(U \times V) = p^{-1}(U) \times q^{-1}(V)$. Z tej równości wynika, że jeśli $p, q : X \to Y$ są funkcjami ciągłymi, to $p \times q : X \times X \to Y \times Y$ również jest funkcją ciągłą.

Oznaczmy przez α, β, γ funkcje z $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ określone odpowiednio równościami

$$\alpha(a, b) = a + b, \quad \beta(a, b) = a - b, \quad \gamma(a, b) = ab,$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$. Jest oczywiste, że są to funkcje ciągłe.

Niech teraz $f, g \in C(X)$. Mamy wówczas:

$$f + g = \alpha \circ (f \times g) \circ \Delta, \quad f - g = \beta \circ (f \times g) \circ \Delta, \quad fg = \gamma \circ (f \times g) \circ \Delta.$$

Każda więc z funkcji $f+g$, $f-g$, fg jest złożeniem funkcji ciągłych. Są to więc funkcje ciągłe. ⊠

Załóżmy w dalszym ciągu, że X jest przestrzenią topologiczną. Dla każdej liczby rzeczywistej a oznaczmy przez t_a funkcję stałą z X do $\mathbb{R}$, przyporządkowującą każdemu elementowi $x \in X$ liczbę a. Jeśli U jest podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$, to

$$t_a^{-1}(U) = \begin{cases} X, & \text{gdy } a \in U, \\ \emptyset, & \text{gdy } a \notin U. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy:

10.1.2. *Każda funkcja postaci t_a, gdzie $a \in \mathbb{R}$, jest funkcją ciągłą, tzn. jest elementem zbioru $C(X)$.*

Łatwo teraz wykazać następujące dwa stwierdzenia.

10.1.3. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Zbiór $C(X)$, wszystkich funkcji ciągłych z X do $\mathbb{R}$, jest pierścieniem przemiennym z jedynką. Zerem tego pierścienia jest funkcja t_0. Jedynką jest funkcja t_1. Funkcją przeciwną do funkcji $f \in C(X)$ jest funkcja $-f = t_{-1}f$.*

10.1.4. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Określamy mnożenie $\mathbb{R} \times C(X) \to C(X)$, przyjmując*

$$rf = t_r f,$$

dla $r \in \mathbb{R}$, $f \in C(X)$. Pierścień $C(X)$, wraz z tym mnożeniem, jest $\mathbb{R}$-algebrą.

10.1.5. *Jeśli $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ jest skończoną przestrzenią dyskretną, to pierścień $C(X)$ jest izomorficzny z produktem*

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$$

(n razy ciało liczb rzeczywistych).

Często zakładać będziemy, że X jest przestrzenią Tichonowa. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *Hausdorffa* (lub że jest T_2-*przestrzenią*), jeśli dla każdych dwóch różnych elementów $a, b \in X$ istnieją zbiory otwarte U i V takie, że $a \in U$, $b \in V$ oraz $U \cap V = \emptyset$. Mówimy, że przestrzeń topologiczna X jest *Tichonowa* (lub że jest $T_{3\frac{1}{2}}$-*przestrzenią*), jeśli jest przestrzenią Hausdorffa i spełnia następujący warunek. Dla każdego elementu $a \in X$ i dla każdego zbioru domkniętego D takiego, że $a \notin D$, istnieje funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że $f(a) = 1$ oraz $f(d) = 0$ dla wszystkich $d \in D$.

Przestrzenie Tichonowa nazywa się często przestrzeniami *całkowicie regularnymi* ([G-J], [Dud1]). Podstawowe własności i fakty o przestrzeniach Tichonowa znajdziemy w każdej książce z topologii ogólnej; patrz na przykład: [Eng], [Eng1], [Dud1], [EnS]. Zanotujmy jedynie to, że każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią Tichonowa. Każda przestrzeń zwarta jest przestrzenią Tichonowa.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2 Elementy odwracalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.2.1. *Niech X będzie przestrzenią topologiczną i niech $f \in C(X)$. Funkcja f jest odwracalna w pierścieniu $C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in X$.*

D. Jeśli funkcja f jest odwracalna w $C(X)$, to istnieje $g \in C(X)$ takie, że $fg = t_1$, Wtedy $f(x)g(x) = 1$ dla wszystkich $x \in X$. W szczególności wtedy $f(x) \neq 0$ dla $x \in X$.

Załóżmy, że $f(x) \neq 0$ dla $x \in X$. Definiujemy funkcję $g : X \to \mathbb{R}$, przyjmując

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{dla } x \in X.$$

Funkcja ta jest ciągła, gdyż jest złożeniem danej funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ i funkcji ciągłej z $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ do $\mathbb{R}$, $r \mapsto \frac{1}{r}$. Oczywiście $fg = t_1$, czyli f jest elementem odwracalnym w pierścieniu $C(X)$. ⊠

Jeśli a jest niezrową liczbą rzeczywistą, to funkcja stała $t_a : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a$, jest oczywście odwracalna w $C(X)$. Jej funkcją odwrotną jest funkcja stała $t_{a^{-1}}$. W pierścieniu $C(\mathbb{R})$ istnieją niestałe funkcje odwracalne. Taką funkcją jest, na przykład, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Jej odwrotnością w $C(\mathbb{R})$ jest funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Podobne przykłady mamy w każdym pierścieniu postaci $C([a, b])$. Tak jest zawsze dla nietrywialnej przestrzeni Tichonowa.

10.2.2. *Jeśli X jest przestrzenią Tichonowa zawierającą co najmniej dwa punkty, to w pierścieniu $C(X)$ istnieje niestała funkcja odwracalna.* ([G-J] 48).

