Podróże po Imperium Liczb

Część 11. Silnie i Symbole Newtona

Rozdział 11

11. Symbole Newtona stowarzyszone z ciągami

Andrzej Nowicki 21 maja 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

11 Symbole Newtona stowarzyszone z ciągami . . . **147**

11.1 Uogólniony współczynnik dwumianowy . . . 147
11.2 Beta ciągi . . . 149
11.3 Alfa ciągi . . . 150
11.4 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Mersenne'a . . . 152
11.5 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami q^n - 1 . . . 153
11.6 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami a^n - b^n . . . 155
11.7 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Fibonacciego . . . 156
11.8 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami trójkątnymi . . . 157
11.9 Symbole Newtona, liczby tetraedralne i uogólnienia . . . 160

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

11 Symbole Newtona stowarzyszone z ciągami

11.1 Uogólniony współczynnik dwumianowy

Załóżmy, że dany jest ciąg $a = (a_n)$ o wyrazach naturalnych. Jeśli n jest nieujemną liczbą całkowitą, to przez a_n^* oznaczać będziemy liczbę naturalną zdefiniowaną następująco:

$$a_n^* = \begin{cases} a_1 a_2 \cdots a_n, & \text{gdy } \; n \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{gdy } \; n = 0. \end{cases}$$

Jeśli n i k są nieujemnymi liczbami całkowitymi, to przez $\left[{n \atop k}\right]_a$ oznaczać będziemy liczbę wymierną zdefiniowaną jako:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = \begin{cases} \dfrac{a_n^*}{a_k^* \cdot a_{n-k}^*}, & \text{gdy } \; n \geqslant k, \\ 0, & \text{gdy } \; n < k. \end{cases}$$

Takie oznaczenia występują np. w [Font], [Goul], [MaN]. Liczby postaci $\left[{n \atop k}\right]_a$ mają angielskie nazwy: "a-nomial coefficients" lub "generalized binomial coefficients".

Liczby postaci $\left[{n \atop k}\right]_a$ są nam znane w przypadku, gdy a jest ciągiem kolejnych liczb naturalnych (to znaczy, gdy $a_n = n$ dla $n \in \mathbb{N}$). W tym przypadku $a_n^* = n!$ oraz liczba $\left[{n \atop k}\right]_a$ pokrywa się z liczbą $\binom{n}{k}$.

11.1.1. $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_a = 1.$

11.1.2. $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_a = \dfrac{a_n}{a_1}.$

11.1.3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_a$, *dla* $n \geqslant k$.

11.1.4. $a_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = a_n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_a$, *dla* $k < n$.

11.1.5. $a_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = a_{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_a$, *dla* $k < n$.

11.1.6. $a_{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = a_n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_a$, *dla* $k < n$.

11.1.7 ([Font]). *Jeśli* $0 < k \leqslant m$, *to*

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_a = \frac{a_m - a_{m-k}}{a_k} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_a + \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_a.$$

D.
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_a - \begin{bmatrix} m-1 \\ k \end{bmatrix}_a &= \frac{a_m^*}{a_k^* a_{m-k}^*} - \frac{a_{m-1}^*}{a_{k-1}^* a_{m-k-1}^*} = \frac{a_m^*}{a_k^* a_{m-k}^*} - \frac{a_{m-1}^*}{a_k^* a_{m-k}^*} a_{m-k} \\ &= \frac{a_m^* - a_{m-1}^* a_{m-k}}{a_k^* a_{m-k}^*} = \frac{a_{m-1}^*}{a_{k-1}^* a_{m-k}^*} \frac{a_m - a_{m-k}}{a_k} \\ &= \frac{a_m - a_{m-k}}{a_k} \begin{bmatrix} m-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_a . \quad \boxtimes\end{aligned}$$

11.1.8. *Dla k, m i n naturalnych takich, że $0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$, zachodzi równość*

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n-k \\ m-k \end{bmatrix}_a .$$

Ustawmy uogólnione współczynniki dwumianowe w tablicę, będącą odpowiednikiem trójkąta Pascala:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_a & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_a & & & \\ & & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_a & & \\ & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_a & \\ \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_a & & \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}_a \\ & & & & \dots & & & & \end{array}$$

Każdy z tych współczynników (poza brzegowymi), otoczony jest przez sześć innych współczynników. Mnożąc co drugi z nich otrzymujemy dwa iloczyny. Okazuje się, że są one równe:

11.1.9 ([Goul])**.** *Jeśli $0 < k < n$ są liczbami naturalnymi, to*

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_a .$$

11.1.10 ([Goul])**.**

$$\begin{bmatrix} n-2 \\ k-2 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k+2 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+2 \\ k \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+2 \\ k+2 \end{bmatrix}_a .$$

11.1.11 ([Goul])**.** *Jeżeli c jest liczbą całkowitą, to*

$$\begin{bmatrix} n-c \\ k-c \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k+c \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+c \\ k \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} n-c \\ k \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n \\ k-c \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} n+c \\ k+c \end{bmatrix}_a .$$

U. W artykule H. W. Goulda [Goul] można znaleźć więcej podobnych tożsamości. $\boxtimes$

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.2 Beta ciągi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $a = (a_n)$ będzie ciągiem o wyrazach naturalnych. Mówić będziemy, że a jest *β-ciągiem* ([MaN]), jeśli każda liczba postaci $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a$ jest całkowita.

11.2.1. *Każdy ciąg stały jest β-ciągiem. Jeśli $c \in \mathbb{N}$ i $a_n = c$ dla $n \in \mathbb{N}$, to każda liczba postaci $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a$ jest równa 1.*

11.2.2. *Każdy ciąg geometryczny o naturalnym ilorazie jest β-ciągiem. Jeśli $c \in \mathbb{N}$ i $a_n = c^n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to dla wszystkich $n \geqslant k$ zachodzi równość*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = c^{(n-k)k}.$$

11.2.3. *Niech $a_n = n!$ dla $n \geqslant 0$. Wówczas $a_n^* = 1! \cdot 2! \cdots n! = 1^n \cdot 2^{n-1} \cdots n^1$ oraz*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a = \frac{1! \cdot 2! \cdots n!}{1! \cdot 2! \cdots k! \cdot 1! \cdot 2! \cdots (n-k)!} = \frac{(k+1)! \cdot (k+2)! \cdots (k+(n-k))!}{1! \cdot 2! \cdots (n-k)!}$$

i jest to liczba naturalna. Ciąg (a_n) jest więc β-ciągiem. ([Bhar]).

