

Podróże po Imperium Liczb

**09 Sześciiany, Bikwadraty
i Wyższe Potęgi**

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Aktualizacja: 24 kwietnia 2012

Wstęp	1
1 Sześciiany	5
1.1 Cyfry sześciianów	6
1.2 Lustrzane odbicia sześciianów	7
1.3 Cyfry sześciianów w różnych systemach numeracji	8
1.4 Sumy cyfr sześciianów	9
1.5 Końcowe cyfry sześciianów	12
1.6 Własności sześciianów	13
1.7 Istnienie lub nieistnienie pewnych sześciianów	14
1.8 Różnice dwóch sześciianów	15
1.9 Odwrotności sześciianów	15
1.10 Różne fakty i zadania z sześciianami	17
2 Sumy sześciianów	19
2.1 Sumy dwóch sześciianów liczb całkowitych	19
2.2 Sumy dwóch sześciianów - różne rozkłady	19
2.3 Równanie $x^3 + y^3 = z^3$	22
2.4 Równanie $x^3 + y^3 = z^n$	22
2.5 Sumy dwóch sześciianów i kolejne liczby naturalne	23
2.6 Sumy dwóch sześciianów i liczby wymierne	24
2.7 Sumy trzech sześciianów	25
2.8 Równanie $x^3 + y^3 + z^3 = a$	27
2.9 Równanie $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$	29
2.10 Równanie $x^3 + y^3 + z^3 = mxyz$	31
2.11 Liczby postaci $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$	31
2.12 Sumy czterech i więcej sześciianów	33
2.13 Sumy n sześciianów	35
2.14 Sumy sześciianów kolejnych liczb całkowitych	36
2.15 Sumy sześciianów w różnych systemach numeracji	39
2.16 Sumy i sześciiany	39

3	Krzywe eliptyczne	41
3.1	Struktura grupowa zbioru $E(k)$	41
3.2	Podstawowe fakty o krzywych eliptycznych	42
3.3	Równoliczność zbiorów związanych z krzywymi eliptycznymi	44
3.4	Liczba punktów nad ciałami skończonymi	45
3.5	Krzywe eliptyczne postaci $y^2 = x^3 + a$	46
3.6	Krzywe eliptyczne postaci $y^2 = x^3 + ax$	52
3.7	Krzywa $y^2 = x^3 - x + m^2$	54
3.8	Równanie $my^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$	55
3.9	Równanie $ay^2 + by + c = dx^3$	56
3.10	Różne fakty i zastosowania krzywych eliptycznych	56
4	Równania diofantyczne trzeciego stopnia	57
4.1	Równania $ax^3 + by^3 = c$	57
4.2	Równania trzeciego stopnia dwóch zmiennych	59
4.3	Równania $ax^2 + by^2 = cz^3$	60
4.4	Równania $ax^3 + by^3 = cz^3$	61
4.5	Równania trzeciego stopnia trzech zmiennych	62
4.6	Równania trzeciego stopnia czterech zmiennych	64
5	Bikwadraty	65
5.1	Cyfry bikwadratów	66
5.2	Sumy dwóch bikwadratów	68
5.3	Sumy trzech bikwadratów	69
5.4	Sumy czterech i więcej bikwadratów	71
5.5	Dodatkowe fakty i zadania o bikwadratach	71
5.6	Równanie $ax^4 + by^2 = c$	72
5.7	Równanie $ax^4 + by^4 = cz^2$	74
5.8	Równanie $ax^4 + bx^2y^2 + cy^4 = dz^2$	77
5.9	Różne równania diofantyczne 4-tego stopnia	78
6	Piąte i wyższe potęgi	81
6.1	Piąte potęgi	81
6.2	Równania diofantyczne 5-tego stopnia	84
6.3	Szóste potęgi	85
6.4	Siódme potęgi	87
6.5	Ósme potęgi	89
6.6	Dziewiąte potęgi	90
6.7	Dziesiąte i wyższe potęgi	90
7	Dowolne potęgi	93
7.1	Potęgi i postępy arytmetyczne	93
7.2	Sumy n-tych potęg	95
7.3	Problem Waringa	98
7.4	Potęgi oraz trójki i czwórki liczb naturalnych	98
7.5	Równanie $f(x,y) = m$. Twierdzenia Thuego i Mordella	100
7.6	Równania diofantyczne dowolnych stopni	101
7.7	Liczby pełnopotęgowe	102
7.8	Ciągi i zbiory liczb potęgowych	104
7.9	Różne fakty i zadania o liczbach potęgowych	106