D. Niech $a, b \in X$, $a \neq b$. Ponieważ przestrzeń X jest Hausdorffa, więc istnieją zbiory otwarte U, V takie, że $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Niech $A = X \smallsetminus U$, $B = X \smallsetminus V$. Wtedy A i B są zbiorami domkniętymi, $X = A \cup B$ oraz $a \notin A$, $b \in A$, $b \notin B$, $a \in B$. X jest przestrzenią Tichonowa. Istnieją więc funkcje ciągłe $f, g : X \to \mathbb{R}$ takie, że $f(a) = 1$, $g(b) = 1$, $f(x) = 0$ dla $x \in A$, $g(y) = 0$ dla $y \in B$. W szczególności $f(b) = 0$, $g(a) = 0$. Niech $h = f^2 + 2g^2 + 1$. Wtedy $h(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in X$, zatem h jest funkcją odwracalną w $C(X)$. Ponadto, $h(a) = 2$, $h(b) = 3$. Funkcja ta nie jest więc funkcją stałą. ⊠

10.2.3. *Niech $J = [-1, 1]$. Niech*

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}, \\ 0, & \text{dla } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

i niech $g(x) = |f(x)|$. Wtedy $f, g \in C(J)$, f dzieli g, g dzieli f i nie istnieje żadne odwracalne $u \in C(J)$ takie, że $g = uf$. ([Isaa] 252 z.16.9).

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.3 Dzielniki zera

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech

$$f(x) = \max(x, 0) = \frac{x + |x|}{2}, \quad g(x) = \min(x, 0) = \frac{x - |x|}{2}.$$

Są to dwie niezerowe funkcje ciągłe należące do pierścienia $C(\mathbb{R})$ i ich iloczyn jest funkcją zerową. W pierścieniu $C(\mathbb{R})$ istnieją więc niezerowe dzielniki zera.

10.3.1. *Jeśli X jest przestrzenią Tichonowa zawierającą co najmniej dwa punkty, to w pierścieniu $C(X)$ istnieją niezerowe dzielniki zera.* ([G-J] 48).

D. Niech $a, b \in X$, $a \neq b$. Ponieważ przestrzeń X jest Hausdorffa, więc istnieją zbiory otwarte U, V takie, że $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Niech $A = X \smallsetminus U$, $B = X \smallsetminus V$. Wtedy A i B są zbiorami domkniętymi, $X = A \cup B$ oraz $a \notin A$, $b \notin B$. X jest przestrzenią Tichonowa. Istnieją więc funkcje ciągłe $f, g : X \to \mathbb{R}$ takie, że $f(a) = 1$, $f(x) = 0$ dla $x \in A$, $g(b) = 1$, $g(y) = 0$ dla $y \in B$. Są to niezerowe funkcje należące do pierścienia $C(X)$ i ich iloczyn jest funkcją zerową. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.4 Idempotenty i przestrzenie spójne

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli A jest dowolnym pierścieniem z jedynką, to każdy element $e \in A$ spełniający równość $e^2 = e$ nazywa się *idempotentem*. Ponieważ $0^2 = 0$ i $1^2 = 1$, więc elementy 0 i 1 są idempotentami w każdym pierścieniu. Mówimy, że idempotent e jest nietrywialny jeśli $e \neq 0$ i $e \neq 1$.

10.4.1. *Przestrzeń topologiczna X jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień $C(X)$ nie ma nietrywialnych idempotentów.* ([G-J] 21).

D. Załóżmy, że $X = A \cup B$, gdzie A, B są niepustymi zbiorami domkniętymi takimi, że $A \cap B = \emptyset$. Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A, \\ 0, & \text{gdy } x \in B. \end{cases}$$

Funkcja ta jest nietrywialnym idempotentem w pierścieniu $C(X)$.

Załóżmy teraz, że istnieje funkcja ciągła $g : X \to \mathbb{R}$, będąca nietrywialnym idempotentem w pierścieniu $C(X)$. Wtedy dla każdego $x \in X$ mamy równość $g(x)^2 = g(x)$, czyli $g(x)(g(x) - 1) = 0$. Zatem jeśli $x \in X$, to $g(x) = 0$ lub $g(x) = 1$. Oznaczmy:

$$A = \{x \in X;\ g(x) = 1\}, \quad B = \{x \in X;\ g(x) = 0\}.$$

A i B są domkniętymi podzbiorami przestrzeni X takimi, że $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Ponieważ idempotent g jest nietrywialny, więc $g \neq 0$ oraz $g \neq 1$ i stąd wynika, że zbiory A, B są niepuste. Jeśli więc istnieje w $C(X)$ nietrywialny idempotent, to przestrzeń X nie jest spójna. ⊠

Jeśli X jest podzbiorem zbioru $\mathbb{R}$, liczb rzeczywistych, to X traktujemy jako przestrzeń topologiczną z topologią indukowaną z euklidesowej topologii na $\mathbb{R}$. Każdy zbiór domknięty w X jest postaci $D \cap X$, gdzie D jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{R}$. W szczególności, topologia na zbiorze $\mathbb{N}$, liczb naturalnych, jest dyskretna. Każdy podzbiór zbioru $\mathbb{N}$ jest domknięty w $\mathbb{N}$. Pierścień $C(\mathbb{N})$ jest więc pierścieniem wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych.

10.4.2. ([G-J] 21).

(1) *Pierścienie $C(\mathbb{N})$ i $C(\mathbb{N}) \times C(\mathbb{N})$ są izomorficzne.*

(2) *Każdy niezerowy idempotent w $C(\mathbb{Q})$ jest sumą dwóch niezerowych idempotentów.*

(3) *Pierścienie $C(\mathbb{Q})$ i $C(\mathbb{Q}) \times C(\mathbb{Q})$ są izomorficzne.*

(4) *Pierścień $C(\mathbb{R})$ jest izomorficzny z pewnym swoim właściwym podpierścieniem.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.5 Zbiory zer

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli funkcja f jest elementem pierścienia $C(X)$, to to przez $z(f)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich zer funkcji f, tzn.

$$z(f) = \{x \in X;\ f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Zbiór ten jest domkniętym podzbiorem przestrzeni X. Ze stwierdzenia 10.2.1 wynika, że funkcja $f \in C(X)$ jest odwracalna w pierścieniu $C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z(f) = \emptyset$. Łatwo wykazać następujęce równości.

