
Olsztyn, Toruń, 2010

Podróże po Imperium Liczb

11. Silnie i Symbole Newtona

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

21 maja 2012

Wstęp	1
1 Silnie	5
1.1 Informacje o cyfrach	6
1.2 Funkcja v_p	7
1.3 Liczba zer na końcu	13
1.4 Ostatnia niezerowa cyfra	14
1.5 Silnie cyfr i ich suma	17
1.6 Równości z silniami	17
1.7 Nierówności z silniami	19
1.8 Wyznaczniki z silniami	21
1.9 Silnie i część całkowita	23
1.10 Liczby $n!$ i liczby kwadratowe	23
1.11 Liczby $n!$ i liczby potęgowe	24
2 Silnia i relacja podzielności	27
2.1 Pewne rozkłady kanoniczne	27
2.2 Twierdzenie Wilsona i jego dowód	28
2.3 Modyfikacje i konsekwencje twierdzenia Wilsona	30
2.4 Uogólnienia twierdzenia Wilsona	32
2.5 Pewne zastosowania twierdzenia Wilsona	33
2.6 Dzielniki liczb $n!$	34
2.7 Dzielniki liczb $n! \pm 1$	37
2.8 Dzielniki liczb $a(n!) \pm 1$	38
2.9 Liczby $\frac{n!+a}{n+a}$	39
2.10 Iloczyn początkowych liczb postaci $n!$	40
2.11 Iloczyny kolejnych liczb całkowitych	41
2.12 Różne fakty i zadania z silniami	43
3 Funkcja Smarandache'a	47
3.1 Definicja i przykłady	47
3.2 Podstawowe własności funkcji Smarandache'a	48
3.3 Nierówności z funkcją Smarandache'a	49
3.4 Równości i równania z funkcją Smarandache'a	50
3.5 Liczby $S(n+1) - S(n)$	52
3.6 Granice i szeregi z funkcją Smarandache'a	53
3.7 Różne fakty i zadania z funkcją Smarandache'a	53

4	Wstępne informacje o symbolach Newtona	55
4.1	Cyfry pewnych symboli Newtona	55
4.2	Splot binomialny	56
4.3	Przykłady funkcji odwracalnych względem splotu binomialnego	58
4.4	Binomialne prawo dualności	60
4.5	Binomialny rozkład liczby naturalnej	62
4.6	Wyznaczniki z symbolami Newtona	64
4.7	Ciągi typu dwumianowego	68
5	Równości i nierówności z symbolami Newtona	69
5.1	Elementarne równości z symbolami Newtona	69
5.2	Sumy postaci $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)$	70
5.3	Sumy postaci $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k)g(n-k)$	73
5.4	Sumy postaci $\sum_{k=0}^n \binom{n}{ak+r}$	74
5.5	Sumy z podwójnymi symbolami Newtona	75
5.6	Liczby postaci $\binom{2n}{n}$ i równości	77
5.7	Różne równości z sumami i symbolami Newtona	79
5.8	Równania diofantyczne z symbolami Newtona	81
5.9	Szeregi z symbolami Newtona	84
5.10	Nierówności z symbolami $\binom{2n}{n}$	85
5.11	Różne nierówności z symbolami Newtona	86
5.12	Dodatkowe fakty i zadania z symbolami Newtona	87
6	Symbole Newtona i podzielność	89
6.1	Podzielność przez liczby pierwsze	89
6.2	Funkcje v_p, s_p i symbole Newtona	93
6.3	Symbole postaci $\binom{p-1}{k}, \binom{p-2}{k}, \binom{p-3}{k}$. . . i podzielność	95
6.4	Symbole postaci $\binom{np-1}{k}$ i podzielność	95
6.5	Symbole $\binom{p^{n+1}}{p^n}$ i podzielność	97
6.6	Liczby postaci $\binom{2n}{n}$ i podzielność	97
6.7	Nwd i nww	101
6.8	Sumy z symbolami Newtona i podzielność	103
6.9	Iloczyny i symbole Newtona	104
6.10	Różne fakty i zadania o podzielności i symbolach Newtona	105
6.11	Całkowitość pewnych liczb wymiernych	106
7	Twierdzenie Lucasa i jego uogólnienia	111
7.1	Kongruencja $\binom{pn}{pm} \equiv \binom{n}{m}$	111
7.2	Twierdzenie Lucasa	113
7.3	Zastosowania twierdzenia Lucasa	115
7.4	Ciągi spełniające warunek Lucasa	118
8	Trójkąt Pascala modulo m	121
8.1	Trójkąt Pascala modulo 2	121
8.2	Trójkąt Pascala modulo 3	124
8.3	Trójkąt Pascala modulo 4	127
8.4	Trójkąt Pascala modulo 5	128
8.5	Trójkąt Pascala modulo m, dla $m \geq 6$	129
8.6	Trójkąt Pascala modulo p	131
8.7	Trójkąt Pascala modulo p^s	133
8.8	Podzielność liczby $\binom{n}{k}$ przez n	134