11.2.4. *Niech $a_n = n!$ dla $n \geqslant 0$. Wtedy $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a$ jest nieparzyste $\iff$ $k = 0$ lub $k = n$.*

11.2.5. *Iloczyn dwóch β-ciągów jest β-ciągiem. Jeśli $a = (a_n)$ oraz $b = (b_n)$ są β-ciągami, to ciąg $c = (a_n b_n)$ jest β-ciągiem oraz*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_c = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_b.$$

11.2.6. *Niech $a, b \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, $b \geqslant 2$. Definiujemy ciąg (x_n) w następujący sposób:*

$$x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_{2n} = ax_{2n-1} - x_{2n-2},\ x_{2n+1} = bx_{2n} - x_{2n-1},$$

gdzie $n \geqslant 1$. Wtedy, dla dowolnych liczb naturalnych m i n, liczba $x_{m+1}x_{m+2} \cdots x_{m+n}$ jest podzielna przez $x_1 x_2 \cdots x_n$. ([OM] St Petersburg 2001).

11.2.7. *Niech $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Jeśli, dla wszystkich $n, k \in \mathbb{N}$, liczba*

$$\frac{f(n+1)f(n+2)\cdots f(n+k)}{f(1)f(2)\cdots f(k)}$$

jest całkowita, to $f(0) = 0$. ([OM] St Petersburg 2002).

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.3 Alfa ciągi

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Ważną klasą przykładów β-ciągów stanowią ciągi, które nazywać będziemy α-ciągami. Mówić będziemy, że dany ciąg $a = (a_n)$ (o wyrazach naturalnych) jest *α-ciągiem* ([MaN]), jeśli dla dowolnych liczb naturalnych n i m zachodzi równość

$$\boxed{\Big(a_n, a_m\Big) = a_{(n,m)}},$$

tzn. $\mathrm{nwd}(a_n, a_m) = a_{\mathrm{nwd}(n,m)}$. Knuth i Wiff w [KnW] takie ciągi nazywają *regularnie okresowymi.* W [EvP] (strona 70) takie ciągi nazywane są "divisibility sequences".

11.3.1. *Dla dowolnego α-cięgu (a_n) zachodzi implikacja*

$$n \mid m \Longrightarrow a_n \mid a_m,$$

dla wszystkich $n.m \in \mathbb{N}$.

11.3.2. *Jeśli (a_n) jest α-ciągiem, to istnieje taki ciąg (b_n) liczb naturalnych, że*

$$a_n = \prod_{d|n} b_d,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Iran 2001).

11.3.3. *Ciąg stały oraz ciąg kolejnych liczb naturalnych są α-ciągami.*

11.3.4. *Jeśli s jest ustaloną liczbą naturalną, to ciągi (ns) i (n^s) są α-ciągami.*

11.3.5. *Jeśli $a = (a_n)$ jest α-ciągiem, to dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych n, k istnieją takie liczby całkowite $X(n,k)$ oraz $Y(n,k)$, że*

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_a = X(n,k) \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_a + Y(n,k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_a.$$

D. Niech n i k będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Istnienie liczb $X(n,k)$, $Y(n,k)$ jest oczywiste w przypadku, gdy $n \leqslant k$. Załóżmy dalej, że $n > k$ i oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik liczb a_{n-k} oraz a_{k+1}. Istnieją wówczas takie liczby całkowite u, v, że

$$d = ua_{n-k} + va_{k+1}.$$

Wykorzystaliśmy znaną własność największego wspólnego podzielnika. Z równości

$$d = (a_{n-k}, a_{k+1}) = a_{(n-k,k+1)} = a_{(n+1,k+1)} = (a_{n+1}, a_{k+1})$$

wynika, że d dzieli liczbę a_{n+1}. Zatem $a_{n+1} = pd$, gdzie p jest pewną liczbą naturalną. Bez trudu stwierdzamy, że liczby całkowite $X(n,k) = pu$ i $Y(n,k) = pv$ spełniają żądane warunki. ⊠

11.3.6. *Każdy α-ciąg jest β-ciągiem.* ([G-kp] s.353).

D. Wynika to natychmiast z 11.3.5 i indukcji matematycznej ⊠

11.3.7. *Jeśli (a_n) jest α-ciągiem i s jest liczbą naturalną, to iloczyn każdych s kolejnych wyrazów ciągu (a_n) jest podzielny przez $a_s^* = a_1a_2\cdots a_s$.* Dowód. *Jest to wniosek z* 11.3.6.

11.3.8. *Ciąg (a_n), o wyrazach naturalnych, jest α-ciągiem wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Big(a_m, a_n\Big) = \Big(a_{m-n}, a_n\Big),$$

dla wszystkich liczb naturalnych $m > n$. ([S59] 282).

D. Konieczność warunku wynika z własności największego wspólnego dzielnika: $(m, n) = (m - n, n)$. Mamy bowiem: $(a_m, a_n) = a_{(m,n)} = a_{(m-n,n)} = (a_{m-n}, a_n)$.

Aby pokazać dostateczność tego warunku przypuśćmy, że istnieją takie liczby naturalne m i n, że $(a_m, a_n) \neq a_{(m,n)}$. Ze zbioru wszystkich par (m, n), dla których zachodzi nierówność $(a_m, a_n) \neq a_{(m,n)}$, wybierzmy parę (m_0, n_0) o najmniejszej sumie $m_0 + n_0$. Ponieważ $(a_m, a_m) = a_m = a_{(m,m)}$, więc $m_0 \neq n_0$. Możemy założyć, że $m_0 > n_0$. Rozpatrzmy liczby naturalne $m_0 - n_0$, n_0. Suma tych liczb jest równa m_0; jest więc ostro mniejsza od sumy m_0+n_0. Mamy więc równość: $(a_{m_0-n_0}, a_{n_0}) = a_{(m_0-n_0,n_0)}$. Stąd wynika:

$$(a_{m_0}, a_{n_0}) = (a_{m_0-n_0}, a_{n_0}) = a_{(m_0-n_0,n_0)} = a_{(m_0,n_0)},$$

czyli $(a_{m_0}, a_{n_0}) = a_{(m_0,n_0)}$; wbrew temu, że $(a_{m_0}, a_{n_0}) \neq a_{(m_0,n_0)}$. ⊠

11.3.9. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem zmiennej x o naturalnych współczynnikach. Definiujemy ciąg (b_n) przyjmując:*

$$b_1 = f(0), \quad b_{n+1} = f(b_n), \quad dla\ n \in \mathbb{N}.$$

Ciąg ten jest α-ciągiem. ([Kw] 1/1989 M1120).