10.5.1. *Niech $f, g \in C(X)$. Wtedy:*

(1) $z(fg) = z(f) \cup z(g)$,

(2) $z(f^2 + g^2) = z(|f| + |g|) = z(f) \cap z(g)$.

10.5.2. *Niech $f \in C(X)$. Wtedy:*

(1) $\{x \in X; f(x) \geqslant 0\} = z(f - |f|)$,

(2) $\{x \in X; f(x) \leqslant 0\} = z(f + |f|)$. ([G-J] 15).

10.5.3. ([G-J]). *Załóżmy, że I jest ideałem w pierścieniu $C(X)$ różnym od $C(X)$. Zachodzą wtedy następujące własności.*

(1) *Jeśli $f, g \in I$, to $z(f) \cap z(g) \neq \emptyset$.*

(2) *Niech $f \in I$, $g \in C(X)$. Jeśli $z(f) \subseteq z(g)$, to istnieje $h \in I$ takie, że $z(g) = z(h)$.*

D. (1). Niech $f, g \in I$. Wtedy $f^2 + g^2 \in I$. Ponieważ $I \neq C(X)$, więc ideał I nie zawiera żadnego elementu odwracalnego w $C(X)$. Z 10.2.1 wynika więc, że zbiór $z(f^2 + g^2)$ jest niepusty. Mamy więc: $z(f) \cap z(g) = z(f^2 + g^2) \neq \emptyset$.

(2). Niech $f \in I$, $g \in C(X)$, $z(f) \subseteq z(g)$. Niech $h = gf$. Wtedy $h \in I$ oraz $z(h) = z(gf) = z(g) \cup z(f) = z(g)$. ⊠

10.5.4. ([G-J]). *Niech M będzie ideałem maksymalnym pierścienia $C(X)$. Niech $f \in M$, $g \in C(X)$. Jeśli $z(f) \subseteq z(g)$, to $g \in M$.*

D. (Marek Golasiński). Przypuśćmy, że $g \notin M$. Wtedy ideał $M + C(X)g$ jest całym pierścieniem $C(X)$. Istnieją elementy $m \in M$ oraz $h \in C(X)$ takie, że

$$1 = m + hg.$$

Zbiór $z(m) \cap z(g)$ jest oczywiście pusty. Z 10.5.3 wiemy, że $z(m) \cap z(f) \neq \emptyset$. Mamy więc sprzeczność: $\emptyset \neq z(m) \cap z(f) \subseteq z(m) \cap z(g) = \emptyset$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.6 z-Ideały

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówić będziemy, że ideał I pierścienia $C(X)$ jest *z-ideałem* ([G-J] 27), jeśli z każdej równości postaci $z(f) = z(g)$, gdzie $f \in I$, $g \in C(X)$, wynika, że $g \in I$. Z faktów 10.5.3 i 10.5.4 otrzymujemy:

10.6.1. *Każdy ideał maksymalny pierścienia $C(X)$ jest z-ideałem.* ([G-J] 27).

Następny fakt jest oczywisty.

10.6.2. *Przekrój dowolnej rodziny z-ideałów pierścienia $C(X)$ jest z-ideałem. W szczególności, przekrój dowolnej rodziny ideałów maksymalnych pierścienia $C(X)$ jest z-ideałem.*

10.6.3. *Każdy z-ideał pierścienia $C(X)$, różny od $C(X)$, jest przekrojem ideałów pierwszych.* ([G-J] 27).

D. Niech $I \neq C(X)$ będzie z-ideałem. Niech $f \in C(X)$ będzie takim elementem, że $f^n \in I$ dla pewnej liczby naturalnej n. Wtedy $z(f^n) = z(f)$ i $f^n \in I$. Stąd wynika, że $f \in I$ (ponieważ I jest z-ideałem). To oznacza, że ideał I jest radykalny, jest więc przekrojem ideałów pierwszych. ⊠

Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to przez f^+ i f^- oznaczamy funkcje z X do $\mathbb{R}$ określone równościami

$$f^+ = \max(f, 0) = \frac{f + |f|}{2}, \quad f^- = \max(-f, 0) = \frac{|f| - f}{2}.$$

Są to nieujemne funkcje funkcje ciągłe. Zachodzi równość $f = f^+ - f^-$.

10.6.4. ([G-J]). *Niech I będzie z-ideałem pierścienia $C(X)$, różnym od $C(X)$. Niech $f, g \in C(X)$. Zachodzą wtedy następujące własności.*

(1) *Jeśli $f \in I$ i $z(f) \subseteq z(g)$, to $g \in I$.*

(2) *Jeśli $f^2 + g^2 \in I$, to $f, g \in I$.*

(3) *Jeśli $f \in I$, to $f^+, f^- \in I$.*

(4) *Jeśli $f \in I$, to $\sqrt[3]{f} \in I$.*

D. (1). Niech $f \in I$ i niech $z(f) \subseteq z(g)$. Istnieje wtedy $h \in I$ takie, że $z(g) = z(h)$ (patrz 10.5.3). Ale I jest z-ideałem, więc $g \in I$.

(2). $z(f^2 + g^2) = z(f) \cap z(g) \subseteq z(f), z(g)$. Z (1) wynika, że $f, g \in I$.

(3). $z(f) \subseteq z(f^+), z(f^-)$. Z (1) wynika, że $f^+, f^- \in I$.

