Podróże po Imperium Liczb

Część 11. Silnie i Symbole Newtona

Rozdział 8

8. Trójkąt Pascala modulo m

Andrzej Nowicki 21 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

8 Trójkąt Pascala modulo m

8.1 Trójkąt Pascala modulo 2

Spójrzmy na początkowe wiersze trójkąta Pascala oraz na reszty z dzielenia przez 2 liczb występujących w tych wierszach.

1	1
1, 1	1, 1
1, 2, 1	1, 0, 1
1, 3, 3, 1	1, 1, 1, 1
1, 4, 6, 4, 1	1, 0, 0, 0, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1	1, 1, 0, 0, 1, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1	1, 0, 1, 0, 1, 0, 1
1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

Po prawej stronie mamy początkowe wiersze tzw. *trójkąta Pascala modulo* 2. Gdy w tym trójkącie zlikwidujemy przecinki i wszystkie zera pomalujemy na biało, otrzymamy interesujący obrazek. Oto obrazek tego typu zbudowany z 35 początkowych wierszy.

```
                 1
                 11
                1 1
                1111
               1   1
               11  11
              1 1 1 1
              11111111
             1       1
             11      11
            1 1     1 1
            1111    1111
           1   1   1   1
           11  11  11  11
          1 1 1 1 1 1 1 1
          1111111111111111
         1               1
         11              11
        1 1             1 1
        1111            1111
       1   1           1   1
       11  11          11  11
      1 1 1 1         1 1 1 1
      11111111        11111111
     1       1       1       1
     11      11      11      11
    1 1     1 1     1 1     1 1
    1111    1111    1111    1111
   1   1   1   1   1   1   1   1
   11  11  11  11  11  11  11  11
  1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
  11111111111111111111111111111111
 1                               1
 11                              11
1 1                             1 1
1111                            1111
```

Obrazek jest podobny do znanego fraktalu typu IFS, nazywanego *dywanem Sierpińskiego.*

Ponieważ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ dla $n \in \mathbb{N}_0$, więc na początku i na końcu każdego wiersza występują jedynki. Wiemy (patrz 6.1.2), że wszystkie liczby postaci $\binom{2^m}{k}$, dla $1 \leqslant k < 2^m$, są parzyste. Z tego wynika, że w trójkącie Pascala modulo 2 każdy wiersz, którego numer jest potęgą dwójki, jest postaci $100\dots001$. Wiersze o numerach $2^m - 1$ składają się z samych jedynek. To z kolei wynika z następującego stwierdzenia.

8.1.1. *Następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *wszystkie liczby:* $\displaystyle\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n-1}, \quad \binom{n}{n}$, *są nieparzyste;*

(2) *liczba $n+1$ jest potęgą dwójki.* ([Wino] 24, [S50] 24, [Bryn] 7.1).

D. Niech $n = a_r 2^r + a_{r-1}2^{r-1} + \dots + a_1 2^1 + a_0$, gdzie $r \geqslant 0$, $a_r \neq 0$, będzie przedstawieniem 2-adycznym liczby n. Skoro $a_r \neq 0$, więc $a_r = 1$. Niech $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ i rozpatrzmy $\binom{n}{k}$. Ponieważ $k \leqslant n$, więc przedstawienie 2-adyczne liczby k jest postaci $k = b_r 2^r + b_{r-1}2^{r-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0$, gdzie $b_0, b_1, \dots, b_r \in \{0, 1\}$. Z twierdzenia Lucasa 7.2.2 mamy więc

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{a_r}{b_r}\binom{a_{r-1}}{b_{r-1}} \cdots \binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0} \pmod 2.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Jeśli $n = 2^s - 1$, to $n = 1 \cdot 2^{s-1} + 1 \cdot 2^{s-2} + \dots + 1 \cdot 2^1 + 1$. W tym przypadku $r = s - 1$ oraz $a_r = a_{r-1} + \dots = a_1 = a_0 = 1$. Wszystkie więc liczby postaci $\binom{a_i}{b_i}$ są równe albo $\binom{1}{0}$ albo $\binom{1}{1}$, więc są równe 1. W tym przypadku więc $\binom{n}{k} \equiv 1 \pmod 2$ dla wszystkich $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, czyli $\binom{n}{k}$ jest nieparzyste dla wszystkich $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy, że wszystkie liczby $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ są nieparzyste. Wtedy $\binom{a_i}{b_i} = 1$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, r$. Zatem $b_i \leqslant a_i$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, r$. Gdyby któreś a_i było równe 0, to dla $b_i = 1$ mielibyśmy $\binom{a_i}{b_i} = 0$ i wtedy

$$\binom{n}{2^i} \equiv 0 \pmod 2.$$

Zatem $a_i = 1$ dla wszystkich $i = 0, 1, \dots, r$. Stąd $n = 2^r + 2^{r-1} + \dots + 2^1 + 2^0 = 2^{r+1} - 1$. ⊠

Wykażemy teraz, że liczba jedynek występujących w wierszu trójkąta Pascala modulo 2 jest zawsze potęgą dwójki. W tym celu przypomnijmy najpierw, że jeśli n jest liczbą naturalną, to przez $s_2(n)$ oznaczamy sumę cyfr w przedstawieniu dwójkowym liczby n. W tym przypadku $s_2(n)$ jest liczbą jedynek występujących w przedstawieniu dwójkowym liczby n. Przypomnijmy również, że przez $v_2(n)$ oznaczamy taką liczbę k, że $2^k \mid n$ i $2^{k+1} \nmid n$.