9 Liczby Apéry'ego i liczby Catalana	135
9.1 Liczby Apéry'ego	135
9.2 Liczby Catalana	136
10 Uogólnione symbole Newtona	139
10.1 Symbole $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$	139
10.2 Uogólnienia trójkąta Pascala	143
11 Symbole Newtona stowarzyszone z ciągami	147
11.1 Uogólniony współczynnik dwumianowy	147
11.2 Beta ciągi	149
11.3 Alfa ciągi	150
11.4 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Mersenne'a	152
11.5 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami $q^n - 1$	153
11.6 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami $a^n - b^n$	155
11.7 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Fibonacciego	156
11.8 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami trójkątnymi	157
11.9 Symbole Newtona, liczby tetraedralne i uogólnienia	160
12 Permutacje, kombinacje i dodatkowe fakty	165
12.1 Permutacje zbiorów skończonych	165
12.2 Permutacje i punkty stałe	169
12.3 Injekcje, surjekcje i liczby Bella	171
12.4 Kombinatoryka	172
12.5 Zadania różne	173
Spis cytowanej literatury	175
Skorowidz nazwisk	182
Skorowidz	186

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Abbott S., 17
Abramson M., 142
Al-Salam W.A., 169
Albree J., 103
Alexanderson G.L., 157
Alfutova N.B., 175
Alperin R.C., 114
Andžāns A., 175
Anderson P.G., 175
Andreescu T., 180
Andrews G.E., 155, 175
Apery R., 135
Ashbascher Ch., 175
Atanassov K.T., 175
Awramow A., 174
- Babbage Ch., 92, 96
Banaś J., 174
Bankier J.D., 142, 146
Baranowa I.W., 175
Bataille M., 81
Bayat M., 68
Bendukidze A.D., 174
Benjamin A.T., 175
Berinde V., 87
Berndt B.C., 175
Bernik V.I., 175
Beukers F., 136
Bezivin J.P., 152
Bhargava M., 175
Bieliński W., 138
Bizley, M.T.L., 171
Bollinger R.C., 120, 142
Boltianski W.G., 175
Bondarenko B.A., 146
Bourguet J., 107
Boyd D.W., 43
Brand L., 68
Bressoud D.M., 175
Broomhead W.A., 133
Browkin J., 175
Brown K., 175
Brualdi R.A., 138
Bryński M., 175
Burchard C.L., 120
- Cadogan Ch., 146
Caldwell Ch.K., 38, 175, 176
Calkin, 100
Cannon L.O., 133
Carlitz L., 32, 58, 67, 117, 118, 133, 155
Catalan E., 98, 99, 106, 107, 136
- Cauchy A., 108
Chandrasekharan K., 176
Chao L., 171
Chappell J., 142
Chen C.C., 176
Chen Xu., 77
Chentzov N.N., 180
Cherowitzo B., 133
Chowla S., 135
Chung L.O., 66, 67
Clark D.S., 87, 176
Clark W.E., 155
Clarke R.J., 171
Cofman J., 138
Cohn H., 155
Cosgrave J.B., 32
Cunningham A., 98
Czakyrijan K., 176
Czang G., 77
Czebyszew, 45
- Davis K.S., 127
Deshpande M.N., 169
DesJarlais P., 171
Diamond H.G., 98
Dickinson D., 81
Dickson L.E., 176
Dilcher K., 32
Djukić D., 176
Doduniekow S., 176
Domański P., 157
Douglas R.D., 87
Dubner H., 38
Dubner R., 38
Dumitrescu C., 176
Dynkin E.B., 176
Dynkin J., 176
- Eclund E.F., 86
Edelman A., 67
Eggleton R.B., 86
Elston F.G., 32
Erdős P., 34, 35, 42, 81, 92, 98, 100, 102, 142
Eriksson K., 155, 175
Euler, 137
Evans R.J., 175
Everest G., 176
Ewell J.A., 138
- Faddejev D.K., 176
Farhi B., 103
Feit W., 29