(4). $z(f) = z\left(\sqrt[3]{f}\right)$. Z (1) wynika, że $\sqrt[3]{f} \in I$. ⊠

10.6.5. ([G-J] 31). *Jeśli I, J są z-ideałami pierścienia $C(X)$, to $IJ = I \cap J$. W szczególności, jeśli I jest z-ideałem, to $I^2 = I$.*

D. Sposób I (Marek Golasiński 2004). Niech $f \in I \cap J$. Wtedy (patrz 10.6.4) $f^+, f^- \in I \cap J$. Ponieważ $z(f^+) = z\left(\sqrt{f^+}\right)$ oraz $z(f^-) = z\left(\sqrt{f^-}\right)$. więc $\sqrt{f^+}, \sqrt{f^-} \in I \cap J$. Mamy więc $f = f^+ - f^- = \sqrt{f^+}\sqrt{f^+} - \sqrt{f^-}\sqrt{f^-} \in IJ$. Zatem $I \cap J \subseteq IJ$. Inkluzja w przeciwną stronę zachodzi zawsze.

Sposób II. Niech $f \in I \cap J$. Wtedy (patrz 10.6.4) $\sqrt[3]{f} \in I \cap J$. Mamy więc $f = \sqrt[3]{f} \cdot \left(\sqrt[3]{f}\right)^2 \in IJ$. Zatem $I \cap J \subseteq IJ$. Inkluzja w przeciwną stronę zachodzi zawsze. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.7 Ideały maksymalne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. W tym podrozdziale zajmować się będziemy ideałami maksymalnymi pierścienia $C(X)$. Wiemy już (patrz 10.6.1), że każdy ideał maksymalny pierścienia $C(X)$ jest z-ideałem.

Niech $a \in X$. Rozpatrzmy zbiór

$$M_a = \Big\{ f \in C(X);\ f(a) = 0 \Big\} = \Big\{ f \in C(X);\ a \in z(f) \Big\}.$$

10.7.1. *Zbiór M_a jest ideałem maksymalnym pierścienia $C(X)$.*

D. Jest jasne, że M_a jest ideałem w $C(X)$, różnym od $C(X)$. Niech I będzie ideałem w $C(X)$ zawierającym ideał M_a i różnym od M_a. Pokażemy, że $I = C(X)$. Niech $f \in I \smallsetminus M_a$. Wtedy $f(a) \neq 0$. Oznaczmy: $r = f(a) \neq 0$ i niech $h = f - t_r$. Przypomnijmy, że $t_r : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją stałą $x \mapsto r$. Wtedy $h \in M_a$, więc $h \in I$ i stąd wynika, że funkcja stała t_r należy do ideału I. Funkcja t_r jest odwracalna w $C(X)$. Zatem $I = C(X)$. ⊠

10.7.2. *Pierścień ilorazowy $C(X)/M_a$ jest izomorficzny z ciałem $\mathbb{R}$.*

D. Odwzorowanie $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$, jest surjekcją pieścieni i jego jądrem jest ideał M_a. Zatem $\mathbb{R} \approx C(X)/M_a$. ⊠

10.7.3. *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest zwarta, to każdy ideał maksymalny w $C(X)$ jest postaci M_a, gdzie $a \in X$.* ([G-J] 57, [Eng1] 294, [Dud1] 265, [ArcP] 165).

D. Przypuśćmy, że istnieje w $C(X)$ taki ideał maksymalny, który nie jest postaci M_a, $a \in X$. Wtedy $M_a \not\subset M$ dla wszystkich $a \in X$. Dla każdego więc punktu $a \in X$, istnieje funkcja f_a należąca do M taka, że $f_a(a) \neq 0$. Przy pomocy funkcji f_a definiujemy funkcję $g_a : X \to \mathbb{R}$, przyjmując:

$$g_a(x) = \frac{f_a(x)^2}{f_a(a)^2},$$

dla $x \in X$. Każda funkcja g_a należy do $C(X)$ oraz $g_a(a) = 1$ i $g_a(x) \geqslant 0$ dla $x \in X$. Dla każdego $a \in X$ oznaczmy przez U_a przeciwobraz $g_a^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Jest to zbiór otwarty w X zawierający punkt a. Mamy zatem

$$X = \bigcup_{a \in X} U_a.$$

Przestrzeń X jest zwarta. Istnieją więc punkty $a_1, \dots, a_n \in X$ takie, że

$$X = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n}.$$

Rozpatrzmy funkcję $g = g_{a_1} + \cdots + g_{a_n}$. Jest to funkcja należąca do M i $g(x) > \frac{1}{2}$ dla wszystkich $x \in X$. Z 10.2.1 wynika, że funkcja g jest odwracalna w pierścieniu $C(X)$. Zatem $M = C(X)$, wbrew temu, że M jest ideałem maksymalnym w $C(X)$. ⊠

W powyższym dowodzie nie wykorzystaliśmy założenia, że X jest przestrzenią Hausdorffa. Mamy zatem:

10.7.4. *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest quasi-zwarta, to każdy ideał maksymalny w $C(X)$ jest postaci M_a, gdzie $a \in X$.*

Można udowodnić:

10.7.5. *Jeśli X jest przestrzenią toplogiczną Tichonowa, to X jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ideał maksymalny pierścienia $C(X)$ jest postaci M_a, gdzie $a \in X$.* ([G-J] 58, [Eng1] 294).

10.7.6. *Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną i niech $Y \subseteq X$ będzie dowolnym podzbiorem. Element x przestrzeni X należy do domknięcia zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigcap\limits_{y \in Y} M_y \subseteq M_x$.* ([ArcP] 165).

D. Oznaczmy $A = \bigcap_{y \in Y} M_y$.

Niech $x \in \overline{Y}$ i niech $f \in A$. Wtedy $f(y) = 0$ dla wszystkich $y \in Y$. Zatem $Y \subseteq f^{-1}(0)$. Ponieważ zbór $f^{-1}(0)$ jest domknięty w X, więc $\overline{Y} \subseteq f^{-1}(0)$. Stąd $x \in f^{-1}(0)$, czyli $f \in M_x$.