D. Wystarczy, na mocy 11.3.8 wykazać, że $(b_m, b_n) = b_{(m-n,n)}$. Oznaczmy:

$$F_n(x) = \underbrace{f(f \dots (f}_{n}(x)) \dots)).$$

Jest to wielomian o współczynnikach całkowitych, przy czym $b_m = F_m(0)$ i $b_m = F_{m-n}(b_n)$, dla $m > n$. Zauważmy, że $F_n(x) = b_n + xQ_n(x)$, gdzie $Q_n(x)$ jest również wielomianem o współczynnikach całkowitych. Przy $m > n \geqslant 1$ mamy:

$$(b_m, b_n) = (F_{m-n}(b_n), b_n) = (b_{m-n} + b_nQ_{m-n}(b_n), b_n) = (b_{m-n}, b_n).$$

Ostatnia rówość wynika z własności największego wspólnego dzielnika: $(a + kb, b) = (a, b)$. ⊠

11.3.10. *Jeśli (a_n), (b_n) są α-ciągami, to ciąg $(c_{b_{a_n}})$ jest również α-ciągiem.*

11.3.11. *Iloczyn dwóch α-ciągów nie musi być α-ciągiem. Ciąg $\Big(n(2^n-1)\Big)$, będący iloczynem dwóch α-ciągów, nie jest α-ciągiem. Jest natomiast β-ciągiem.*

11.3.12 (Hillman, Hoggatt 1972). *Jeśli (x_n) jest α-ciągiem, to*

$$\operatorname{nwd}\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_x\right) = \operatorname{nwd}\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_x, \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_x\right),$$

dla $n > k \in \mathbb{N}$. ([MR] 47#3287).

★ J. P. Bézivin, A. Pethö, A. J. van der Poorten, *A full characterization of divisibility sequences*, preprint, 13 stron.

A. P. Hilman, V. E. Hoggatt, *A proof of Gould's Pascal hex. conjecture*, [FQ] 10(1972) 565-568.

A. P. Hilman, V. E. Hoggatt, *Exponents of primes in generalized binomial coefficients*, [Jrei] 262/263 (1973) 375-380.

J. M. Holte, *Residues of generalized binomial coefficients modulo a prime*, preprint, 14 stron, internet 2000.

M. Majer, *Uogólnione współczynniki dwumianowe*, [Pmgr] 2001.

J. Sandor, *A note on certain arithmetic functions*, [Sand] 218-221 (o funkcjach $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takich, że $(a, b) = 1 \Longrightarrow (f(a), f(b)) = 1$).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.4 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Mersenne'a

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy (patrz [N-8]), że liczbą *Mersenne'a* nazywamy każdą liczbę postaci

$$M_n = 2^n - 1.$$

Symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem (M_n) oznaczać będziemy przez $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_M$.

11.4.1. *Ciąg (M_n), kolejnych liczb Mersenne'a, jest α-ciągiem.* ([S59] s.373, [N-8]).

Początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_M$:

1
1, 1
1, 3, 1
1, 7, 7, 1
1, 15, 35, 15, 1
1, 31, 155, 155, 31, 1
1, 63, 651, 1395, 651, 63, 1
1, 127, 2667, 11811, 11811, 2667, 127, 1
1, 255, 10795, 97155, 200787, 97155, 10795, 255, 1
1, 511, 43435, 788035, 3309747, 3309747, 788035, 43435, 511, 1.

11.4.2. *Każda liczba postaci $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_M$ jest nieparzysta.*

11.4.3. *Jeśli $f(x) = 2x+1$, to ciąg (b_n) zdefiniowany w* 11.3.9 *jest ciągiem liczb Mersenne'a.*

11.4.4. *Jeśli $0 < k < l < n$ oraz $k + l < n$, to* ([Zw] 2000)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} n-k \\ l \end{bmatrix}_M = \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_M \begin{bmatrix} n-l \\ k \end{bmatrix}_M.$$

11.4.5. *Jeśli $0 < k < l < n$, to liczby $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_M$ i $\begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_M$ nie są względnie pierwsze.* ([Zw] 2000).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo
11.5 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami q^n - 1
oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozważać będziemy ciąg

$$\overline{q} = (q^n - 1),$$

gdzie $q > 1$ jest liczbą naturalną. Jest to tzw. *ciąg liczb Gaussa*. W tym przypadku liczby $\left[{n \atop k}\right]_{\overline{q}}$ oznacza się przez $\left[{n \atop k}\right]_q$. Angielska nazwa tych liczb: "Gaussian coefficients" lub "q-binomial coefficients". W szczególnym przypadku, gdy $q = 2$, ciąg $(q^n - 1)$ jest ciągiem liczb Mersenne'a i liczby $\left[{n \atop k}\right]_2$ są odpowiednio równe liczbom $\left[{n \atop k}\right]_M$ z poprzedniego podrozdziału.

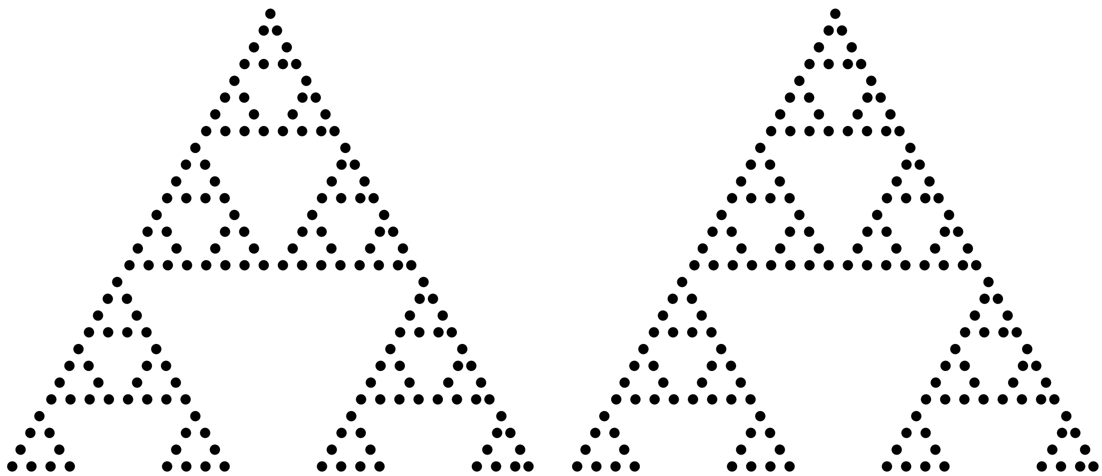
11.5.1. *Ciąg $\overline{q}$ jest α-ciągiem.* ([S59] s.11, [Bern]).

D. Równość $(q^n - 1, q^m - 1) = q^{(n,m)} - 1$ wykazaliśmy w [N-8], w rozdziale o liczbach postaci $a^n - b^n$. ⊠

Początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_3$:

1
1, 1
1, 4, 1
1, 13, 13, 1
1, 40, 130, 40, 1
1, 121, 1210, 1210, 121, 1
1, 364, 11011, 33880, 11011, 364, 1
1, 1093, 99463, 925771, 925771, 99463, 1093, 1
1, 3280, 896260, 25095280, 75913222, 25095280, 896260, 3280, 1.