8.1.2. *Niech $a, b \geqslant 0$. Następujące warunki są równoważne:*

(*a*) $\displaystyle\binom{a+b}{a}$ *jest liczbą nieparzystą;*

(*b*) $v_2((a+b)!) = v_2(a!) + v_2(b!)$*;*

(*c*) $s_2(a+b) = s_2(a) + s_2(b)$.

8.1.3 (Glaisher 1899)**.** *Dla każdej liczby naturalnej n liczba wszystkich liczb nieparzystych występujących w ciągu*

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$$

jest równa $2^{s_2(n)}$. ([Mon] 65(5)(1958) z.E1288, [Nord] 1998, [Gr98]).

D. (Sposób I). Jest to fakt 8.6.2 dla $p = 2$. ⊠

D. (Sposób II). Oznaczmy rozważaną liczbę przez w_n. Niech $n = 2^s + m$, gdzie $s \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leqslant m < 2^s$. Z 7.3.6 wiemy, że jeśli $0 \leqslant k < 2^s$, to

$$\binom{2^s+m}{k} \equiv \binom{m}{k} \pmod 2.$$

Natomiast z 7.3.8 wiemy, że jeśli $k \geqslant 2^s$, to

$$\binom{2^s+m}{k} \equiv \binom{m}{k-2^s} \pmod 2.$$

Stąd wynika, że $w_n = 2w_m$. Powtarzając to dla liczby m stwierdzamy, że $w_m = 2w_{m_1}$ dla pewnego m_1 itd. Ostatecznie otrzymamy, że $w_n = 2^s w_0$, gdzie $s = s_2(n)$. Jest oczywiste, że $w_0 = 1$. Zatem $w_n = 2^{s_2(n)}$. ⊠

m

Kilka stwierdzeń o parzystości i nieparzystości symboli Newtona.

8.1.4 (Lucas)**.** *Liczba* $\binom{n}{k}$ *jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy w przedstawieniu dwójkowym każda cyfra liczby* k *jest nie większa od odpowiedniej cyfry liczby* n.

D. Wynika to z twierdzenia Lucasa 7.2.1 lub 7.2.2. ⊠

8.1.5. *Jeśli* k *jest liczbą nieparzystą, to* $\binom{2n}{k}$ *jest liczbą parzystą.* (Wynika z 6.1.3 dla $p = 2$).

8.1.6. *Jeśli* n *jest taką liczbą naturalną, że* $\binom{2n-1}{n}$ *jest liczbą nieparzystą, to* $n = 2^s$, $s \geqslant 0$. ([OM] Czechosłowacja 1984/1985).

8.1.7. $\binom{n}{5} + \binom{n+4}{5} \equiv n \pmod 2$ *dla* $n \geqslant 5$. ([FQ] B-514).

Oznaczmy przez $a(n)$ i $b(n)$ odpowiednio liczbę zer i liczbę jedynek w n-tym wierszu trójkąta Pascala modulo 2.

8.1.8. *Dla każdego* n *liczby* $a(n)$ *i* $b(n)$ *są różne. Innymi słowy, w trójkącie Pascala modulo* 2 *nie ma takiego wiersza, w którym liczba jedynek jest równa liczbie zer.* ([Dlt] 6/1983 16).

8.1.9. $a(n) = b(n) + 1 \iff n = 2$. ([Dlt] 6/1983 16).

8.1.10. $a(n) = b(n) - 1 \iff n = 2^k - 2$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}$. ([Dlt] 6/1983 16).

Oznaczmy przez $c(n)$ liczbę wszystkich jedynek występujących w trójkącie Pascala modulo 2 od początku do n-tego wiersza włącznie; innymi słowy,

$$c(n) = \sum_{i=0}^{n} b(i).$$

8.1.11. $c(2^s - 1) = 3^s$, *dla* $s \in \mathbb{N}$.

8.1.12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c(n)}{\binom{n+1}{2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c(n)}{n^2} = 0$. ([Pams] 62(1)(1977) 19-22).

8.1.13. *W dowolnym wierszu trójkąta Pascala modulo* 2 *nie ma bloków postaci* 1101 *oraz* 1011. ([Mon] 8-9(1980) E2775).

8.1.14 (L. Roberts). *Niech* n *będzie dowolną liczbą naturalną i niech*

$$n = n_d 2^d + \cdots + n_1 2^1 + n_0$$

będzie jej przedstawieniem w dwójkowym systemie numeracji.

Rozpatrzmy zbiór $S_n = \{i;\ n_i = 1\}$ *i spójrzmy na* n*-ty wiersz trójkąta Pascala modulo* 2 *jak na liczbę zapisaną w dwójkowym systemie numeracji; oznaczmę tę liczbę przez* z_n*. Zachodzi wtedy równość*

$$z_n = \prod_{i \in S_n} F_i,$$

gdzie $F_i = 2^{2^i} + 1$ *jest* i*-tą liczbą Fermata.* ([Gran], [Gr98]).

★ J. W. L. Glaisher, *On the residue of a binomial-theorem coefficient with respect to a prime modulus*, Quart. J. Pure. App. Math. 30(1899) 150-156.