Załóżmy teraz, że $A \subseteq M_x$ i przypuśćmy, że $x \notin \overline{Y}$. Każda przestrzeń zwarta jest przestrzenią Tichonowa. Istnieje zatem funkcja ciągła $f : X \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) = 1$ oraz $f(y) = 0$ dla wszystkich $y \in \overline{Y}$. Wtedy $f \in A \subseteq M_x$ i mamy sprzeczność: $1 = f(x) = 0$. ⊠

Z powyższych faktów wynika, że każdy ideał maksymalny pierścienia $C([a, b])$ jest postaci M_c, gdzie $c \in [a, b]$. W pierścieniu $C(\mathbb{R})$ istnieje natomiast taki ideał maksymalny, który nie jest postaci M_a, $a \in \mathbb{R}$. Podobnie jest w pierścieniu $C(\mathbb{N})$. To, że w tym pierścieniu taki ideał maksymalny musi istnieć można udowodnić nie korzystając z powyższych faktów.

10.7.7. *W pierścieniu $C(\mathbb{N})$ istnieje taki ideał maksymalny, który nie jest postaci M_a, $a \in \mathbb{N}$.*

D. Topologia na zbiorze $\mathbb{N}$ jest dyskretna. Każda więc funkcja z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ jest ciągła. Niech A będzie zbiorem tych wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$, które zerują się dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zbiór ten jest ideałem w $C(\mathbb{N})$, różnym od $C(\mathbb{N})$. Istnieje więc ideał maksymalny M zawierający A. Przypuśćmy, że $M = M_a$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$. Wtedy funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(a) = 1$ i $f(n) = 0$ dla $n \neq a$, należy do M i nie należy do M_a. ⊠

★ I. M. Gelfand, A. N. Kołmogorow, *O pierścieniach funkcji ciągłych na przestrzeniach topologicznych* (po rosyjsku), DAH ZSSR 22(1939) 11-15.

E. Hewitt, *Rings of real-valued contin. functions, I*, [Tams] 64(1948) 45-99.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.8 Ideały pierwsze

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.8.1. ([G-J]) 30. *Jeśli P, Q są ideałami pierwszymi pierścienia $C(X)$, to $PQ = P \cap Q$. W szczególności, jeśli P jest ideałem pierwszym, to $P^2 = P$.*

D. Niech $f \in P \cap Q$. Funkcja $g = \sqrt[3]{f}$ należy oczywiście do $C(X)$. Ponieważ $g^3 = f \in P \cap Q$, więc $g \in P \cap J$. Zatem $f = g \cdot g^2 \in PQ$. Mamy więc inkluzję $P \cap Q \subseteq PQ$. Inkluzja w przeciwną stronę zachodzi zawsze. ⊠

10.8.2. *Niech I będzie z-ideałem w $C(X)$ różnym od $C(X)$. Jeśli istnieje ideał pierwszy zawarty w I, to I jest ideałem pierwszym.* ([G-J] 28).

D. Niech $g, h \in C(X)$, $gh \in I$. Pokażemy, że $g \in I$ lub $h \in I$. Oznaczmy:

$$f = |g| - |h|, \quad f_1 = \max(f, 0), \quad f_2 = \min(f, 0)$$

i niech P będzie ideałem pierwszym zawartym w I. Funkcje f, f_1, f_2 oczywiśćie należą do $C(X)$ i zachodzi równość $f_1 \cdot f_2 = 0$. Iloczyn $f_1 f_2$ należy więc do ideału pierwszego P. Zatem $f_1 \in P$ lub $f_2 \in P$, czyli $f_1 \in I$ lub $f_2 \in I$.

Załóżmy, że $f_1 \in I$. Jeśli $x \in z(f_1)$, to

$$0 = f_1(x) = \max(f(x), 0)$$

i wtedy $f(x) \leqslant 0$. Dla każdego więc punktu x, należącego do zbioru $z(f_1)$, zachodzi nierówność $|g(x)| \leqslant |h(x)|$. Stąd wynika, że

$$z(f_1) \cap z(h) \subseteq z(g).$$

To z kolei implikuje, że $z(f_1) \cap z(gh) = z(f_1) \cap (z(g) \cup z(h)) = (z(f_1) \cap z(g)) \cup (z(f_1) \cap z(h)) \subseteq z(g)$. Niech $u = f_1^2 + (gh)^2$. Wtedy $u \in I$ oraz $z(u) = z(f_1) \cap z(gh)$. Zatem, $z(u) \subseteq z(g)$ i $u \in I$. Ponieważ I jest z-ideałem, więc stąd wynika, że $g \in I$. Analogicznie postępujemy w przypadku, gdy $f_2 \in I$. Otrzymujemy wtedy, że $h \in I$. ⊠

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący interesujący wniosek.

10.8.3. *Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Każdy ideał pierwszy pierścienia $C(X)$ zawarty jest w dokładnie jednym ideale maksymalnym.* ([G-J] 29).

D. Przypuśćmy, że ideał pierwszy P zawarty jest w dwóch różnych ideałach maksymalnych M_1 i M_2. Mamy wtedy z-ideał $M_1 \cap M_2$ zawierający ideał pierwszy P. Z twierdzenia 10.8.2 wynika więc, że $M_1 \cap M_2$ jest ideałem pierwszym. To jest jednak niemożliwe. W kadym pierścieniu przemiennym, jeśli I, J są takimi ideałami, że $I \not\subseteq J$ i $J \not\subseteq I$, to $I \cap J$ nie jest ideałem pierwszym. (Niech $a \in I \smallsetminus J$, $b \in J \smallsetminus I$. Wtedy $ab \in I \cap J$, $a \notin I \cap J$ oraz $b \notin I \cap J$). ⊠

Można udowodnić:

10.8.4. *Niech X będzie przestrzenią Tichonowa i niech P będzie ideałem pierwszym w pierścieniu $C(X)$. Niech $f, g \in C(X)$ będą takimi funkcjami, że $|f| \leqslant |g|$. Jeśli $g \in P$, to $f \in P$.* ([G-J] 69).