- Fine N.J., 114, 132, 133
 Fleck A., 92
 Fomin D.V., 176
 Fontené M.G., 176
 Fowler D., 174
 Fray R.D., 155
 Freund J.E., 142
 Fuks D.B., 174
 Fuks M.B., 174

 Galpierin G.A., 177
 Garbner M., 138, 171
 Gauss, 32, 100
 Gauthier N., 67
 Gegenbauer L., 99
 Genkin S.A., 176
 Gerstenkorn T., 87
 Gessel I., 135, 136
 Glaisher J.W.L., 122, 124
 Goetgheluck P., 56
 Golomb S.W., 87
 Gould H.W., 157
 Gould H.W., 148, 155, 177
 Graham R.L., 77, 100, 176
 Granville A., 87, 127, 130, 131, 177
 Green T.M., 171
 Greene C., 177
 Gribanow W.U., 177
 Griffin H., 12, 177
 Grigorjan A.A., 180
 Grundhöfer T., 25
 Grzesiak M., 68
 Guerin, 96
 Guichard D.R., 177
 Gupta H., 29
 Gupta S.S., 17
 Gutenmacher W.L., 173
 Guy R.K., 19, 24, 36, 43, 45, 92, 100, 105, 113, 177
 Guzicki W., 173

 Hanson D., 171
 Harborth H., 106, 134
 Hathout H., 171
 Hermite Ch., 101
 Hilman A.P., 101, 151, 152
 Hilton P., 138
 Hinz A.M., 118
 Hirschorn M.D., 87
 Hirst K., 11, 36
 Hoggatt Jr. H.E., 157–159
 Hoggatt Jr. V.E., 133
 Hoggatt V.E., 101, 151, 152, 157
 Holte J.M., 152
 Horadam E.M., 142

 Hoshino R., 106
 Howard E.T., 124, 133
 Howard F.T., 127, 141
 Huard J.G., 131, 133
 Hudson R.H., 100

 Ibstedt H., 54
 Isaacs I.M., 177
 Itenberg I.W., 176
 Ivanov O.A., 177

 Jacobsthal E., 112
 Jadrenko M.I., 181
 James L., 17
 Janković V., 176
 Jeśmanowicz L., 177
 Jędrzejewicz P., 177
 Jegorow A.A., 181
 Jones L.K., 84