E. T. Howard, *The number of binomial coefficients divisible by a fixed power of* 2, [Pams] 29(1971) 236-242.

E. T. Howard, *The number of odd binomial coefficients*, [Pams] 62(1)(1977) 19-22.

B. K. Spearman, K. S. Williams, *On a formula of Howard*, BHKMS 2(1999) 325-340.

Cz. Wowk, *Trójkąt Pascala i podzielność*, [Mat] 1(1999) 26-32.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Trójkąt Pascala modulo 3

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

```
          1
          11
         121
         1  1
        11 11
        121121
       1  2  1
       11 22 11
      121212121
      1        1
     11       11
     121      121
    1  1     1  1
    11 11    11 11
   121121   121121
   1  2  1  1  2  1
  11 22 11 11 22 11
  121212121121212121
 1        2        1
 11       22       11
121      212      121
1  1     2  2     1  1
```

```
          1
          11
         1 1
         1  1
        11 11
        1 11 1
       1     1
       11    11
      1 1 1 1 1
      1        1
     11       11
     1 1      1 1
    1  1     1  1
    11 11    11 11
   1 11 1   1 11 1
   1     1  1     1
  11    11 11    11
  1 1 1 1 11 1 1 1 1
 1                 1
 11                11
1 1       1       1 1
1  1              1  1
```

Rysunek po lewej stronie przedstawia początkowe wiersze trójkąta Pascala modulo 3, z wymazanymi zerami. Po prawej stronie pokazano jak w tym trójkącie rozmieszczone są jedynki.

8.2.1. *W każdym wierszu trójkąta Pascala modulo* 3 *liczba jedynek jest większa od liczby dwójek.* ([OM] W.Brytania 1984).

D. (Andy Liu [Crux] 1/1991 s.5). Mówić będziemy, że dany wielomian (należący do $\mathbb{Z}[x]$) jest *s-wielomianem* jeśli liczba jego współczynników przystających do 1 modulo 3 jest ostro większa od liczby jego współczynników przystających do 2 modulo 3. Musimy wykazać, że $(1+x)^n$ jest s-wielomianem. Przedstawmy liczbę n w zapisie przy podstawie 3:

$$n = n_k 3^k + n_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + n_1 3 + n_0,$$

gdzie $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \{0, 1, 2\}$. Mamy wówczas:

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^n & = & (1+x)^{n_k 3^k} (1+x)^{n_{k-1} 3^{k-1}} \cdots (1+x)^{n_1 3} (1+x)^{n_0} \\ & \equiv & (1+x^{3^k})^{n_k} (1+x^{3^{k-1}})^{n_{k-1}} \cdots (1+x^3)^{n_1} (1+x)^{n_0}, \end{array}$$

gdzie przystawanie $\equiv$ jest modulo 3. Dla $i = 0, 1, \ldots k$ niech

$$F_i = (1+x^{3^i})^{n_i} (1+x^{3^{i-1}})^{n_{i-1}} \cdots (1+x^3)^{n_1} (1+x)^{n_0}.$$

Wystarczy udowodnić, że F_k jest s-wielomianem. W tym celu wykażemy indukcyjnie, że wszystkie wielomiany postaci F_i są s-wielomianami.

Dla $i = 0$ jest to oczywiste. Załóżmy, że F_i jest s-wielomianem (dla pewnego $i < k$). Niech a będzie liczbą jego współczynników przystających do 1 modulo 3 niech b będzie liczbą jego współczynników przystających do 2 modulo 3. Oczywiście $a > b$. Rozpatrzmy wielomian F_{i+1}. Zauważmy, że

$$F_{i+1} = (1 + x^{3^{i+1}})^{n_{i+1}} F_i.$$

Jeśli $n_{i+1} = 0$, to $F_{i+1} = F_i$ i w tym przypadku oczywiście F_{i+1} jest s-wielomianem.

Niech $n_{i+1} = 1$. Wtedy $F_{i+1} = (1 + x^{3^{i+1}}) F_i$. Odpowiednie liczby rozważanych współczynników są teraz równe $2a$ i $2b$. Ponieważ $a > b$, więc $2a > 2b$ i widzimy, że w tym przypadku F_{i+1} również jest s-wielomianem.

Niech $n_{i+1} = 2$. Wtedy $F_{i+1} = (1 + 2x^{3^{i+1}} + x^{2 \cdot 3^{i+1}}) F_i$. Odpowiednie liczby rozważanych współczynników są teraz równe $2a + b$ i $2b + a$. Ponieważ $a > b$, więc $2a + b > 2b + a$ tzn. F_{i+1} jest s-wielomianem. ⊠

Dla danej liczby naturalnej n oznaczmy przez a_n i b_n odpowiednio liczbę jedynek i liczbę dwójek występujących w n-tym wierszu trójkąta Pascala modulo 3. Z powyższego faktu wynika, że różnica $a_n - b_n$ jest zawsze liczbą dodatnią. Można udowodnić:

8.2.2. *Różnica* $a_n - b_n$ *jest zawsze potęgą dwójki.* ([Crux] 1998 168-172).

Suma $a_n + b_n$, to liczba wszystkich tych liczb występujących w n-tym wierszu trójkąta Pascala, które nie są podzielne przez 3.

8.2.3. *Dla każdej liczby naturalnej* n *liczba* $a_n + b_n$ *jest równa* $2^p 3^q$, *gdzie* p *i* q *są odpowiednio liczbami jedynek i dwójek występujących w przedstawieniu liczby* n *w systemie numeracji o podstawie* 3.

D. (Sposób I). Jest to fakt 8.6.2 dla $p = 3$. ⊠

D. (Sposób II). Powtórzymy rozumowanie przeprowadzone w dowodzie 8.2.1. Jeśli $f(x)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{Z}[x]$, to przez $w(f)$ oznaczać będziemy liczbę wszystkich współczynników wielomianu f niepodzielnych przez 3. Przedstawmy liczbę n w zapisie przy podstawie 3:

$$n = n_k 3^k + n_{k-1} 3^{k-1} + \cdots + n_1 3 + n_0,$$

gdzie $n_0, n_1, \dots, n_k \in \{0,1,2\}$. Musimy wykazać, że $w((1+x)^n) = 2^p 3^q$, gdzie liczby p i q są takie jak w tezie.