8	Problemy Prouhet-Tarry-Escotta	109
8.1	Sformułowanie problemu, oznaczenia i historia	109
8.2	Równoważne sformułowania	110
8.3	Twierdzenia o PTE-parach	111
8.4	PTE-pary stopnia 2	113
8.5	PTE-pary stopnia 3	117
8.6	PTE-pary stopnia 4	119
8.7	PTE-pary stopnia 5	120
8.8	PTE-pary stopni większych od 5	121
8.9	PTE-pary i rozbicia zbiorów	122
8.10	Różne zadania stowarzyszone z PTE problemami	123
9	Równania wykładnicze	125
9.1	Równanie $x^m - y^n = 1$	125
9.2	Równanie $a^x - b^y = c$	127
9.3	Równanie $a^x + b^y = c^z$	128
9.4	Różne równania wykładnicze	129
10	Potęgi w pierścieniach \mathbf{Z}_m	131
10.1	Liczby $\gamma_s(n)$	131
10.2	Okresowość funkcji γ	132
10.3	Elementy postaci x^s w ciałach \mathbf{Z}_p	134
10.4	Elementy postaci x^s w pierścieniach \mathbf{Z}_{p^n}	135
10.5	Sumy elementów postaci x^s w pierścieniach \mathbf{Z}_m	136
10.6	Wielkie Twierdzenie Fermata w \mathbf{Z}_n	138
10.7	Różne fakty i zadania o potęgach w \mathbf{Z}_m	138
11	Sześciany w pierścieniach \mathbf{Z}_m	139
11.1	Sześciany w ciałach \mathbf{Z}_p	139
11.2	Sześciany w pierścieniach \mathbf{Z}_{2^n}	140
11.3	Sześciany w pierścieniach \mathbf{Z}_{3^n}	142
11.4	Sześciany w pierścieniach \mathbf{Z}_{p^n}	142
11.5	Różności o sześcianach w \mathbf{Z}_m	144
12	Bikwadraty, piąte potęgi, ... w pierścieniach \mathbf{Z}_m	147
12.1	Bikwadraty w \mathbf{Z}_m	147
12.2	Piąte potęgi w \mathbf{Z}_m	149
12.3	Szóste potęgi w \mathbf{Z}_m	150
12.4	Siódme potęgi w \mathbf{Z}_m	151
12.5	Ósme potęgi w \mathbf{Z}_m	152
12.6	Dziewiąte potęgi w \mathbf{Z}_m	153
12.7	Dziesiąte potęgi w \mathbf{Z}_m	153
	Spis cytowanej literatury	154
	Skorowidz nazwisk	161
	Skorowidz	164