10.8.5. *Niech X będzie przestrzenią Tichonowa i niech P będzie ideałem pierwszym w pierścieniu $C(X)$. Niech $f, g \in C(X)$. Jeśli $f^2 + g^2 \in P$, to $f, g \in P$.* ([G-J] 69).

D. Wynika to z nierówności $|f|, |g| \leqslant f^2 + g^2$ i faktu 10.8.4. ⊠

10.8.6. *Niech $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ będzie skończoną przestrzenią topologiczną. Jedynymi ideałami pierwszymi w $C(X)$ są ideały maksymalne $M_{x_1}, \dots, M_{x_n}$.*

D. Przypuśćmy, że istnieje ideał pierwszy P różny od każdego z ideałów $M_{x_1}, \dots, M_{x_n}$. Wtedy dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieje $f_i \in M_{x_1} \smallsetminus P$. Zauważmy, że $f_1 f_2 \cdots f_n = 0$. Zatem $f_1 f_2 \cdots f_n \in P$, a więc $f_i \in P$ dla pewnego i; sprzeczność. ⊠

10.8.7. ([G-J] 62). *Niech X będzie przestrzenią Tichonowa zawierającą co najmniej dwa punkty i niech $p \in X$. Niech*

$$\mathcal{O}_p = \Big\{ f \in C(X);\ \text{istnieje zbiór otwarty } U \text{ taki, że } \ p \in U \ \text{ i } \ f(U) = 0 \Big\}.$$

Zbiór $\mathcal{O}_p$ jest ideałem w $C(X)$ zawartym w ideale maksymalnym M_p. Ideał ten posiada następujące własności.

(1) $\mathcal{O}_p \neq 0$.

(2) *$\mathcal{O}_p$ jest z-ideałem. W szczególności, jest przekrojem ideałów pierwszych.*

(3) *Jeśli $\mathcal{O}_p \subseteq M_q$, gdzie $q \in X$, to $p = q$.*

(4) *Jeśli P jest ideałem pierwszym zawartym w M_p, to $\mathcal{O}_p \subseteq P$.*

(5) *Jeśli $\mathcal{O}_p \neq M_p$, to w pierścieniu $C(X)$ istnieje taki ideał pierwszy, który zawiera $\mathcal{O}_p$ i który nie jest postaci M_a, gdzie $a \in X$.*

D. Niech $q \in X$, $q \neq p$. Niech U, V będą zbiorami otwartymi takimi, że $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Oznaczmy:

$$A = X \smallsetminus U, \quad B = X \smallsetminus V.$$

Zbiory A, B są domknięte oraz $p \notin A$, $q \notin B$, $V \subseteq A$, $U \subseteq B$. Przestrzeń X jest Tichonowa. Istnieje zatem funkcje ciągłe $f, g : X \to \mathbb{R}$ takie, że $f(A) = 0$, $f(p) = 1$, $g(B) = 0$, $g(q) = 1$.

(1). $\mathcal{O}_{\surd} \neq 0$ gdyż $0 \neq g \in \mathcal{O}_p$.

(2). Niech $z(\alpha) = z(\beta)$, $\alpha \in \mathcal{O}_p$. Pokażemy, że $\beta \in \mathcal{O}_p$. Istnieje zbiór otwarty W taki, że $\alpha(W) = 0$, $p \in W$. Wtedy $W \subseteq z(\alpha) = z(\beta)$, więc $\beta(W) = 0$ i stąd $\beta \in \mathcal{O}_p$. Zatem $\mathcal{O}_p$ jest z-ideałem. Dalsza część tezy wynika z 10.6.3.

(3). Przypuśćmy, że $p \neq q$ i niech U, V, g będą takie jak na początku tego dowodu. Wtedy $g \in \mathcal{O}_p \subseteq M_q$ i mamy sprzeczność: $1 = g(q) = 0$.

(4). Niech $h \in \mathcal{O}_p$. Niech W będzie zbiorem otwartym zawierającym p takim, że $h(W) = 0$. Istnieje funkcja ciągła $k : X \to \mathbb{R}$ taka, że $k(X \smallsetminus W) = 0$ i $k(p) = 1$. Wtedy $h \cdot k = 0 \in P$, $k \notin P$, więc $h \in P$. Zatem $\mathcal{O}_p \subseteq P$.

(5). Niech $\{P_i\}$ będzie rodziną ideałów pierwszych, których przekrój jest równy $\mathcal{O}_p$. Z (2) wynika, że taka rodzina istnieje. Przypuśćmy, że każdy ideał P_i jest postaci M_{q_i}, gdzie $q_i \in X$. Wtedy $\mathcal{O}_p \subseteq M_{q_i}$, więc (na mocy (3)) $q_i = p$. Zatem wtedy każdy ideał P_i jest równy M_p i mamy sprzeczność: $\mathcal{O}_p = \bigcap P_i = M_p$. ⊠

10.8.8. *W każdym z pierścieni*

$$C(\mathbb{R}), \quad C([a, b]), \quad C(a, b),$$

gdzie $a < b$ są liczbami rzeczywistymi, istnieją ideały pierwsze, które nie są postaci M_p, gdzie $p \in X$.

D. Wynika to z 10.8.7(5). W każdym bowiem przypadku ideał postaci $\mathcal{O}_p$ jest różny od M_p. ⊠

U. Trudno jest wskazać chociaż jeden niemaksymalny ideał pierwszy pierścienia $C([a, b])$. Wykazaliśmy, że taki ideał istnieje. Można nawet udowodnić, że w tym pierścieniu istnieją wstępujące rodziny, mocy continuum, składające się z samych ideałów pierwszych. ⊠

★ S. Balcerzyk, *Ideały w pierścieniu* $C([0, 1]$, odczyty na Seminarium Algebraicznym, UMK, Toruń, 1977, 1979.

C. W. Kohls, *Primary ideals in rings of continuous functions*, [Mon] 71(9)(1964) 980-984.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

10.9 Homomorfizmy pierścieni funkcji ciągłych

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zanotujmy następujący znany fakt.