Przypomnijmy, że

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= (1+x)^{n_k 3^k}(1+x)^{n_{k-1}3^{k-1}}\cdots(1+x)^{n_1 3}(1+x)^{n_0}\\ &\equiv (1+x^{3^k})^{n_k}(1+x^{3^{k-1}})^{n_{k-1}}\cdots(1+x^3)^{n_1}(1+x)^{n_0},\end{aligned}$$

gdzie przystawanie $\equiv$ jest modulo 3. Dla $i = 0, 1, \dots k$ niech

$$F_i = (1+x^{3^i})^{n_i}(1+x^{3^{i-1}})^{n_{i-1}}\cdots(1+x^3)^{n_1}(1+x)^{n_0}.$$

Wystarczy zatem udowodnić, że $w(F_k) = 2^p 3^q$. Dla $k = 0$ jest to oczywiste.

Załóżmy, że to jest prawdą dla wielomianu F_i (dla pewnego $i < k$). Niech a będzie liczbą jego współczynników przystających do 1 modulo 3 niech b będzie liczbą jego współczynników przystających do 2 modulo 3. Zatem $w(F_i) = a + b$. Rozpatrzmy wielomian F_{i+1}. Zauważmy, że

$$F_{i+1} = (1+x^{3^{i+1}})^{n_{i+1}} F_i.$$

Jeśli $n_{i+1} = 0$, to $F_{i+1} = F_i$ i w tym przypadku nie ma co sprawdzać.

Niech $n_{i+1} = 1$. Wtedy $F_{i+1} = (1 + x^{3^{i+1}})F_i$. Odpowiednie liczby rozważanych współczynników są teraz równe $2a$ i $2b$. Zatem

$$w(F_{i+1}) = 2a + 2b = 2(a+b) = 2w(F_i).$$

Niech $n_{i+1} = 2$. Wtedy $F_{i+1} = (1 + 2x^{3^{i+1}} + x^{2\cdot 3^{i+1}})F_i$. Odpowiednie liczby rozważanych współczynników są teraz równe $2a + b$ i $2b + a$. W tym przypadku mamy więc

$$w(F_{i+1}) = (2a+b) + (2b+a) = 3(a+b) = 3w(F_i).$$

Z powyższego wynika, że $w(F_k) = 2^u 3^v$, gdzie u jest liczbą jedynek występujących wśród liczb $n_0, n_1, \dots, n_k$, a v jest liczbą dwójek występujących wśród tych liczb. Oczywiście $u = p$ i $v = q$. ⊠

★ D. J. Orton, *Binomials mod* 3, [MG] 69(447)(1985) 31-32.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Trójkąt Pascala modulo 4

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

```
1
11
121
1331
1 2 1
112211
123 321
13133131
1   2   1
11  22  11
121 2 2 121
133122221331
1 2 3   3 2 1
112233  332211
123 123 321 321
1313131331313131
1       2       1
11      22      11
121     2 2     121
1331    2222    1331
1 2 1   2   2   1 2 1
112211  22  22  112211
123 321 2 2 2 2 123 321
131331312222222213133131
1   2   3       3   2   1
11  22  33      33  22  11
121 2 2 323     323 2 2 121
133122223113      311322221331
1 2 3   1 2 3   3 2 1   3 2 1
112233  112233  332211  332211
123 123 123 123 321 321 321 321
13131313131313133131313131313131
```

```
1
11
1 1
1  1
1   1
11  11
1     1
1 1  1 1
1       1
11      11
1 1    1 1
1  1    1  1
1           1
11          11
1   1     1   1
1 1 1 1  1 1 1 1
1               1
11              11
1 1             1 1
1  1            1  1
1   1           1   1
11  11          11  11
1     1         1     1
1 1  1 1        1 1  1 1
1                       1
11                      11
1 1                     1 1
1  1     11        11     1  1
1       1           1       1
11      11          11      11
1   1   1   1     1   1   1   1
1 1 1 1 1 1 1 1  1 1 1 1 1 1 1 1
```

Rysunek po lewej stronie przedstawia początkowe wiersze trójkąta Pascala modulo 4, z wymazanymi zerami. Po prawej stronie pokazano jak w tym trójkącie rozmieszczone są jedynki.

Przez $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$ i $a_3(n)$ oznaczać będziemy odpowiednio liczby zer, jedynek, dwójek i trójek występujących w n-tym wierszu trójkąta Pascala modulo 4. Dla przykładu, $a_1(7) = a_3(7) = 4$, gdyż w trójkącie Pascala modulo 4, w wierszu o numerze 7 mamy 4 jedynki i 4 trójki.

8.3.1. $a_1(6) = a_2(6) = a_3(6) = 2$, $a_1(47) = a_2(47) = a_3(47) = 16$,
$a_1(11) = a_2(11) = a_3(11) = 4$, $a_1(95) = a_2(95) = a_3(95) = 32$,
$a_1(23) = a_2(23) = a_3(23) = 8$, $a_1(191) = a_2(191) = a_3(191) = 64$.

8.3.2. (K. S. Davis, W. A. Webb, A. Granville).

(1) *Liczby* $a_1(n)$ *i* $a_3(n)$ *są równe wtedy i tylko wtedy, gdy w rozwinięciu dwójkowym liczby* n *istnieją dwie kolejne cyfry będące jedynkami.*

(2) *Jeśli* $a_1(n) \neq a_3(n)$, *to* $a_3(n) = 0$.