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Adler A., 63, 123
Alonso J., 138
Andžāns A., 154
Andreescu T., 154, 158
Andrica D., 154
Aubry A., 120
- Bailey A., 21, 30, 31
Bajak A., 17
Balasubramaniana R., 71, 98
Barbara R., 77
Bastein L., 112, 154
Baszmaĳkov M.I., 154
Beardon A.F., 97
Beck M., 26
Bednarek W., 70, 154
Beerensson R.G., 102
Bennett C.D., 22
Bennett M.A., 101, 127, 128
Berlow S.L., 154
Berndt B.C., 154
Bernik V.I., 154
Bessy de B.F., 19
Bisman C., 117
Blanc, 73
Boltianski W.G., 154
Bondarenko A.V., 154
Borkowska J., 35
Borwein P., 154
Bouniakowsky V., 26, 33
Bremner A., 154
Browkin J., 127, 154
Brown E., 43, 45, 154
Brown K., 31, 38, 154
Brown O.E., 155
Bryński M., 154
Bucharest G.M., 59
Bumby R.T., 74
- Carlitz L., 149
Case S.I., 89
Cassels J.W.S., 31
Catalan E., 125
Cel J., 72, 97
Cesaro E., 114
Chentzov N.N., 158
Chernick J., 155
Cohen H., 43, 56, 64, 77, 127, 128, 155
Cohn J., 72
Crussol, 121
Cucurezeanu I., 154
Cunningham A., 114
- Czakyrĳan K., 155
- Dardis J.A., 21
Davenport H., 21, 43, 46, 155
Dawson R.J.MacG., 138
Demyanenko V., 34
Dence J.B., 137, 139, 140, 147, 149
Desboves, 76
Deshouillersa J.M., 71, 98
Dickson L.E., 21, 22, 35, 38, 61, 64, 69, 77, 78, 80, 98, 102, 114, 138, 155
Djukić D., 155
Doduniekow S., 155
Dorwart H.L., 123, 155
Dresa F., 71, 98
Dressler R.E., 40
Dynkin J., 155
- Elkies N., 69, 70
Ellison W.J., 98
Erickson M., 19, 43, 155
Escott E.B., 110–112, 155
Euler, 47, 49, 69, 96, 113, 126
Evans R.J., 154
Everest G., 51
- Fermat, 21, 22, 47, 49
Finkelstein R., 64
Fomin D.V., 155
Frolov M., 111, 155
Furdui O., 80
- Gabowicz J.A., 64
Galpĳerin G.A., 155
Gelca R., 154
Genkin S.A., 155
Genocchi, 78
Gerardin A., 20, 26, 60, 114, 117–120
Geronimus A., 138
Gerono, 48
Gerson ben L., 126
Glass A.M.W., 22
Gleason A.M., 155
Gloden A., 118, 121, 123, 155
Goide L.R., 20
Goldbach, 113
Goldberg M., 123
Golomb S.W., 104
Górski A., 15
Granville A., 104
Greenwood R.E., 155
Grigorĳan A.A., 158

- Grossman H.D., 123
Gutenmacher W.L., 159
Guy R.K., 35, 97, 98, 104, 127–129, 154, 156
Guzicki W., 56
- Hall M., 51
Hardy G.H., 19, 31, 156
Hasse H., 45
Hilbert D., 98
Husemöller D., 156
- Ingalls C., 154
Ionin Yu.I., 138
Itenberg I.W., 155
Iwanow S.W., 154
- Jadrenko M.I., 159
Janković V., 155
Jeśmanowicz L., 128
Jegorow A.A., 138, 159
Jeleński S., 156
Johnson L.L., 102
Jonquieres, 48, 49
- Karno Z., 35
Kartaszow I.W., 159
Kato K., 156
Kelly L.M., 155
Kempner A.J., 34
Ko Chao, 127
Koblitz N., 156
Kochas K.P., 154
Konarski J., 56
Konjagin S.W., 158
Kotowa A., 138
Kuczma Marcin, 156
Kuczyńska E., 112
Kuosa N., 121
Kurlandczyk L., 17, 56, 107
Kurokawa N., 156
- Lagrange, 58, 75, 98
Lander L.J., 68, 82, 95, 107, 120, 122
Lebesgue, 49, 51, 78, 126, 127
Ledwożyw M., 56
Lee H., 156
Leech J., 20, 128
Legendre A-M., 77
Lehmer D.H., 28, 122
LeLionnais F., 156
Letac, 121
LeVeque W.J., 125, 127
Lewandowska M., 156
Li S-Y.R., 123
Linnik, 34
- Liu A., 22
Ljunggren W., 74
Lucas E., 73, 75, 77
Lunggren W., 72
Lurje B., 56
Lutz, 43
Lyness R.C., 123
- MacHale D., 31, 51
Mahler K., 27, 80
Małowski A., 94, 103, 104 50, 51, 53, 66, 71, 73,
75–77, 81, 83, 85, 88, 102, 103, 113–120,
132, 140, 144, 148, 150–153
Martin A., 83, 114
Matić I., 155
Mazur, 42
Melnikow O.W., 154
Melzak Z.A., 156
Meyrignac J-Ch., 121
Michaiłowski W.I., 159
Michajłow I., 102
Mignotte M., 127
Mihăilescu P., 125–127
Miller J.C.P., 28
Miot E., 120
Mnich W., 102
Mollin R.A., 19, 51, 157
Mordell L.J., 26, 28, 31, 42, 43, 46, 51, 52, 56, 59,
64, 69, 74, 77, 80, 100–102, 157
Moret, 73
Mossner, 85
Myers B.T., 43, 154
- Nagell T., 27, 43, 77, 80, 136, 157
Narkiewicz W., 22, 102, 157
Nathanson M.B., 19, 35, 157
Nicholson J.W., 117, 120
Norie, 71
Nowicki A., 157
- O'Flynn J., 38
Ottinger, 60
- Panow A.A., 64
Parker T., 40
Parkin, 82, 95
Paterson J.O., 71
Pawłowski H., 157
Pepin, 47, 48, 56, 76
Petrović N., 155
Pillai S.S., 128
Pine E., 26
Pla J., 123
Plotkin A.I., 138
Pocklington H.C., 77, 78