Zlikwidujmy przecinki, liczby nieparzyste zaznaczmy czarnymi kropkami, a miejsca z liczbami parzystymi zamalujmy na biało. Otrzymamy wtedy następujący obrazek przedstawiający powyższy trójkąt Pascala w arytmetyce modulo 2.



Lewa strona dotyczy symboli Newtona stowarzyszonych z ciągiem $(3^n - 1)$. Prawa natomiast strona dotyczy zwykłych symboli Newtona. Widzimy, że po obu stronach mamy identyczne rysunki. Ta identyczność podpowiada nam, że można udowodnić następujące stwierdzenie.

11.5.2. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 \equiv \binom{n}{k} \pmod 2$, *dla wszystkich* $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_5$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1,\ 1 \\ 1,\ 6,\ 1 \\ 1,\ 31,\ 31,\ 1 \\ 1,\ 156,\ 806,\ 156,\ 1 \\ 1,\ 781,\ 20306,\ 20306,\ 781,\ 1 \\ 1,\ 3906,\ 508431,\ 2558556,\ 508431,\ 3906,\ 1 \\ 1,\ 19531,\ 12714681,\ 320327931,\ 320327931,\ 12714681,\ 19531,\ 1 \\ 1,\ 97656,\ 317886556,\ 40053706056,\ 200525284806,\ 40053706056,\ 317886556,\ 97656,\ 1. \end{array}$$

Początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_7$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1,\ 1 \\ 1,\ 8,\ 1 \\ 1,\ 57,\ 57,\ 1 \\ 1,\ 400,\ 2850,\ 400,\ 1 \\ 1,\ 2801,\ 140050,\ 140050,\ 2801,\ 1 \\ 1,\ 19608,\ 6865251,\ 48177200,\ 6865251,\ 19608,\ 1 \\ 1,\ 137257,\ 336416907,\ 16531644851,\ 16531644851,\ 336416907,\ 137257,\ 1. \end{array}$$

Odpowiednie trójkąty Pascala modulo 2 dla liczb $\left[{n \atop k}\right]_5$ i $\left[{n \atop k}\right]_7$ są takie same jak trójkąt Pascala modulo 2 dal zwykłych symboli Newtona. Wynika to z następującego stwierdzenia.

11.5.3. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_7 \equiv \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_5 \equiv \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_3 \equiv \binom{n}{k} \pmod 2$, *dla wszystkich* $n, k \in \mathbb{N}_0$.

11.5.4. *Jeśli* $f(x) = qx + q - 1$, *to ciag* (b_n) *zdefiniowany w* 11.3.9 *jest ciągiem liczb Gaussa.*

11.5.5. *Niech* F *będzie skończonym* q*-elementowym ciałem. Niech* $V = F^n$ *będzie* n*-wymiarową przestrzenią liniową nad* F*. Liczba wszystkich* k*-wymiarowych podprzestrzeni liniowych przestrzeni* V *jest równa* $\left[{n \atop k}\right]_q$. ([LiM] s.69).

11.5.6. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$, *gdy* $0 < \ k \leqslant n$. ([LiM] s.71).

11.5.7. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$, *gdy* $0 < k \leqslant n$. ([Font]).

11.5.8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{cases} 0, & gdy\ \ 2 \nmid n, \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{n-1}), & gdy\ \ 2 \mid n. \end{cases}$ ([An-E], 71).

11.5.9. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_q$. ([An-E], 73).

11.5.10. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość:*

$$x^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (x-1)(x-q)\cdots(x-q^{k-1}). \quad \text{([LiM] s.71).}$$

11.5.11. $\lim\limits_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$. ([Ands] 36).

D. Wynika to ze znanej równości $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x^b-1} = \frac{a}{b}$. ⊠

11.5.12 (Clark 1995).

$$\begin{bmatrix} na \\ nb \end{bmatrix}_q \equiv \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{q^{n^2}} \pmod{\Phi_n(q)^2},$$

gdzie Φ_n jest n-tym wielomianem cyklotomicznym.

11.5.13. *Liczba naturalna $n \geqslant 3$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{bmatrix} m \\ n-2m \end{bmatrix}_q \equiv 0 \pmod{m},$$

dla wszystkich m takich, że $0 \leqslant 2m \leqslant n$. (H.W. Gould [MR] 46#5225).

U. Podobne twierdzenie zachodzi dla zwykłych symboli Newtona. ⊠

★ G. E. Andrews, *Properties of Gaussian polynomials*, [Ands], 35-45.
G. E. Andrews, K. Eriksson, *Gaussian polynomials*, [An-E], 64-74.
L. Carlitz, *A combinatorial property of q-Eulerian numbers*, [Mon] 82(1)(1975) 51-54.
W. E. Clark, *q-analogue of a binomial coefficient congruence*, [Ijms] 18(1995) 197-200.
H. Cohn, *Projective geometry over F_1 and the Gaussian binomial coefficients*, [Mon] 111(6)(2004) 487-495.
R. D. Fray, *Congruence properties of ordinary and q-binomial coefficients*, [Duke] 34 (1967) 467-480.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.6 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami a^n - b^n

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.6.1. *Jeśli $a > b$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to $(a^n - b^n)$ jest α-ciągiem.* ([G-kp] s.174).

11.6.2. *Jeśli $a > b$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to $\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right)$ jest α-ciągiem.*

D. Niech $w_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}$. Równość $(w_n, w_m) = w_{(n,m)}$ wykazaliśmy w [N-8], w rozdziale o liczbach postaci $a^n - b^n$. ⊠

Z powyższego stwierdzenia, zastosowanego dla $a = 10$ oraz $b = 1$, otrzymujemy:

11.6.3. *Niech $e_n = 11\ldots 1$ oznacza liczbę naturalną zbudowaną z n jedynek. Ciąg (e_n) jest α-ciągiem.* ([Kw] 2/2010 M2166 s.22-23).