 Kadane J.B., 142
 Kao R.C., 142
 Kartaszow I.W., 181
 Kashihara K., 178
 Kazandzidis G.S., 94
 Kedlaya K.S., 177
 Keeney R.L., 142
 Kisacanin B., 178
 Kisilevsky H.H., 43
 Kleitman D.J., 177
 Klosinski L.F., 157
 Knuth D.E., 11, 150, 176, 178
 Koninck De J.-M., 177, 178
 Konjagin S.W., 180
 Koshy T., 78, 81, 84, 103, 159, 178
 Kostrikin A.I., 178
 Kovacs A., 67
 Krall H.L., 68
 Kuźmin E., 171
 Kummer E., 94
 Kurlandczyk L., 174, 178
 Kurschak J., 178

 Laghate K., 169
 Lagrange, 30
 Lapin C.E., 175
 Lawden G.H., 68
 Lawronow I.A., 178
 Lee H., 178
 Leech J., 23
 Legendre A.-M., 8, 9
 Lehmer D.H., 178
 Lehmer E., 38
 Leibniz, 30
 Leman W.G., 175

- Leonard J.L., 171
 Levitt H., 87
 Lewis B., 146
 Lidl R., 178
 Limanow L.G., 45
 Lipski W., 178
 Lisicki A., 174
 Liu A., 125
 Ljunggren W., 111
 Łoś J., 177
 Long C.T., 133
 Lord N., 13
 Lou-Yao, 135
 Lucas E., 95, 113, 118, 123
 Luh J., 66, 67
- Małachowski D., 131
 MacKinnon N., 36
 Majer M., 152
 Majewski M., 178
 Maksimowa Ł.L., 178
 Mann H.B., 92
 Marek W., 178
 Marzantowicz W., 178
 Matić I., 176
 Maxfield J.E., 7
 McCammond J., 138
 McIntosh R.J., 178
 McLean K.R., 68, 106
 Melnikow O.W., 175
 Mercier A., 177, 178
 Mestrović R., 113, 117, 118
 Michailowskij W.I., 181
 Miklaszewski D., 146
 Miklos St., 171
 Mołczanow S.A., 176
 Mochocka K., 58
 Moen C., 84
 Montgomery H.L., 73, 179
 Mordell L.J., 31
 Morley F., 95, 98, 99
 Mullin A.A., 169
 Murszewska I., 134
- Nagell T., 179
 Nathanson M.B., 179
 Niederreiter H., 178
 Niven I., 73, 179
 Norton R.M., 67
 Nowicki A., 68, 178, 179
 Nowicki P., 174
- Orton D.J., 126
 Osler T.J., 142
- Parol K., 138
 Patashnik O., 176
 Pawłowski H., 109, 179
 Pedersen J., 138
 Penrice S.G., 171
 Perez M.L., 181
 Pethö A., 152, 156
 Petrović N., 176
 Plesants P.A.B., 92
 Pollard S., 171
 Poole G.D., 17
 Poonen B., 177
 Poorten van der A., 152, 176
 Proskuriakow I.W., 180
 Putz J.F., 142
 Pytel J., 120
- Quill P., 142
- Radoux Ch., 135, 136
 Ramaley J.F., 142
 Rempała J., 175
 Ribenboim P., 180
 Riordan J., 77, 138
 Robbins N., 180
 Roberts J.B., 169
 Roberts L., 124
 Rogers D.G., 138
 Rouse J.A., 175
 Rozental A.L., 176
 Ruderman, 109
 Runyon J.P., 69
 Rutledge G., 87
 Ruzsa, 100
- Sadowniczij W.A., 180
 Salmassi M., 159
 Sander J.W., 98, 100
 Sandor J., 19, 50, 54, 152, 180
 Santos D.A., 180
 Sarkozy A., 98
 Savchev S., 180
 Schinzel A., 180
 Schur I., 42
 Seagull L., 54
 Segar H.W., 40
 Seleacu V., 176
 Selfridge J.L., 36, 42, 92
 Sergiejew N.N., 180
 Seyffarth K., 171
 Shan Z., 174
 Shanks D., 92
 Shapiro L., 138
 Shklarsky D.O., 180
 Shparlinski I., 176