- Pollock F., 114
 Postnikov M.M., 22, 158
 Prouhet M.E., 110, 122, 158

 Rabbot Z.M., 159
 Rademacher H., 98, 158
 Ragnarsson C.J., 77
 Ramanujan, 19, 29
 Rempała J., 154
 Ribenboim P., 127
 Richmond H.W., 28, 80
 Roberts J.B., 123, 158
 Rosenstiel C.R., 21
 Rosenstiel E., 21
 Rotkiewicz A., 95, 102
 Rusin D., 158

 Sadowniczjij W.A., 158
 Saito S., 156
 Sandor J., 19, 52, 60, 64, 87, 129, 158
 Santos D.A., 158
 Savchev S., 158
 Scher, 82
 Schinzel A., 27, 102, 158
 Scolem T., 58
 Seidl, 82
 Selfridge J.L., 95
 Sentance W.A., 104
 Shklarsky D.O., 158
 Shuwen Ch., 121
 Siegel C.L., 42, 46
 Sierpiński W., 19, 26, 35, 52, 61, 71, 78, 129, 158
 Silverman J.H., 21, 43, 56, 159
 Sinha T.N., 159
 Śliwa J., 127
 Small Ch., 137, 138, 159
 Smart N.P., 52, 101, 159
 Smyth C.J., 121, 122
 Solovjev J.P., 159
 Sprague R., 40
 Sprague S.R., 40
 Srinivasan A.K., 31
 Störmer, 60
 Stanley R.P., 103
 Steen L.A., 159
 Stein W., 56, 159
 Straszewicz S., 154, 159
 Szekely G.J., 22
 Sznirelman L., 159
 Szurek M., 102, 159
 Szymiczek K., 102, 129

 Tarrant W., 26
 Tarry G., 110–112, 120–122, 159
 Tate J., 159

 Terquem, 76
 Thue A., 58, 100, 101
 Tołpygo A.K., 155
 Toeplitz O., 98, 158
 Tomalczyk W., 157
 Toom A.L., 159

 Ulas M., 38
 Uspienski W., 155

 Vakil R., 22
 Vazzana A., 19, 43, 155

 Ward T., 51
 Waring E., 98
 Wasilev N.B., 159
 Werebrusow, 69
 Wieferich A., 34, 98
 Wilenskij I.J., 154
 Wiles A., 22
 Williams K.S., 154
 Woollett M.F.C., 28
 Wróblewski J., 21, 69, 83, 87–91, 97
 Wright E.M., 31, 123, 156, 159
 Wyszenskij W.A., 159