(3) *Każda z liczb* $a_1(3)$ *i* $a_3(n)$ *jest albo równa zero albo jest potęgą dwójki.*

★ A. Granville, *Zaphod Beeblebrox's brain and the fifty-ninth row of Pascal's triangle*, [Mon] 99(4)(1992) 318-331; Correction: 104(9)(1997) 848-851.

K. S. Davis, W. A. Webb, *Pascal's triangle modulo* 4, [FQ] 29(1991) 79-83.

F. T. Howard, *Multinomial and q-binomial coefficients modulo* 4 *and modulo* p, [FQ] 31(1993) 53-64.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 Trójkąt Pascala modulo 5

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

```
                        1
                       11
                      121
                     1331
                    14141
                   1    1
                  11    11
                 121   121
                1331  1331
               1414114141
              1    2    1
             11   22   11
            121  242  121
           1331 2112 1331
          141412323214141
         1    3    3    1
        11   33   33   11
       121  313  313  121
      1331 3443 3443 1331
     14141323233232314141
    1    4    1    4    1
   11   44   11   44   11
  121  434  121  434  121
 1331 4224 1331 4224 1331
1414141414141414141414141
1                        1
11                       11
121                      121
1331                     1331
14141                    14141
1    1                   1    1
```

```
                        1
                       11
                      1 1
                     1   1
                    1 1 1
                   1     1
                  11     11
                 1 1    1 1
                1   1 1   1
               1 1 11 1 1
              1          1
             11          11
            1 1          1 1
           1   1  11  1   1
          1 1 1        1 1 1
         1                  1
        11                  11
       1 1    1       1    1 1
      1   1               1   1
     1 1 1               1 1 1
    1          1          1
   11         11         11
  1 1         1 1        1 1
 1   1       1   1       1   1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1                        1
11                       11
1 1                      1 1
1   1                    1   1
1 1 1                    1 1 1
1    1                   1    1
```

Rysunek po lewej stronie przedstawia początkowe wiersze trójkąta Pascala modulo 5, z wymazanymi zerami. Po prawej stronie pokazano jak w tym trójkącie rozmieszczone są jedynki.

8.4.1. *Dla każdej liczby naturalnej n liczba wszystkich niezerowych liczb, występujących w n-tym wierszu trójkąta Pascala modulo 5, jest równa*

$$2^{a_1}3^{a_2}4^{a_3}5^{a_4},$$

gdzie a_1, a_2, a_3 i a_4 są odpowiednio liczbami jedynek , dwójek, trójek i czwórek występujących w przedstawieniu liczby n w systemie numeracji o podstawie 5.

D. Jest to fakt 8.6.2 dla $p = 5$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 Trójkąt Pascala modulo m, dla m ⩾ 6

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

```
              1
             11
             121
            1331
            14 41
           154451
           1 323 1
          11355311
          124242421
         13      31
         143     341
        1513    3151
        1  43    34  1
       11 413  314 11
       1214543 3454121
      1335331331335331
      14 22 44 44 22 41
     154242424424242451
     1 3      2      3 1
    1133     22     3311
    124 3    242    3 421
   13 433   2 2   334 31
   14341 3  22 22  3 14341
  15115133 242242 33151151
  1  2  4 32  4  23 4  2  1
 11 22 44352 44 25344 22 11
 121242421212424212124242121
1333    3333    3333    3331
14  3   3   3   3   3   3  41
```

```
              1
             11
             121
            1331
            14641
           153351
           1616161
          1      1
          11     11
         121    121
         1331   1331
        14641  14641
        153351 153351
       16161611616161
       1      2      1
      11     22     11
      121    242    121
     1331   2662   1331
     14641  21512  14641
    153351 236632 153351
    161616125252521616161
   1      3      3      1
   11     33     33     11
  121    363    363    121
  1331   3223   3223   1331
 14641  35453  35453  14641
 153351 312213 312213 153351
1616161343434334343431616161
1      4      6      4      1
```

```
              1
             11
             121
            1331
            14641
           152251
           1674761
          17533571
          1 4 6 4 1
         1144664411
         125 242 521
        137526625731
        14247 4 74241
       15663744736651
       1634123 3214361
      1717535335357171
      1   4   6   4   1
     11  44  66  44  11
     121 4 4 646 4 4 121
    13314444622644441331
    14645   2 4 2   54641
   152215  224422  512251
   1674365 246 642 5634761
  175371352626626253173571
  1 4 2 4 7   4   7 4 2 4 1
 1144224477  44  7744224411
 125 646 367 4 4 763 646 521
1375622631574444751362265731
14243 4 14643   34641 4 34241
```

```
              1
             11
             121
            1331
            14641
           151151
           1662661
          17388371
          181272181
         1  3  3  1
         11 33 33 11
        121363363121
        1334  6  4331
       14674 66 47641
       151424636424151
      1665661  1665661
      17322371 17322371
     181545181181545181
     1  6  6  2  6  6  1
    11 66 66 22 66 66 11
    121636636242636636121
   1337  3  8668  3  7331
   14617 33 85358 33 71641
  151787363848848363787151
  1668661  2337332  1668661
 17355371 25611652 17355371
 181818181272727272181818181
1        3        3        1
11       33       33       11
```

Początkowe wiersze (bez zer) trójkątów Pascala modulo $6, 7, 8$ i 9.