11.6.4 (Pethö 1987). *Dla każdego α-ciągu (a_n) istnieje taki ciąg (b_n) postaci*

$$b_n = n^s \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i^n - b_i^n}{a_i - b_i},$$

(gdzie $s \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(a_i, b_i) = 1$), że $a_n \mid b_n$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([EvP] 71).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.7 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami Fibonacciego

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

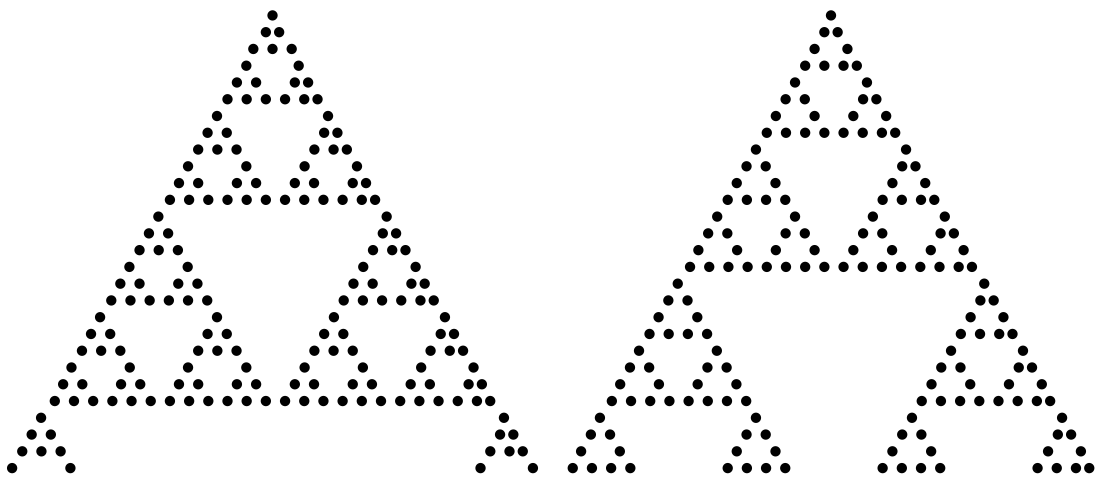
Przypominamy (patrz [N-7]), że liczbą Fibonacciego nazywamy każdy wyraz ciągu $u = (u_n)$ określonego wzorami:

$$\begin{cases} u_1 & = & 1 \\ u_2 & = & 1 \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} + u_n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dobrze wiadomo (patrz na przykład [N-7]), że (u_n) jest α-ciągiem. Liczby postaci $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_u$ oznacza się również przez $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_F$. Angielska nazwa tych liczb: "Fibonomial coefficients" Spójrzmy na początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_u$ oraz na reszty z dzielenia przez 2 liczb występujących w tych wierszach.

1	1
1, 1	1, 1
1, 1, 1	1, 1, 1
1, 2, 2, 1	1, 0, 0, 1
1, 3, 6, 3, 1	1, 1, 0, 1, 1
1, 5, 15, 15, 5, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 8, 40, 60, 40, 8, 1	1, 1, 0, 0, 0, 1, 1
1, 13, 104, 260, 260, 104, 13, 1	1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1

Po prawej stronie mamy początkowe wiersze modulo 2. Gdy zlikwidujemy przecinki, wszystkie zera pomalujemy na biało, a jedynki zaznaczymy czarnymi kropkami, to otrzymamy następujący obrazek.



Lewa strona dotyczy symboli Newtona stowarzyszonych z ciągiem liczb Fibonacciego. Prawa natomiast strona dotyczy zwykłych symboli Newtona.

11.7.1. (Hoggatt 1967).

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_u = u_{k+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_u + u_{n-k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_u .$$

11.7.2. *Liczba naturalna $n \geqslant 3$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{bmatrix} m \\ n-2m \end{bmatrix}_u \equiv 0 \pmod{m},$$

dla wszystkich takich m, że $0 \leqslant 2m \leqslant n$. (H.W. Gould [MR] 46#5225).

U. Podobne twierdzenie zachodzi dla zwykłych symboli Newtona.

11.7.3 (B. Wilson 1998). *Jeśli p jest liczbą pierwszą różną od 2 i 5, to*

$$\begin{bmatrix} nr \\ kr \end{bmatrix}_u \equiv u_{r+1}^{k(n-k)r} \binom{n}{k} \pmod{p}.$$

11.7.4. *Niech p i q będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Definiujemy ciąg (v_n) przyjmując:*

$$\begin{cases} v_1 & = & 1 \\ v_2 & = & p \\ v_{n+2} & = & pv_{n+1} + qv_n, \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ciąg (v_n) jest α-ciągiem. (Hoggatt, Domański).

★ G. L. Alexanderson, L. F. Klosinski, *A Fibonacci analogue of Gaussian binomial coefficients*, [FQ] 12(1974) 129-132.

P. Domański, *Uogólnione liczby Fibonacciego*, [Dlt] 1(1979).

V. E. Hoggatt, *Fibonacci numbers and generalized binomial coefficients*, [FQ] 5(1967) 383-400.

D.L. Wells, *Residue counts modulo three for the Fibonacci triangle*, Applications of Fibonacci numbers, Vol.6, (Pullman, WA, 1994), 521-536, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

D.L. Wells, *The Fibonacci and Lucas triangles modulo* 2, [FQ] 32(1994) 111-123.

B. Wilson, *The Fibonacci triangle modulo p*, [FQ] 36(1998) 194-203.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.8 Symbole Newtona stowarzyszone z liczbami trójkątnymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liczbami *trójkątnymi* nazywamy liczby postaci

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1), \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Przykłady: $t_1 = 1$, t_3, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, $t_5 = 15$, $t_6 = 21$. Dodatkowo przyjmujemy, że $t_0 = 0$. Liczbom trójkątnym poświęciliśmy cały rozdział w [N-8].

Symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem liczb trójkątnych oznaczać będziemy przez $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_t$.

11.8.1 (Hoggatt 1974). *Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych n, k zachodzi równość*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t = \binom{n}{k}\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}.$$

([FQ] 12(1974), [MG] 93(528)(2009)).

D. Rozważana równość zachodzi gdy $k > n$. W tym przypadku po obu stronach mamy zera. Załóżmy, że $k \leqslant n$. Wtedy $\binom{n}{k}\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k} = \frac{n!(n+1)!}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+1)!}$ oraz

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t &= \frac{t_n^*}{t_k^a st \cdot t_{n-k}^*} = \frac{t_1 t_2 \cdots t_n}{t_1 \cdots t_k \cdot t_1 t_2 \cdots t_{n-k}} \\
&= \frac{\frac{1}{2^n}(1\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(n(n+1))}{\frac{1}{2^n}(1\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots(k(k+1))\cdot(1\cdot 2)(2\cdot 3)\cdots((n-k)(n-k+1))} \\
&= \frac{n!(n+1)!}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k+1)!}
\end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