- Sierpiński W., 180
 Silverman J.H., 87, 180
 Singmaster D., 83, 94, 101, 138
 Smarandache F., 47, 48, 180, 181
 Sominskij I.S., 176
 Spearman B.K., 124, 131
 Spivak A., 138
 Śródka T., 87
 Stachowski E., 181
 Stephenson P., 171
 Strang G., 67
 Straszewicz S., 175, 181
 Straus, 100
 Stuparu A., 52
 Sved M., 133, 171
 Swylan E., 138
 Sylvester J., 42
 Szekeres, 102
 Szily C., 103
 Szirszow A.I., 83, 138, 171, 174
 Szneperman L.B., 181
 Sznirelman L., 181
 Szurek M., 181

 Tauber S., 142
 Teimoori H., 68
 Titow P.I., 177
 Tolpygo A.K., 171, 176, 177
 Tone P.C., 67, 68
 Trigg Ch., 181
 Trost E., 181

 Uspienski W., 87, 106, 176, 181
 Ustinov A.W., 175

 Vakil R., 177
 Velammal G., 100
 Volodin N.A., 133

 Wachs M.L., 171
 Wagon S., 175
 Wagutien W.N., 174
 Wang E.H., 174
 Ward T., 176
 Waring E., 30
 Wasilev N.B., 173, 181
 Webb W.A., 127, 133
 Wells D.L., 157
 Weston J.H., 171
 Więckowski A., 83
 Wieczorkowski S., 138
 Wiff H.S., 150, 178
 Williams K.S., 100, 124, 131, 133, 175
 Wilson B., 157
 Wilson J., 28

 Winogradow I., 181
 Woan W., 138
 Wolfram S., 174
 Wolstenholme J., 96, 112
 Wong W.J., 94
 Woodall A.D., 29
 Wowk Cz., 94, 124
 Wróblewski J., 56, 78
 Wyszenskij W.A., 181

 Yaglom I.M., 180
 Yao Q., 135
 You Yong-Xing, 105

 Zalewska A., 181
 Zarzycki P., 178
 Zetterberg L.H., 142
 Zhang Shao-Hua, 105
 Zhu Y., 87
 Zuckerman H.S., 73, 179
 Żuk I.K., 175