Przez $b_0(n), b_1(n), \ldots, b_7(n)$ oznaczmy odpowiednio liczby zer, jedynek, ..., siódemek występujących w n-tym wierszu trójkąta Pascala modulo 8.

8.5.1. (A. Granville)

(1) *Każda z liczb* $b_1(n)$, $b_3(n)$, $b_5(n)$, $b_7(n)$ *jest zerem lub jest potęgą dwójki.*

(2) *Jeśli w rozwinięciu dwójkowym liczby* n *nie ma bloku* 11 *i nie ma bloku* 101, *to* $b_3(n) = b_5(n) = b_7(n) = 0$.

(3) *Jeśli w rozwinięciu dwójkowym liczby* n *nie ma bloku* 11 *ale jest blok* 101, *to* $b_1(n) = a_b(n)$. (Granville).

8.5.2. $b_1(27) = b_2(27) = b_3(27) = b_4(27) = b_5(27) = b_6(27) = b_7(27) = 4$,
$b_1(55) = b_2(55) = b_3(55) = b_4(55) = b_5(55) = b_6(55) = b_7(55) = 8$,
$b_1(111) = b_2(111) = b_3(111) = b_4(111) = b_5(111) = b_6(111) = b_7(111)$.

```
                    1
                   11
                   121
                  1331
                  14641
                 15  51
                 165 561
                17155171
                1886 6881
               1964664691
               1 5  2  5 1
              1155 22 5511
              126 52425 621
             13865766756831
             141412323214141
            1555535555355551
            16   88   88   61
           176  868  868  671
           1836 8448 8448 6381
          19196828288282869191
          1   54    6    45   1
         11  594   66   495  11
         121 5434  626  4345 121
        133159774 6886 477951331
        1464646414646464146464641
       15      55      55      51
       165     5 5     5 5     561
      1715    5555    5555    5171
      18865   5   5   5   5   56881
     196415  55  55  55  55  514691
     1 5 565 5 5 5 5 5 5 5 5 565 5 1
    11555115555555555555555551155511
    126  626                 626  621
   1386 6886                6886 6831
   1414664646               6464664141
  1555 2    6              6    2 5551
  16  522   66             66   225  61
 176 5742  626            626  2475 671
 183652162 6886           6886 261256381
191917378264646          646462873719191
1    8  5 8    6         6    8 5  8    1
```

Początkowe wiersze (bez zer) trójkąta Pascala modulo 10.

Dla danej liczby naturalnej n oraz danego $r \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$ przez $c_r(n)$ liczbę wszystkich liczb w n-tym wierszu trójkąta Pascala przystających do r modulo 16.

8.5.3. *Każda z liczb $c_{2s-1}(n)$, gdzie $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, jest równa zero lub jest potęgą dwójki.* (A. Granville).

8.5.4.

(1) *Jeśli $n = 111$ lub $n = 126$, to $c_1(n) = c_2(n) = c_3(n) = c_4(n) = c_5(n) = \cdots = c_{15}(n) = 8$. W przedstawieniu dwójkowym każdej z powyższych liczb n występuje dokładnie sześć jedynek oraz wszystkie zera są razem obok siebie.*

(2) *Jeśli n jest jedną z liczb $239,\ 247,\ 253,\ 254$, to $c_1(n) = c_2(n) = c_3(n) = c_4(n) = \cdots = c_{15}(n) = 16$. W przedstawieniu dwójkowym każdej z powyższych liczb n występuje dokładnie siedem jedynek i przy tym wszystkie zera są razem obok siebie. W tym przypadku $c_0(n)$ jest odpowiednio równe $0, 8, 14, 15$.*

★ A. Granville, *Zaphod Beeblebrox's brain and the fifty-ninth row of Pascal's triangle*, [Mon] 99(4)(1992) 318-331; Correction: 104(9)(1997) 848-851.

J. G. Huard, B. K. Spearman, K. S. Williams, *Pascal's tr. modulo* 8, [EuJC] 19(1998) 45-62.

J. G. Huard, B. K. Spearman, K. S. Williams, *Pascal's tr. modulo* 9, [ActA] 78(1997) 331-349.

D. Małachowski, *Trójkąty Pascala w arytmetykach modulo m*, [Pmgr] 2003.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.6 Trójkąt Pascala modulo p

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.6.1. *Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \geqslant 1$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Żadna z liczb*

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n}$$

nie jest podzielna przez p.

(2) $n = ap^s - 1$, *gdzie* $0 < a < p$, $s \geqslant 1$. ([Ro85]).

D. Jest oczywiste, że jeśli $n < p$, to żadna z liczb $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ nie jest podzielna przez p. Dalej zakładamy, że $n \geqslant p$. Niech

$$n = a_r p^r + a_{r-1} p^{r-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0,$$

gdzie $r \geqslant 0$, $a_r \neq 0$, będzie przedstawieniem p-adycznym liczby n.

(2) $\Rightarrow$ (1). Załóżmy, że $n = ap^s - 1$, $p > a > 0$, $s \geqslant 1$. Wtedy

$$n = (a-1)p^{s-1} + (p-1)p^{s-2} + \cdots + (p-1)p^1 + (p-1)$$

jest przedstawieniem p-adycznym liczby n. Wtedy każde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ma przedstawienie p-adyczne postaci

$$k = b_{s-1} p^{s-1} + b_{s-1} p^{s-2} + \cdots + b_1 p^1 + b_0,$$

gdzie $b_{s-1} \leqslant a - 1$, $b_0, \dots, b_{s-1} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Z twierdzenia Lucasa 7.2.2 mamy więc

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{a-1}{b_{s-1}} \binom{p-1}{b_{s-2}} \cdots \binom{p-1}{b_1} \binom{p-1}{b_0} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Zatem wtedy żadna z liczb $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ nie jest podzielna przez p.