 Yaglom I.M., 158
 Yan S.Y., 43, 159
 Yarbrough K., 26

 Zelator K., 80
 Żuk I.K., 154

Skorowidz

- bikwadrat, 3, 65, 66, 68, 69, 71–73, 147–149
- charakterystyka ciała, 41, 44, 45, 57
- ciąg, 35, 95, 106
 - arytmetyczny, 14, 15, 30, 33, 44, 72, 93–96, 104, 118
 - cyfr, 12
 - kolejnych liczb naturalnych, 13, 95
 - kolejnych liczb pierwszych, 106
 - rozwiązań, 63
 - skończony, 57, 109–112, 115–118, 122
 - sześcianów, 6, 13, 35
 - trójkąt, 99
- ciało, 41, 44, 45, 57, 131, 134, 136, 139
- cyfry, 81, 85, 122
 - bikwadratów, 66, 67
 - ostatnie, 12, 13
 - początkowe, 6, 66
 - sześcianów, 6–10, 12, 13
- część całkowita, 2, 97, 98, 141
- część torsyjna grupy, 42, 46, 52
- czwórka liczb całkowitych, 16, 28, 29, 33, 68, 70, 84, 98
- długość PTE-pary, 95, 109, 111, 121
- dwunasta potęga, 90
- dyskryminant wielomianu, 43
- dziesiąta potęga, 90, 153
- dziewiąta potęga, 90, 153
- element kwadratowy, 52, 131, 139
- funkcja, 26, 132
 - φ , 2, 93, 94, 132, 135, 136, 142, 148–152
 - bijekcja, 44, 45, 57, 141, 143
 - multiplikatywna, 131, 132
 - okresowa, 132, 133
 - z \mathbb{N} do \mathbb{N} , 11, 68
- generator grupy, 47, 50, 134, 135
- geometria rzutowa, 41
- granica funkcji, 98
- grupa
 - beztorsyjna, 50, 51, 55
 - cykliczna, 50, 134, 135, 139, 147
 - $G(p)$, 136
 - krzywej eliptycznej, 41–43, 46, 47, 49–52, 55
 - multiplikatywna, 134, 135
 - skończenie generowana, 42
- hipoteza, 25, 34, 95
 - Catalana, 125, 126
 - Granville’a, 104
- iloczyn macierzy, 32
- IMO, 1, 16, 95
 - Longlist, 6, 15
 - Shortlist, 17, 24, 36, 59
- indukcja matematyczna, 11, 12, 105, 113, 137, 147
- izomorfizm grup, 42, 47, 49, 50, 52, 53, 55, 57
- jedenasta potęga, 90
- kanoniczna postać Weierstrassa, 41
- kolejne liczby
 - całkowite, 13, 16, 23, 24, 36–38, 68, 71, 94, 95, 104
 - nieparzyste, 13, 94
 - pierwsze, 106
- kongruencja, 49, 52, 93–95, 134–137, 140, 141, 147, 149, 152
- krzywa eliptyczna, 41–47, 49–57, 77, 122
- liczba
 - e , 107, 138
 - n' , 7
 - Fibonacciego, 62
 - Hardy’ego-Ramanujana, 19
 - kwadratowa, 3, 10, 13, 15, 19, 37, 38, 46, 63, 69, 70, 73, 74, 83, 98
 - $N(k)$, 109, 110, 112
 - palindromiczna, 7, 8, 66, 67, 81, 85
 - pełnopotęgowa, 102–104
 - pierwsza, 7, 14, 19, 23, 33, 45, 50, 52, 61, 63, 66, 68, 73, 76, 81–83, 85, 88, 95, 102, 106, 126, 131, 132, 134–140, 142, 143, 145, 147–152
 - postaci $\gamma_s(n)$, 131, 132, 134, 142–144, 148, 150
 - potęgowa, 104
 - rzeczywista, 17, 37, 43, 84, 96, 97, 111, 112, 118, 120
 - trójkątna, 49
 - wymierna, 24–26, 30, 34, 44
 - złożona, 95, 138
 - zespółona, 43, 50, 100, 110, 111, 123
- liczby względnie pierwsze, 12–14, 19–21, 25, 30, 31, 36, 43, 61, 68, 75, 93, 94, 96, 101, 111, 118–120, 127, 129, 131, 132, 135, 143
- logarytm, 107, 138
- lustrzane odbicie, 7, 66, 81, 85, 88
- macierz, 31, 32
- Maple, 1, 7, 12, 15–17, 20–23, 28, 29, 36, 38, 39, 46, 48,
- nierówność, 12, 16, 25, 109, 112, 128, 141

nwd, 1, 16, 20, 74, 75, 134–136, 142, 148–152
 nww, 1, 105

okres, 132

Olimpiada Matematyczna
 Białoruś, 87
 Bośnia-Hercegowina, 63
 Brazylia, 79
 Bułgaria, 26, 33, 59, 80
 Estonia, 13
 Grecja, 16
 Holandia, 33, 34
 Hong-Kong, 23
 Indie, 33, 63, 83
 Iran, 113
 Irlandia, 16, 36
 Korea, 79, 106
 Moskwa, 62, 63
 Norwegia, 61
 Polska, 17, 36, 71, 78
 Rosja, 10, 59, 95
 St Petersburg, 14
 Szwecja, 122
 Ukraina, 12
 W.Brytania, 60, 62, 128
 Węgry, 23, 37
 ZSRR, 128