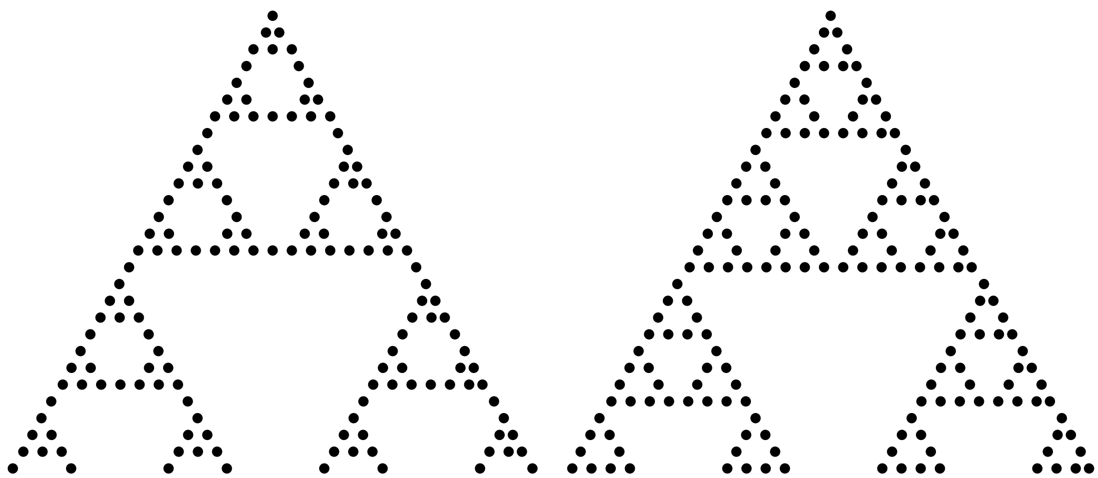
Z powyższej równości wynika, że każde $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_t$ jest liczbą całkowitą. Mamy zatem:

11.8.2 (Hoggatt 1974)**.** *Ciąg liczb trójkątnych jest β-ciągiem.*

Spójrzmy na początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_t$ oraz na reszty z dzielenia przez 2 liczb występujących w tych wierszach.

1	1
1, 1	1, 1
1, 3, 1	1, 1, 1
1, 6, 6, 1	1, 0, 0, 1
1, 10, 20, 10, 1	1, 0, 0, 0, 1
1, 15, 50, 50, 15, 1	1, 1, 0, 0, 1, 1
1, 21, 105, 175, 105, 21, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
1, 28, 196, 490, 490, 196, 28, 1	1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1

Po prawej stronie mamy początkowe wiersze modulo 2. Gdy w tym trójkącie zlikwidujemy przecinki i wszystkie zera pomalujemy na biało, a jedynki zaznaczymy czarnymi kropkami, to otrzymamy następujący obrazek.



Lewa strona dotyczy symboli Newtona stowarzyszonych z ciągiem liczb trójkątnych. Prawa natomiast strona dotyczy zwykłych symboli Newtona.

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące dwie równości.

11.8.3. $(n-k+1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t = \binom{n}{k}\binom{n+1}{k=1}.$

11.8.4. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t = \dfrac{n+1}{(k+1)(n-k+1)}\binom{n}{k}^2.$

Przez C_n oznaczamy n-tą liczbę Catalana. Przypomnijmy (patrz podrozdział o liczbach Catalana), że

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Łatwo sprawdzić, że

11.8.5. $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}_t = (2n+1)C_n^2.$

Stąd otrzymujemy:

11.8.6. *Liczba* $\left[\begin{smallmatrix} 2n \\ n \end{smallmatrix}\right]_t$ *jest kwadratowa wtedy i tylko wtedy, gdy liczba* $2n+1$ *jest kwadratowa.* ([MG] 93(528)(2009) 449-455).

Z równości 11.8.5 wynika również, że $\left[\begin{smallmatrix} 2n \\ n \end{smallmatrix}\right]_t$ jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy, gdy C_n jest liczbą nieparzystą. Wiadomo (patrz na przykład 9.2.11), że C_n jest nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą Mersenne'a. Mamy zatem:

11.8.7. *Liczba* $\left[\begin{smallmatrix} 2n \\ n \end{smallmatrix}\right]_t$ *jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, gdy* n *jest postaci* 2^s-1, *gdzie* $s \geqslant 0$. ([MG] 93(528)(2009) 449-455).

Zanotujmy następne stwierdzenia.

11.8.8 (Hoggatt 1974). $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_t + \cdots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_t = C_{n+1}$. ([FQ] 12(1974), [MG] 93(528)(2009)).

11.8.9 (T. Koshy, M. Salmassi, 2009). *Wszystkie liczby* $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix}\right]_t$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix}\right]_t$, $\dots$, $\left[\begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix}\right]_t$ *są nieparzyste wtedy i tylko wtedy, gdy* $2 = 2^s - 2$, *gdzie* $s \in \mathbb{N}$. ([MG]).

Liczbą *prostokątną* nazywa się każdą liczbę naturalną postaci $o_n = n(n+1)$. Angielska nazwa tych liczb to *oblong numbers*. Symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem liczb prostokątnych oznaczmy przez $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_o$. Zauważmy, że dla wszystkich $n, k \in \mathbb{N}_0$ zachodzi równość:

11.8.10. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_o = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t.$

Zatem:

11.8.11. *Ciąg liczb prostokątnych jest* β*-ciągiem.*

★ H.E. Hoggatt Jr., *Triangular numbers*, [FQ] 12(1974) 221-230.

T. Koshy, M. Salmassi, *Tribinomial coefficients and Catalan numbers*, [MG] 93(528)(2009) 449-455.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

11.9 Symbole Newtona, liczby tetraedralne i uogólnienia

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się symbolami Newtona stowarzyszonymi z liczbami trójątnymi. Oznaczaliśmy te symbole przez $\left[{n \atop k}\right]_t$. Udowodniliśmy (patrz 11.8.1), że

$$\left[{n \atop k}\right]_t = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix}$$

i na podstawie tego udowodniliśmy, że każde $\left[{n \atop k}\right]_t$ jest liczbą całkowitą. W podobny sposób wykażemy teraz, że wszystkie symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem liczb tetraedralnych są również liczbami całkowitymi.

Liczbami *tetraedralnymi* nazywamy liczby postaci

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \quad \text{gdzie } n \in \mathbb{N}.$$

Przykłady: $T_1 = 1$, $T_2 = 4$, $T_3 = 10$, $t_4 = 20$, $t_5 = 35$. Dodatkowo przyjmujemy, że $T_0 = 0$. Liczbom tetraedralnym poświęciliśmy jeden z podrozdziałów w [N-8]. Symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem liczb tetraedralnych oznaczać będziemy przez $\left[{n \atop k}\right]_T$.