(1) $\Rightarrow$ (2). Załóżmy teraz, że wszystkie liczby $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$ nie są podzielne przez p i niech

$$n = a_r p^r + \cdots + a_1 p + a_0$$

(gdzie $r \geqslant 1$, $a_r \neq 0$) będzie przedstawieniem p-adycznym liczby n. Przypuśćmy, że $a_i < p-1$ dla pewnego $i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$. Z twierdzenia Lucasa 7.2.2 wynika, że wtedy

$$\binom{n}{(p-1)p^i} \equiv \binom{a_i}{p-1} = 0 \pmod p,$$

czyli wtedy p dzieli $\binom{n}{(p-1)p^i}$ i mamy sprzeczność. Zatem $a_0 = a_1 = \cdots a_{r-1} = p-1$ i stąd $n = a_r p^r + (p-1)p^{r-2} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = (a_r - 1)p^r - 1$. ⊠

8.6.2 (J. Fine 1947)**.** *Niech $p \in \mathbb{P}$ i niech $n = a_k p^k + \cdots + a_1 p^1 + a_0$ będzie przedstawieniem p-adycznym liczby naturalnej n. Wówczas w ciągu $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$, występuje dokładnie*

$$(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_k+1)$$

liczb niepodzielnych przez p. ([MR] 9,331, [MR] 46#8842).

D. (Sposób I). Rozważmy w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[x]$ wielomian $(x+1)^n$. Problem sprowadza się do stwierdzenia ile niezerowych jednomianów ma ten wielomian. W pierścieniu $\mathbb{Z}_p[x]$ zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned}
(x+1)^n &= (x+1)^{a_k p^k + \cdots + a_1 p^1 + a_0} \\
&= \left(x^{p^k}+1\right)^{a_k}\left(x^{p^{k-1}}+1\right)^{a_{k-1}} \cdots (x^p+1)^{a_1}(x+1)^{a_0} \\
&= \left(\binom{a_k}{0}x^{a_k p^k} + \binom{a_k}{1}x^{(a_k-1)p^k} + \cdots + 1\right)\left(\binom{a_{k-1}}{0}x^{a_{k-1}p^{k-1}} + \cdots + 1\right) \\
&\quad \cdots \left(\binom{a_1}{0}x^{a_1 p} + \binom{a_1}{1}x^{(a_1-1)p} + \cdots + 1\right)\left(\binom{a_0}{0}x^{a_0} + \binom{a_0}{1}x^{(a_0-1)} + \cdots + 1\right).
\end{aligned}$$

Po wykonaniu wszystkich mnożeń widzimy, że wielomian $(x+1)^n$ jest sumą jednomianów postaci

$$\binom{a_k}{i_k}\binom{a_{k-1}}{i_{k-1}}\cdots\binom{a_1}{i_1}\binom{a_0}{i_0}x^{i_k p^k + i_{k-1}p^{k-1} + \cdots + i_1 p^1 + i_0},$$

gdzie $i_j \leqslant a_j$ dla $j = 0,1,\ldots k$. Jednomianów tego typu jest dokładnie $(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_k+1)$. Wszystkie oczywiście są niezerowe i są parami różne (gdyż rozkład p-adyczny jest jednoznaczny). ⊠

D. (Sposób II). Niech $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ i niech $i = i_k p^k + \cdots + i_1 p + i_0$ będzie przedstawieniem p-adycznym. Wiemy z Twierdzenia Lucasa, że

$$\binom{n}{i} \equiv \binom{a_k}{i_k}\binom{a_{k-1}}{i_{k-1}}\cdots\binom{a_1}{i_1}\binom{a_0}{i_0} \pmod p.$$

Jeśli $i_j > a_j$ dla pewnego j, to $\binom{a_j}{i_j} = 0$ i stąd $p \mid \binom{n}{i}$. Jeśli więc $p \nmid \binom{n}{i}$, to $i_j \leqslant a_j$ dla wszystkich $j = 0,1,\ldots,k$. Zachodzi też odwrotnie: jeśli $i_j \leqslant a_j$ dla $j = 0,1,\ldots,k$, to wszystkie liczby postaci $\binom{a_j}{i_j}$ nie są podzielne przez p i wtedy $p \nmid \binom{n}{i}$. W ciągu $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\ldots$, $\binom{n}{n}$, występuje więc dokładnie tyle liczb niepodzielnych przez p ile jest ciągów $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$ nieujemnych liczb całkowitych takich, że $i_j \leqslant a_j$ dla wszystkich $j = 0,1,\ldots,k$. Ciągów takich jest oczywiście $(a_0+1)(a_1+1)\cdots(a_k+1)$. ⊠

8.6.3. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Dla każdej liczby naturalnej n liczba wszystkich liczb niepodzielnych przez p, występujących w ciągu* $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$, *jest równa*

$$2^{a_1}3^{a_2}4^{a_3}\cdots(p-1)^{a_{p-2}}p^{a_{p-1}},$$

gdzie każde a_i, dla $i = 1, 2, \dots, p-1$, jest liczbą wszystkich cyfr "i" występujących w przedstawieniu liczby n w systemie numeracji o podstawie p.