10.9.1. *Jedynym homomorfizmem pierścieniowym z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jest tożsamość.*

D. Niech $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie homomorfizmem pierścieni. Wtedy $\sigma(1) = 1$ i stąd $\sigma(u) = u$ dla każdej liczby wymiernej u. Jeśli a jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to $a = b^2$, gdzie $b \in \mathbb{R}$ i wtedy $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2 \geqslant 0$. Stąd w szczególności wynika, że jeśli a, b są liczbami rzeczywistymi takimi, że $a \leqslant b$, to $\sigma(a) \leqslant \sigma(b)$.

Niech r będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Istnieją wtedy dwa ciągi (u_n) i (v_n) o wyrazach wymiernych takie, że $u_n \leqslant r \leqslant v_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = r$. Mamy wtedy $u_n = \sigma(u_n) \leqslant \sigma(r) \leqslant \sigma(v_n) = v_n$ i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $\sigma(r) = r$. ⊠

10.9.2. *Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Każdy pierścieniowy homomorfizm z $C(X)$ do $C(Y)$ jest $\mathbb{R}$-homomorfizmem, tzn. jeśli $F : C(X) \to C(Y)$ jest homomorfizmem pierścieni, to*

$$F(rf) = rF(f),$$

dla wszystkich $f \in C(X)$, $r \in \mathbb{R}$. ([G-J] 23).

D. Niech $F : C(X) \to C(Y)$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $y \in Y$. Rozpatrzmy odwzorowanie $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oreślone wzorem

$$\sigma(r) = F(t_r^X)(y),$$

dla $r \in \mathbb{R}$. Odwzorowanie to jest homomorfizmem pierścieni. Z 10.9.1 wynika więc, że $F(t_r^X)(y) = r$ dla wszystkich $y \in Y$, $r \in \mathbb{R}$. Zatem $F(t_r^X) = t_r^Y$. Niech teraz $f \in C(X)$, $r \in \mathbb{R}$. Wtedy $F(rf) = F(t_r^X f) = F(t_r^X)F(f) = t_r^Y F(f) = rF(f)$. ⊠

10.9.3. *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $\varphi : Y \to X$ będzie funkcją ciągłą. Oznaczmy przez $C(\varphi)$ odwzorowanie z $C(X)$ do $C(Y)$ określone wzorem*

$$C(\varphi)(f) = f \circ \varphi,$$

dla $f \in C(X)$. Odwzorowanie to jest homomorfizmem pierścieni.

Stąd łatwo wynika:

10.9.4. *Jeśli przestrzenie topologiczne X i Y są homeomorficzne, to pierścienie $C(X)$ i $C(Y)$ są izomorficzne.*

Można udowodnić:

10.9.5. *Załóżmy, że X i Y są zwartymi przestrzeniami topologicznymi. Przestrzenie te są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy pierścienie $C(X)$ i $C(Y)$ są izomorficzne.*
([G-J] 57, [Eng1] 294, [ArcP] 165).

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną i niech $a \in X$. Oznaczmy przez φ_a odwzorowanie z $C(X)$ do $\mathbb{R}$ określone wzorem

$$\varphi_a(f) = f(a),$$

dla $f \in C(X)$. Jest oczywiste, że:

10.9.6. *Odwzorowanie $\varphi_a : C(X) \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem pierścieni.*

Mówi się ([Eng] 148), φ_a jest homomorfizmem *wyznaczonym przez punkt a*. Istnieją przestrzenie topologiczne X takie, że każdy pierścieniowy homomorfizm z $C(X)$ do $\mathbb{R}$ jest postaci φ_a, gdzie $a \in X$.

10.9.7. *Niech X będzie topologiczną przestrzenią zwartą. Każdy pierścieniowy homomorfizm $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ jest postaci φ_a dla pewnego $a \in X$. Innymi słowy, jeśli $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem pierścieni, to istnieje element $a \in X$ taki, że $\varphi(f) = f(a)$ dla wszystkich $f \in C(X)$.* ([Eng] 148, [Dud1] 265).

D. Niech $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ będzie pierścieniowym homomorfizmem i niech M będzie jego jądrem. Wtedy $\varphi(t_1) = 1$ i stąd $r = r\varphi(t_1) = \varphi(rt_1) = \varphi(t_r)$ dla każdego $r \in \mathbb{R}$ (patrz 10.9.2). Odwzorowanie φ jest więc surjekcją. Z izomorfizmu $\mathbb{R} \approx C(X)/M$ wynika, że M jest ideałem maksymalnym w $C(X)$. Przestrzeń X jest zwarta. Istnieje zatem element $a \in X$ taki, że $M = M_a = \{f \in C(X);\ f(a) = 0\}$ (patrz 10.7.3).

Niech $f \in C(X)$. Wtedy $f - f(a) \in M_a = \mathrm{Ker}\varphi$. Zatem $0 = \varphi(f - f(a)) = \varphi(f) - f(a)$, czyli $\varphi(f) = f(a)$. ⊠

Istnieją przestrzenie topologiczne, które nie są zwarte i mają również rozważaną własność.

10.9.8 (R.M. Aron, G.H. Fricke 1986). *Każdy pierścieniowy homomorfizm $\varphi : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest postaci φ_a dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Innymi słowy, jeśli $\varphi : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem pierścieni, to istnieje liczba rzeczywista a taka, że $\varphi(f) = f(a)$ dla wszystkich $f \in C(\mathbb{R})$.* ([Mon] 93(7)(1986) 555).

D. ([Mon] 93(7)(1986) 555). Niech $\varphi : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ będzie homomorfizmem pierścieni. Niech $a = \varphi(e)$, gdzie $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją tożsamościową $x \mapsto x$. Pokażemy, że $\varphi(f) = f(a)$ dla wszystkich $f \in C(\mathbb{R})$. Dowód podzielimy na kilka etapów. Niech $f \in C(\mathbb{R})$.