11.9.1. *Dla dowolnych nieujemnych liczb całkowitych n, k zachodzi równość*

$$\left[{n \atop k}\right]_T = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \binom{n}{k+2} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \binom{n+1}{k+2} \\ \binom{n+2}{k} & \binom{n+2}{k+1} & \binom{n+2}{k+2} \end{vmatrix}.$$

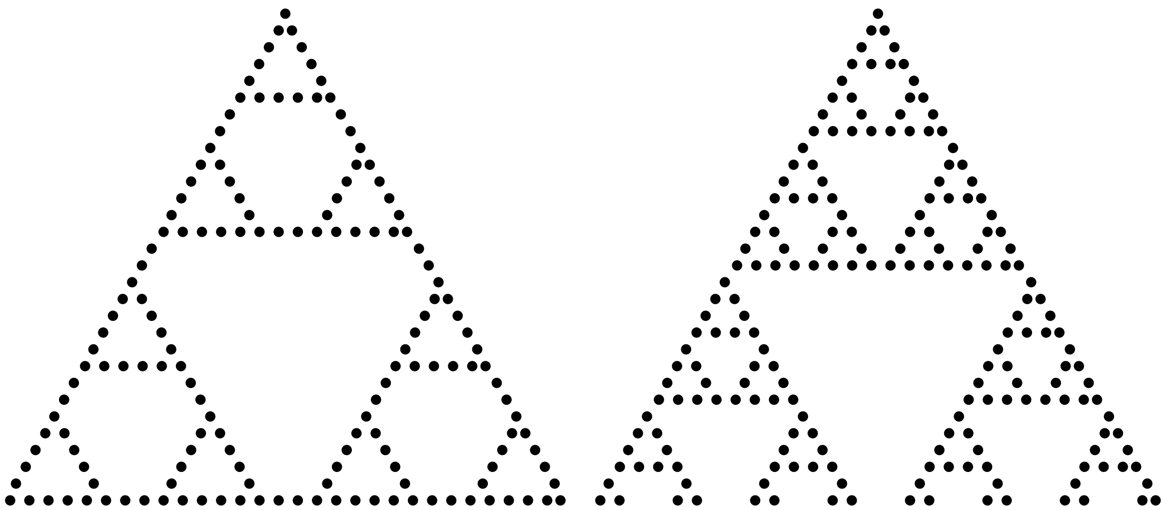
Jest to szczególny przypadek stwierdzenia 11.9.4, którym zajmiemy się później. Stąd wynika, że każde $\left[{n \atop k}\right]_T$ jest liczbą całkowitą. Mamy zatem:

11.9.2. *Ciąg liczb tetraedralnych jest β-ciągiem.*

Spójrzmy na początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_T$.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1, 1 \\ 1, 4, 1 \\ 1, 10, 10, 1 \\ 1, 20, 50, 20, 1 \\ 1, 35, 175, 175, 35, 1 \\ 1, 56, 490, 980, 490, 56, 1 \\ 1, 84, 1176, 4116, 4116, 1176, 84, 1 \\ 1, 120, 2520, 14112, 24696, 14112, 2520, 120, 1 \\ 1, 165, 4950, 41580, 116424, 116424, 41580, 4950, 165, 1 \\ 1, 220, 9075, 108900, 457380, 731808, 457380, 108900, 9075, 220, 1. \end{array}$$

W arytmetyce modulo 2 ten trójkąt Pascala przedstawia się następująco:



Lewa strona dotyczy symboli Newtona stowarzyszonych z ciągiem liczb tetraedralnych. Prawa natomiast strona dotyczy zwykłych symboli Newtona.

Niech teraz $s \geqslant 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech

$$v_n = \binom{n+s-1}{s}$$

dla $n = 1, 2, \cdots$. Oznaczmy przez $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(s)}$ symbole Newtona stowarzyszone z ciągiem (v_n). W szczególności każde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(1)}$ jest zwykłym symbolem Newtona $\binom{n}{k}$. Ponadto,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(2)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_t, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(3)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_T$$

dla wszystkich $n, k \in \mathbb{N}_0$. W rozdziale pierwszym udowodniliśmy:

11.9.3. *Niech $n \geqslant k \geqslant 0$ oraz $p \geqslant 0$. Wtedy:*

$$\begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \cdots & \binom{n}{k+p} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \cdots & \binom{n+1}{k+p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+p}{k} & \binom{n+p}{k+1} & \cdots & \binom{n+p}{k+p} \end{vmatrix} = \frac{\binom{n+p}{p+1}\binom{n-1+p}{p+1}\cdots\binom{n-(k-1)+p}{p+1}}{\binom{k+p}{p+1}\binom{k-1+p}{p+1}\cdots\binom{p+1}{p+1}},$$

gdy $k \geqslant 1$. Jeśli $k = 0$, to wyznacznik ten jest równy 1. (patrz **??**).

Dla $p = s - 1$, prawa strona powyższej równości jest równa:

$$\frac{\binom{(n-k)+1+s-1}{s}\binom{(n-k)+2+s-1}{s}\cdots\binom{(n-k)+k+s-1)}{s}}{\binom{1+s-1}{s}\binom{2+s-1}{s+1}\cdots\binom{k+s-1}{s}} = \frac{v_{(n-k)+1}v_{(n-k)+2}\cdots v_n}{v_1 v_2 \cdots v_k} = \frac{v_n^*}{v_k^* \cdot v_{n-k}^*}.$$

Udowodniliśmy zatem następujące stwierdzenie.

11.9.4. *Dla każdego $s \geqslant 1$ oraz dowolnych $n, k \in \mathbb{N}_0$ zachodzi równość:*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{(s)} = \begin{vmatrix} \binom{n}{k} & \binom{n}{k+1} & \dots & \binom{n}{k+s-1} \\ \binom{n+1}{k} & \binom{n+1}{k+1} & \dots & \binom{n+1}{k+s-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n+s-1}{k} & \binom{n+s-1}{k+1} & \dots & \binom{n+s-1}{k+s-1} \end{vmatrix}.$$

Każda więc liczba postaci $\left[{n \atop k}\right]_{(s)}$ jest liczbą całkowitą. Mamy zatem:

11.9.5. *Niech $v_n = \binom{n+s-1}{s}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $s \geqslant 1$ ciąg (v_n) jest β-ciągiem.*