Skorowidz

- a-nomial coefficients, 147
- alfa ciąg, 150–153, 155–157
- beta ciąg, 41, 149–153, 155, 156
- binomialne prawo dualności, 60, 61
- całka, 173
- ciąg
 - arytmetyczny, 24, 41, 44, 72, 82, 174
 - geometryczny, 149
 - liczb Fibonacciego, 70, 83, 156, 157
 - liczb Gaussa, 153
 - nieograniczony, 20
 - okresowy, 14, 80, 100, 105, 120
 - regularnie okresowy, 150
 - rekurencyjny, 23, 44, 72, 135–138, 144, 151, 156, 170
- ciało, 56, 57
 - \mathbb{Z}_p , 29, 113
 - skończone, 32, 154
- cyfry, 92, 117, 139
 - ostatnie, 13–16, 41, 56
 - silni, 5–7, 13–17, 38
 - liczba zer na końcu, 13
 - ostatnia niezerowa cyfra, 13–16
 - początkowe, 7
 - suma cyfr, 122, 141, 173
 - symboli Newtona, 55, 56, 123, 127, 133
 - ostatnie, 56
 - początkowe, 56
- część całkowita, 8, 13, 14, 23, 30, 36, 54, 77, 99, 102, 107, 115
- derangement number, 169–171
- divisibility sequence, 150
- dywan Sierpińskiego, 121
- factorial primes, 38
- fraktal, 121
- funkcja
 - φ , 2, 104, 134
 - π , 52, 54
 - τ , 23
 - τ , 35, 51, 52
 - e , 56, 57
 - s_p , 9–11, 93, 94, 117, 122, 123, 141, 142
 - v_p , 7–9, 11–14, 93, 94, 122, 141
 - bijekcja, 165, 171
 - Erdösa-Selfridge’a, 92
 - multyplikatywna, 51
 - różnowartościowa, 165, 171
 - Smarandache’a, 3, 47–54
 - surjekcja, 48, 171
- generalized binomial coefficients, 147
- granica ciągu, 10, 12, 53, 80, 124, 155, 170
- harmoniczny trójkąt Leibniza, 145
- hipoteza, 50, 52, 83, 92, 96, 112
 - Erdösa, 98
- iloczyn, 11, 15, 24, 32, 35, 40, 41, 43, 44, 65, 94, 105, 109, 124, 137, 148, 150, 151, 156
 - ciągów, 119, 149, 151
 - kolejnych liczb naturalnych, 41, 42
 - symboli Newtona, 104, 105
- IMO, 1, 33, 78, 145, 168, 169
 - Longlist, 10, 11, 20, 21, 80, 103, 108, 145
 - Shortlist, 14, 87, 109, 144, 168, 172, 173
- indukcja matematyczna, 16, 35, 57, 62, 64, 69, 72, 85, 91, 111, 125, 151, 172
- kolejne
 - liczby naturalne, 41–43, 91, 143, 147, 150, 172
 - liczby pierwsze, 41, 53
 - wyrazy ciągu, 41–43, 72, 79, 82, 151, 152, 165
- kombinacja, 165
- kongruencja, 15, 16, 28–33, 38, 39, 67, 74, 91, 94–96, 99, 100, 104, 108, 111–118, 122, 123, 131–133, 135, 136, 142, 144, 155, 157, 165, 167, 168
- kula, 12
- kwadrat, 12
- liczba
 - π , 74, 75, 84, 86, 138
 - e , 20, 45, 170, 171
 - Apery’ego, 3, 119, 135, 136
 - Bella, 171
 - Catalana, 136–138, 159
 - Fermata, 124
 - Fibonacciego, 70, 83, 156, 157
 - Gaussa, 153
 - jedynekowa e_n , 155
 - kwadratowa, 18, 20, 21, 23, 24, 31, 33, 34, 40, 41, 44, 49, 58, 69, 71, 74, 76–79, 81, 91, 96, 97, 106, 111, 112, 119, 124, 133, 135, 145, 159, 166, 167
 - Mersenne’a, 11, 73, 75, 122, 134, 137, 145, 151, 152
 - nieparzysty, 11, 12, 24, 33, 36, 41, 42, 70, 71, 99, 100, 122, 123, 137, 142, 152, 159, 165
 - niewymierna, 43, 135
 - parzysty, 11, 14–16, 23, 34, 49, 53, 81, 97, 99, 123, 143, 165