D. Jest to inne sformułowanie faktu 8.6.2. ⊠

8.6.4 (L. Carlitz 1967)**.** *Niech $p \in \mathbb{P}$ i niech $n = a_kp^k + \cdots + a_1p^1 + a_0$ będzie przedstawieniem p-adycznym liczby naturalnej n. Wówczas w ciągu* $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, *występuje dokładnie*

$$\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+1)\cdots(a_{i-1}+1)(p-1-a_i)a_{i+1}(a_{i+2}+1)\dots(a_k+1)$$

liczb podzielnych przez p i niepodzielnych przez p^2. ([MR] 40#2554, [MR] 46# 8842).

8.6.5. *W trójkącie Pascala modulo p (gdzie $p \in \mathbb{P}$) występuje w jakimś wierszu ciąg $1, 0, a, b$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a(2a+b) \equiv 0 \pmod{p}.$$

([Mon] 8-9(1980) z.E2775).

★ W. A. Broomhead, *Pascal mod p*, [MG] 56(1972) 267-271.
L. O. Cannon, *Locating multiples of primes in Pascal's triangle*, [Cmj] 20(4)(1989) 324-328.
B. Cherowitzo, *Pascal Triangle using Clock Arithmetic - Part I*, Internet: Jay's Corner5, http://www-math.cudenver.edu/∼wcherowi/jcorn5.html.
N. J. Fine, *Binomial coefficients modulo a prime*, [Mon] 54(10)(1947) 589-592.
C. T. Long, *Some divisibility properties of Pascal's triangle*, [FQ] 19(1981) 257-263.
C. T. Long, *Pascal triangle modulo p*, [FQ] 19(1981) 458-463.
C. T. Long, V. E. Hoggatt Jr., *Sets of binomial coefficients with equal products*, [FQ] 12(1974) 71-79.
N. A. Volodin, *Number of multinomial coefficients not divis. by a prime*, [FQ] 32(1994) 402-406.
N. A. Volodin, *Multinomial coefficients modulo a prime*, [Pams] 127(1999) 349-353.

Trójkąt Pascala modulo p, [Mat] 1(1999) 31-32.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.7 Trójkąt Pascala modulo p^s

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

★ E. T. Howard, *Formulas for the number of binomial coefficients divisible by a fixed power of a prime*, [Pams] 37(2)(1973) 358-362.
E. T. Howard, *The number of multinomial coefficients divisible by a fixed power of a prime*, [PacJ] 50(1974) 99-108.
J. G. Huard, K. S. Williams, *On Pascal triangle modulo p^2*, [ColM] 74(1997) 157-165.
M. Sved, *The geometry of the binomial array modulo p^2 and p^3*, [DisM] 92(1991) 395-416.
W. A. Webb, *The number of binomial coefficients in residue classes modulo p and p^2*, [ColM] 60/61(1990) 275-280.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.8 Podzielność liczby $\binom{n}{k}$ przez n

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przez $\gamma(n)$ oznaczamy liczbę wszystkich liczb całkowitych k takich, że $0 < k \leqslant n$ oraz n dzieli $\binom{n}{k}$. Przykłady:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\gamma(n)$	1	1	1	2	4	2	6	4	6	6

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\gamma(n)$	10	5	12	6	8	8	16	10	18	10

8.8.1. $\gamma(n) \geqslant \varphi(n)$. ([Robb]).

8.8.2. *Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, to $\gamma(n) = \varphi(n)$.* ([Robb]).

8.8.3. *Jeśli $n = 2p$, gdzie p jest liczbą pierwszą Mersenne'a, to $\gamma(n) = \varphi(n)$.* ([Robb]).

8.8.4. *Liczby $\gamma(n)$ i $\varphi(n)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $n \nmid \binom{n}{k}$ dla wszystkich k takich, że $0 < k \leqslant n$ oraz $(k, n) = 1$.* ([Robb]).

8.8.5. *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 7$ istnieje liczba naturalna i taka, że $2 \leqslant i \leqslant n/2$ oraz $n \mid \binom{n}{i}$.* ([NAvW] 396).

★ H. Harborth, *Divisibility of binomial coefficients by their row number*, [Mon] 84(1)(1977) 35-37.
I. Murszewska, *Podzielniki symboli Newtona*, [Pmgr] 1999.

Literatura

[ActA] Acta Arithmetica, polskie czasopismo matematyczne.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[ColM] Colloquium Mathematicum, polskie czasopismo matematyczne.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[DisM] Discrete Mathematics, czasopismo matematyczne.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[EuJC] European Journal of Combinatorics. Academic Press, London, (European J. Combin.).

[FQ] The Fibonacci Quarterly, czasopismo matematyczne.

[Gr98] A. Granville, *Binomial coefficients (mod p^q)*, preprint, internet 1998.

[Gran] A. Granville, *Arithmetic properties of binomial coefficients I: Binomial coefficients modulo prime powers*,
`http://mosaic.cecm.sfu.ca/organics/papers/granville/paper/binomial`.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[MR] Mathematical Reviews.

[NAvW] Nieuw Archief voor Wiskunde, (Nieuw Arch. Wisk), holenderskie czasopismo matematyczne.

[Nord] Nordic Mathematical Competition.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[PacJ] Pacific Journal of Mathematics.

[Pams] Proceedings of the American Mathematical Society, (Proc. Amer. Math. Soc.).

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Ro85] N. Robbins, *On the number of binomial coefficients which are divisible by their row number : II*, Canadian Mathematical Bulletin, 28(1985).

[Robb] N. Robbins, *On the number of binomial coefficients which are divisible by their row number*, Canadian Mathematical Bulletin, 23(1982).

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[Wino] I. Winogradow, *Elementy Teorii Liczb*, PWN, Warszawa, 1954.