Etap 1. Załóżmy, że istnieje zbiór otwarty U w $\mathbb{R}$ taki, że $a \in U$ oraz $f(u) = 0$ dla $u \in U$. Pokażemy, że $\varphi(f) = 0$.

Niech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a}, & \text{dla } x \neq a, \\ 0, & \text{dla } x = a. \end{cases}$$

Jest to funkcja ciągła (czyli $g \in C(\mathbb{R})$) i zachodzi równość $f(x) = g(x)(x - a)$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wtedy $f = g \cdot (e - a)$ i mamy: $\varphi(f) = \varphi(g)\varphi(e - a) = \varphi(g)(a - a) = 0$, czyli $\varphi(f) = 0$.

Etap 2. Niech $f \in C(\mathbb{R})$ będzie taką funkcją, że $f(a) = 0$. Pokażemy, że $\varphi(f) = 0$.

Przypuśćmy, że $\varphi(f) \neq 0$. Ponieważ $\varphi(rf) = r\varphi(f)$ dla $r \in \mathbb{R}$, więc możemy założyć, że $\varphi(f) = 1$. Istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x)| = |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}$, dla wszystkich $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Takie δ istnieje, gdyż funkcja f jest ciągła. Definiujemy nową funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, przyjmując:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dla } x \in (a - \delta, a + \delta), \\ f(a + \delta), & \text{dla } x \geqslant a + \delta, \\ f(a - \delta), & \text{dla } x \leqslant a - \delta. \end{cases}$$

Funkcja h jest oczywiście ciągła i $(h - f)(U) = 0$, gdzie $U = (a - \delta, a + \delta)$. Na mocy Etapu 1, $\varphi(h - f) = 0$, czyli $\varphi(f) = \varphi(h)$.

Niech $g = 1 - h$. Wtedy $g \in C(\mathbb{R})$ oraz $g(x) \geqslant \frac{1}{2}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Funkcja g jest więc odwracalna w pierścieniu $C(\mathbb{R})$ (patrz 10.2.1). Niech $u \in C(\mathbb{R})$, $ug = 1$. Mamy wtedy: $\varphi(g) = \varphi(1 - h) = \varphi(1) - \varphi(h) = 1 - \varphi(f) = 1 - 1 = 0$ i stą otrzymujemy sprzeczność: $1 = \varphi(1) = \varphi(gu) = \varphi(g)\varphi(u) = 0\varphi(u) = 0$.

Etap 3. Niech $f \in C(\mathbb{R})$. Rozpatrzmy funkcję $g = f - f(a)$. Oczywiście $g(a) = 0$. Na mocy Etapu 2, $\varphi(g) = 0$. Zatem: $0 = \varphi(g) = \varphi(f - f(a)) = \varphi(f) - f(a)$, czyli $\varphi(f) = f(a)$. ⊠

10.9.9. *Niech X będzie jednym z przedziałów otwartych: (b, c), $(-\infty, c)$, (b, ∞), gdzie $b, c \in \mathbb{R}$. Każdy pierścieniowy homomorfizm $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ jest postaci φ_a dla pewnego $a \in X$. Innymi słowy, jeśli $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ jest homomorfizmem pierścieni, to istnieje liczba rzeczywista $a \in X$ taka, że $\varphi(g) = g(a)$ dla wszystkich $g \in C(X)$.*

D. Przestrzenie X i $\mathbb{R}$ są homeomorficzne. Niech $\alpha : X \to \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \to X$ będą wzajemnie odwrotnymi funkcjami ciągłymi. Mamy wtedy pierścieniowe izomorfizmy $\overline{\alpha} : C(\mathbb{R}) \to C(X)$, $f \mapsto f \circ \alpha$, $\overline{\beta} : C(X) \to C(\mathbb{R})$, $g \mapsto g \circ \beta$.

Niech $\varphi : C(X) \to \mathbb{R}$ będzie pierścieniowym homomorfizmem. Mamy wtedy pierścieniowy homomorfizm $\varphi \circ \overline{\alpha} : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Z twierdzenia 10.9.8 wynika, że istnieje liczba rzeczywista d taka, że $\varphi\overline{\alpha}(f) = f(d)$ dla wszystkich $f \in C(\mathbb{R})$. Niech $a = \beta(d)$. Wtedy dla każdego $g \in C(X)$ mamy: $\varphi(g) = \varphi(g\beta\alpha) = \varphi\overline{(g\beta)} = g\beta(d) = g(a)$ ⊠

★ R. M. Aron, G. H. Fricke, *Homomorphisms on $C(R)$*, [Mon] 93(7)(1986) 555.

M. Golasiński, *A simple embedding of meromorphic functions into complex numbers*, Algebras Groups Geom. 22(2005) 147-149.

M. Golasiński, M. Henriksen, *Residue class rings of real-analytic and entire functions*, [ColM] 104(2006) 85-97.

E. Hewitt, *Linear functionals on spaces of continuous functions*, [Fund] 37(1950) 161-189.

Literatura

[ArcP] A. W. Archangielski, W. I. Ponomariow, *Podstawy Topologii Ogólnej w Zadaniach*, PWN, Warszawa, 1986.

[ColM] Colloquium Mathematicum, polskie czasopismo matematyczne.

[Dud1] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, Część I, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1986.

[Eng] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, Warszawa, 1965.

[Eng1] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1975.

[EnS] R. Engelking, K. Sieklucki, *Geometria i topologia*, PWN, Warszawa, 1980.

[Fund] Fundamenta Mathematicae, (Fund. Math.), polskie czasopismo matematyczne.

[G-J] L. Gillman, M. Jerison, *Rings of Continuos Functions*, D. Van Nostrand Company, INC., 1960.

[Isaa] I. M. Isaacs, *Algebra*, A Graduate Course, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove, California, 1994.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[Tams] Transactions of the American Mathematical Society, (Trans. Amer. Math. Soc.), czasopismo matematyczne.