ósma potęga, 89, 152

para
 liczb całkowitych, 27, 37, 60, 74
 liczb naturalnych, 17, 23, 37, 47, 103
 liczb wymiernych, 24
 PTE, 109

piąta potęga, 23, 81–84, 120, 149, 150

pierścień \mathbb{Z}_m , 131, 132, 134–144, 147–153

pierścień ułamków, 33

pierwiastek
 pierwotny z jedynki, 50
 wielomianu, 110, 112, 139
 rzeczywisty, 37, 84, 96, 97
 wielokrotny, 41, 43
 wymierny, 97

podzbiór, 106, 122
 mnożyliwy, 33

podzielność
 przez 3, 30, 32, 33, 142, 144
 przez 4, 94, 104, 147, 149
 przez 6, 30, 34
 przez 7, 24, 30
 przez 8, 30, 49, 126, 147, 149
 przez 9, 9, 30, 142
 przez n , 36
 przez p , 83, 132, 135–137, 142–144, 148–152
 przez 13, 30

przez 24, 30

postać Weierstrassa krzywej eliptycznej, 41

potęga
 dwójki, 16, 19, 35, 36, 58, 101, 104, 122, 126, 128, 129, 138, 140, 141, 147, 149–153
 liczby pierwszej, 23, 132, 135–137, 142–144, 148–152
 piątki, 127–129, 144, 149
 siódemki, 14, 129, 151
 trójki, 63, 91, 126–129, 142, 151

powerful numbers, 102

problem
 otwarty, 21, 27, 68, 72, 82, 83, 86, 104
 Prouhet-Tarry-Escotta, 3, 109
 Waringa, 35, 98

pte-para, 109–123

punkt
 krzywej eliptycznej, 41–43, 45, 46, 50, 55
 całkowity, 43, 47, 49–52, 54, 55
 wymierny, 43, 44, 47, 52, 53
 w nieskończoności, 41
 wymierny, 73

pytanie, 10, 16, 23, 24, 27, 38, 40, 79, 110, 128

ranga grupy, 52, 55

reszta z dzielenia, 9, 91, 95, 101, 131, 134–136, 143, 144

równanie, 69
 diofantyczne, 82, 86, 114
 n zmiennych, 16
 czterech zmiennych, 16, 28–31, 33, 52, 64, 68, 69, 77, 78, 80, 82, 84, 88, 90, 91
 dwóch zmiennych, 23, 24, 27, 37, 38, 46–49, 51, 55–60, 73, 78, 79, 84, 87, 90, 100, 101, 123, 126, 127
 jednej zmiennej, 37, 97, 139, 147, 150, 153
 n zmiennych, 36, 95, 136
 pięciu zmiennych, 34, 102
 trzech zmiennych, 15, 16, 22, 23, 27, 30, 31, 60–63, 68, 74–77, 79, 80, 84, 87, 96, 101, 138

Fermata, 22

funkcyjne, 26
 wykładnicze, 127–129

równoliczność zbiorów, 44, 45, 57, 122

rozkład kanoniczny, 102, 132

różnica, 13, 15, 72, 103, 110

rozwiązanie, 57
 całkowite, 27, 33, 34, 36, 37, 46, 48, 49, 51, 55–63, 73, 75, 76, 80, 87, 114, 115, 123, 127–129
 kongruencji, 93, 136
 naturalne, 15, 16, 22, 23, 27, 28, 30, 31, 36–38, 47, 48, 51, 53, 57, 59, 60, 62–64, 68–70,