- pierwsza, 12, 24, 28, 30, 31, 33, 35, 36, 39, 44,
 48, 52, 53, 78, 89, 91–96, 98–100, 104,
 105, 111, 112, 118, 120, 133–135, 142,
 144, 155, 157
 faktorialna, 38
 Wilsona, 31
 Wolstenholme, 112
 prostokątna, 159
 tetraedralna, 160
 trójkątna, 36, 43, 67, 92, 157, 160
 wymierna, 11, 12, 106–109, 139, 147
 złożona, 12, 36–38, 48, 49, 54
 liczby względnie pierwsze, 13, 14, 32, 41, 102, 105,
 152, 155, 168
 logarytm, 83, 84, 99
 macierz, 21, 22, 66, 67
 Maple, 1, 6, 7, 13, 14, 36, 48, 50, 51, 55, 56, 58
 max, 48, 49
 metryka, 12
 min, 8
 nierówność, 10, 12, 20, 35, 39, 52, 54, 83, 92, 93,
 99, 100, 107
 z funkcją Smarandache'a, 49, 50
 z silniami, 19–21, 24
 z symbolami Newtona, 85–87, 102
 nwd, 1, 34, 37, 39, 44, 52, 98, 100–103, 140, 150,
 151, 156
 nww, 1, 34, 35, 45, 49, 52, 101–103
 oblong numbers, 159
 Olimpiada Matematyczna
 Anglia, 144
 Australia, 23
 Austria, 81, 108
 Belgia, 19
 Brazylia, 83
 Czechosłowacja, 20, 41, 42, 72, 103, 123, 144,
 168
 Czechy-Polska-Słowacja, 90
 Francja, 173
 Hiszpania, 41, 86
 Holandia, 21
 Indie, 13, 41, 167
 Iran, 62, 150
 Irlandia, 20, 37
 Japonia, 11, 173
 Kanada, 34, 36, 167
 Kazachstan, 33
 Leningrad, 16, 24, 36
 Łotwa, 25
 Mołdawia, 36
 Moskwa, 18, 41
 Niemcy, 86
 Polska, 35, 45, 74, 79, 85, 91, 103, 165, 169,
 172
 RPA, 165
 Rumunia, 79, 87, 103
 St Petersburg, 21, 36, 44, 86, 149, 165
 Turcja, 44
 Ukraina, 21, 167
 W.Brytania, 108, 125
 Węgry, 103
 Włochy, 113
 ZSRR, 24, 35
 p-adyczne przedstawienie, 9
 permutacja, 3, 33, 165–171, 173, 174
 kwadratowa, 167
 pierścień, 57
 $\mathbb{Q}[x]$, 105
 $\mathbb{R}[x]$, 71, 149
 $\mathbb{Z}[x]$, 71, 75, 125
 $\mathbb{Z}_p[x]$, 29, 112, 113, 132
 $\mathbb{Z}_p[x_1, \dots, x_n]$, 141
 pochodna, 73, 140
 podwójny warunek Lucasa, 118–120
 podzbiór, 24, 55, 69, 78, 139, 172, 173
 podzielność, 23, 24, 28, 34, 36, 38, 40–42, 44, 45,
 47, 50, 71, 90, 91, 94, 96–99, 101, 103–
 106, 109, 113, 115, 117, 134, 140, 144,
 149–151, 156, 167
 przez 3, 97, 103, 125, 142, 144
 przez 4, 15, 98
 przez 5, 128
 przez 7, 91
 przez 16, 16
 przez 23, 37
 przez 29, 38
 przez 43, 34
 przez p , 30–33, 44, 78, 89–91, 95–97, 103, 104,
 116, 117, 131–133, 141, 144, 172
 przez potęgę liczby pierwszej, 7, 24, 31, 34,
 87, 93, 96–98, 103, 104, 111–113, 122
 przez silnię, 33, 41, 44, 45, 140, 168
 postać binomialna, 62
 potęga
 dwójki, 11, 12, 14–16, 18, 19, 31, 32, 34, 40,
 41, 44, 48, 52, 67, 71–81, 84–87, 95, 97,
 98, 102–104, 122–125, 127, 130, 131, 134,
 137, 138, 144, 145, 149, 151, 152, 159
 liczby pierwszej, 7, 8, 24, 31, 32, 34, 35, 49, 53,
 72, 89–91, 93–99, 102, 104, 105, 109, 111–
 113, 115–117, 131, 133, 135, 136, 140, 142
 piątki, 15, 16, 48, 135
 siódemki, 8, 92
 trójki, 11, 12, 48, 79, 94, 97, 103, 104, 119,
 124–126, 142, 144