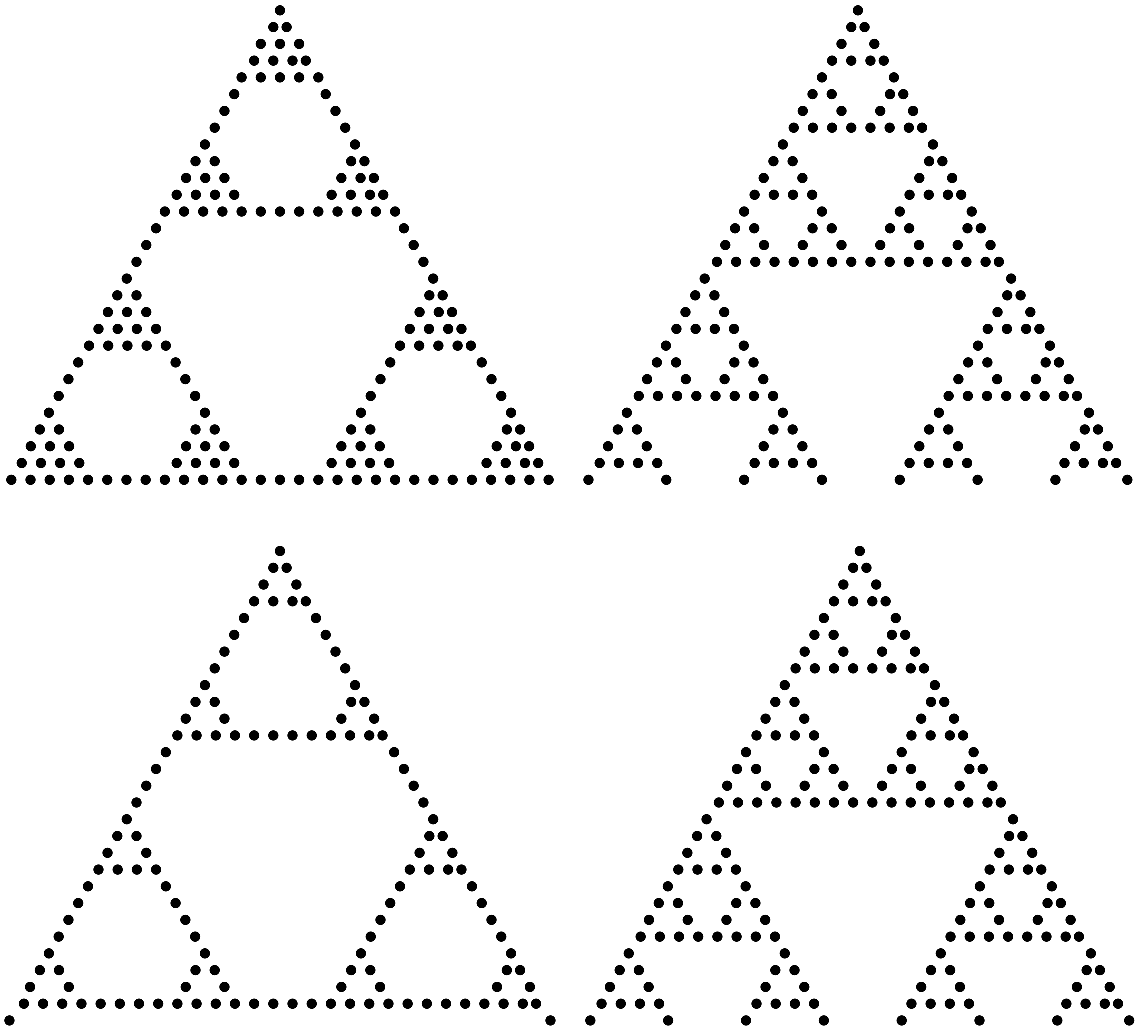
Spójrzmy na liczby $\left[{n \atop k}\right]_{(s)}$ dla $s = 4$ oraz $s = 5$. Oto początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_{(4)}$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1, 1 \\ 1, 5, 1 \\ 1, 15, 15, 1 \\ 1, 35, 105, 35, 1 \\ 1, 70, 490, 490, 70, 1 \\ 1, 126, 1764, 4116, 1764, 126, 1 \\ 1, 210, 5292, 24696, 24696, 5292, 210, 1 \\ 1, 330, 13860, 116424, 232848, 116424, 13860, 330, 1 \\ 1, 495, 32670, 457380, 1646568, 1646568, 457380, 32670, 495, 1. \end{array}$$

Początkowe wiersze trójkąta Pascala z liczbami $\left[{n \atop k}\right]_{(5)}$:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1, 1 \\ 1, 6, 1 \\ 1, 21, 21, 1 \\ 1, 56, 196, 56, 1 \\ 1, 126, 1176, 1176, 126, 1 \\ 1, 252, 5292, 14112, 5292, 252, 1 \\ 1, 462, 19404, 116424, 116424, 19404, 462, 1 \\ 1, 792, 60984, 731808, 1646568, 731808, 60984, 792, 1 \\ 1, 1287, 169884, 3737448, 16818516, 16818516, 3737448, 169884, 1287, 1. \end{array}$$

W arytmetyce modulo 2 otrzymujemy następujące obrazki:



Lewe strony dotyczą symboli Newtona stowarzyszonych z ciągiem (v_n) odpowiednio dla $s = 4$ i $s = 5$. Prawe natomiast strony dotyczą zwykłych symboli Newtona.

Literatura

[An-E] G. E. Andrews, K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge Univerity Press, 2004.

[Ands] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[Bern] B. C. Berndt, *Number Theory in the Sprit of Ramanujan*, Student Mathematical Library 34, AMS 2006.

[Bhar] M. Bhargava, *The factorial function and generalizations*, The American Mathematical Monthly, 107(9)(2000) 783-799.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Duke] Duke Mathematical Journal, (Duke Math. J.).

[EvP] G. Everest, A. van der Poorten, I. Shparlinski, T. Ward, *Recurrence Sequences*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 104, AMS, 2003.

[Font] M. G. Fontené, *Généralization d'une formule connue,* Nouvelles annales de mathématiques, 4(15)(1915), 112.

[FQ] The Fibonacci Quarterly, czasopismo matematyczne.

[G-kp] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka Konkretna*, PWN, Warszawa, 1996.

[Goul] H. W. Gould, *Equal products of generalized binomial coefficient,* The Fibonacci Quarterly, 9(1971), 337-346.

[Ijms] International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. Univ. Central Florida, Orlando, (Internat. J. Math. Sci.).

[Jrei] Journal für die Reine und Angewandte Mathematik de Gruyter, Berlin, (J. Reine Angew Math.).

[KnW] D. E. Knuth, H. S. Wiff, *The power of a prime that divides a generalized binomial coefficient,* Jurmal für die reine und angewandte Mathematik, 396(1989), 212-219.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[LiM] W. Lipski, W. Marek, *Analiza Kombinatoryczna II,* Warszawa 1986.

[MaN] M. Majewski, A. Nowicki, *From Generalized Binomial Symbols to β- and α-sequences,* PNG Journal of Mathematics Computing & Education, 4(1998), 73-78.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[MR] Mathematical Reviews.

[N-7] A. Nowicki, *Ciągi Rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.7, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[N-8] A. Nowicki, *Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby*, Podróże po Imperium Liczb, cz.8, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[Sand] J. Sándor, *Geometric Theorems, Diophantine Equations, and Arithmetic Functions*, American Research Press, Rehoboth, 2002.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.