- 72–80, 82, 84, 86, 87, 90, 91, 95, 96, 101, 102, 119, 127, 128
- rzeczywiste, 37, 57, 96
- w pierścieniu, 136–139, 141, 147, 150, 152, 153
- wymierne, 24, 30, 37, 47, 52, 56, 57
- zerowe, 61, 80
- rząd
- elementu, 43, 50, 52
- grupy, 42, 43, 50, 134, 135, 139, 147
- siódma potęga, 87, 88, 151
- silnia, 11, 95, 106, 138
- składowa spójności, 43
- średnia arytmetyczna, 106
- stopień PTE-pary, 109–122
- styczna, 41
- suma, 13, 39, 40, 63, 71, 72, 83, 86–90, 94, 97, 106, 137, 138
- n -bikwadratów, 71, 149
- n -sześcianów, 35–39, 145
- cyfr, 9–11, 68, 122
- czterech bikwadratów, 71
- czterech kwadratów, 98
- czterech sześcianów, 33, 34
- dwóch bikwadratów, 68, 69
- dwóch kwadratów, 19
- dwóch sześcianów, 19–25, 32, 120, 144
- dzięciu sześcianów, 34
- mnogościowa, 136
- ośmiu sześcianów, 34, 35
- pięciu sześcianów, 34
- potęg
- ósmych, 89
- piątych, 83, 150
- siódmych, 88
- szóstych, 87
- siedmiu sześcianów, 34
- trzech bikwadratów, 69, 70
- trzech sześcianów, 25–32
- symbol Legendre’a, 45
- symbol Newtona, 11, 94, 104, 137
- system numeracji
- czwórkowy, 8, 11, 39, 67
- dowolny, 6, 39, 66, 123
- dwójkowy, 8, 67, 123
- dziwiątkowy, 8, 9, 39, 67
- ósemkowy, 8, 9, 39, 66, 67, 81, 85
- piątkowy, 8, 39, 67
- siódemkowy, 8, 9, 39, 66, 67, 81, 85
- szóstkowy, 8, 9, 39, 66, 67
- trójkowy, 8, 39, 66, 67
- szósta potęga, 46, 85–87, 121, 150, 151
- sześcian
- liczby całkowitej, 15, 16, 19, 24, 25, 31, 33–35, 37, 59, 61–63, 120
- liczby naturalnej, 3, 5, 6, 8–10, 12–15, 17, 19–30, 33, 35, 36, 38, 39, 46, 49, 96, 98, 118, 119, 123
- liczby wymiernej, 24, 26, 34
- w pierścieniu, 139–144
- trójkąt, 44, 52
- trójka
- liczb całkowitych, 27
- liczb naturalnych, 15, 23, 26, 39, 40, 71, 72, 74, 75, 78, 83, 86, 88–90, 96, 99, 138
- pitagorejska, 70
- prostych na płaszczyźnie, 42
- twierdzenie
- Bezout, 100
- chińskie o resztach, 91, 95, 101, 105
- Dirichleta, 33
- Eulera, 93, 94
- Hasse’go, 45
- Mihăilescu, 125, 126
- Mordella, 100
- Thuego, 58, 100
- układ równań, 27, 69, 115, 119, 123
- warunki równoważne, 9, 13, 22, 26, 31, 43, 44, 93, 97, 104, 110, 131, 134, 135, 138–141, 147, 148, 150, 152, 153
- wielomian, 37, 41, 43, 57, 84, 96–98, 110–112
- moniczny, 110
- nierozkładalny, 100
- symetryczny, 110
- trójmian kwadratowy, 17
- wyznacznik, 31, 32
- wzór Newtona, 10
- zbiór
- \mathbb{N}_0 , 1, 69
- liczb całkowitych, 1, 61, 127
- liczb naturalnych, 1, 11, 68, 73, 101, 105, 132
- liczb pierwszych, 1, 106
- liczb rzeczywistych, 1, 43
- liczb wymiernych, 1, 30, 42, 43, 46, 47, 49–53, 55, 57
- liczb zespolonych, 1, 43, 50
- nieskończony, 7, 14, 16, 19, 22–27, 30, 33, 34, 38–40, 47, 48, 52, 55, 61, 63, 64, 66, 68, 69, 72, 75, 79, 80, 82–84, 86, 88, 89, 93–96, 101, 103, 106, 109, 111, 118, 119, 129
- zbiory rozłączne, 99, 109, 112, 113, 122