- przestrzeń metryczna, 12
 zupełna, 12
 punkt stały, 169
 pytanie, 6, 23, 31, 38, 41, 56, 100, 109, 166
- q-binomial coefficients, 153
- relacja typu równoważności, 171
 reszta z dzielenia, 33, 43, 115, 144, 167, 168
 równanie,
 diofantyczne, 42, 172
 z funkcją Smarandache'a, 51, 52
 z silniami, 17, 18
 z symbolami Newtona, 81–83
- rozkład
 binomialny, 62, 63
 kanoniczny, 8, 27, 48
- silnia (definicja), 3
 spłot binomialny, 56–61, 71, 169, 170
 średnia,
 arytmetyczna, 19, 21, 108, 139, 173
 geometryczna, 19, 21
- suma
 cyfr, 17, 122, 141, 173
 dzielników, 35, 36
 iloczynów, 43
 jednomianów, 132
 kolejnych wyrazów, 165
 kwadratów, 24, 77, 78, 87
 potęg, 16, 71, 94
 szeregu, 43, 53, 84
 z bezwzględnymi wartościami, 166, 167
 z silniami, 17, 18, 22, 35, 109
 z symbolami Newtona, 56, 57, 60, 61, 68, 70–81, 84, 86, 94, 98, 100, 103, 104, 109, 111, 113, 116, 117, 119, 125, 135, 145, 169–171
- symbol Newtona (definicja), 3, 55
- system numeracji
 dowolny, 41, 56
 dwójkowy, 11, 122, 124, 130, 142
 o podstawie p , 9, 93, 94, 115, 117, 118, 131–133, 136, 141
 szóstkowy, 13
 trójkowy, 125, 142
- sześcian liczby całkowitej, 11, 34, 71, 77, 79, 84, 95, 96, 98, 99, 111, 112, 119, 135, 136, 170
- szereg, 11, 43, 53, 80, 84, 104, 135, 137, 138, 170, 171
- tożsamość Vandermonde'a, 75
 trójkąt Pascala, 84, 87, 106, 118, 120, 160, 162
 modulo 2, 121–124, 156, 158
 modulo 3, 124–126
 modulo 4, 127
 modulo 5, 128
 modulo 6, 129
 modulo 7, 129
 modulo 8, 129, 130
 modulo 9, 129, 131
 modulo 10, 130
 modulo 16, 131
 modulo m , 131, 134
 modulo p , 131–133
- twierdzenie
 chińskie o resztach, 168
 Dirichleta, 24
 Gaussa, 100
 Kummera, 141
 Legendre'a, 8, 9, 93
 Liouville'a, 24
 Lucasa, 3, 111, 113–118, 120, 122, 123, 131, 132
 małe Fermata, 29, 119
 Wilsona, 3, 28–33, 37–39, 92, 95
 Wolstenholme'a, 29
- typ dwumianowy, 68
- układ równań, 173
 ułamek prosty, 18
 uogólnione twierdzenie Wilsona, 32, 92
 uogólniony symbol Newtona, 56, 108, 139–142
- warunek Cauchy'ego, 12
 warunek Lucasa, 118–120
 warunki równoważne, 12, 23, 28, 30, 34, 36, 39, 41, 53, 57, 92, 94, 96, 102, 117, 118, 122, 123, 127, 131, 133, 134, 137, 151, 155, 157
- wielomian, 68, 72, 73, 75, 87, 105, 109, 113, 125, 132, 141, 142, 151, 170, 173, 174
 cyklotomiczny, 155
 Legendre'a, 119
 moniczny, 71, 72, 170
 s-wielomian, 125
 symetryczny, 144
- wyznacznik, 21, 22, 64–67, 160–162
 wzór Leibniza, 140
 wzór Newtona, 139
- zbiór
 \mathbb{N}_0 , 1, 56, 172
 liczb całkowitych, 1
 liczb naturalnych, 1, 17, 18, 56, 168
 liczb pierwszych, 1, 33, 112
 liczb rzeczywistych, 1
 liczb wymiernych, 1, 12
 liczb zespolonych, 1, 56–61
 nieograniczony, 52

nieskończony, 11, 12, 17, 18, 23, 24, 33, 37,
39, 50, 52, 56, 81, 83, 91, 92, 96, 98, 100,
108, 112
zbiory rozłączne, 12