Podróże po Imperium Liczb

Część 09. Sześciany, Bikwadraty i Wyższe Potęgi

Rozdział 1

1. Sześciany

Andrzej Nowicki 24 kwietnia 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

1 Sześciany

Każdą liczbę postaci n^3, gdzie n jest liczbą naturalną, nazywamy *sześcianem liczby naturalnej* lub krótko *sześcianem*. Poniższa tabela przedstawia sześciany n^3, dla $n \leqslant 300$.

1	1	51	132651	101	1030301	151	3442951	201	8120601	251	15813251
2	8	52	140608	102	1061208	152	3511808	202	8242408	252	16003008
3	27	53	148877	103	1092727	153	3581577	203	8365427	253	16194277
4	64	54	157464	104	1124864	154	3652264	204	8489664	254	16387064
5	125	55	166375	105	1157625	155	3723875	205	8615125	255	16581375
6	216	56	175616	106	1191016	156	3796416	206	8741816	256	16777216
7	343	57	185193	107	1225043	157	3869893	207	8869743	257	16974593
8	512	58	195112	108	1259712	158	3944312	208	8998912	258	17173512
9	729	59	205379	109	1295029	159	4019679	209	9129329	259	17373979
10	1000	60	216000	110	1331000	160	4096000	210	9261000	260	17576000
11	1331	61	226981	111	1367631	161	4173281	211	9393931	261	17779581
12	1728	62	238328	112	1404928	162	4251528	212	9528128	262	17984728
13	2197	63	250047	113	1442897	163	4330747	213	9663597	263	18191447
14	2744	64	262144	114	1481544	164	4410944	214	9800344	264	18399744
15	3375	65	274625	115	1520875	165	4492125	215	9938375	265	18609625
16	4096	66	287496	116	1560896	166	4574296	216	10077696	266	18821096
17	4913	67	300763	117	1601613	167	4657463	217	10218313	267	19034163
18	5832	68	314432	118	1643032	168	4741632	218	10360232	268	19248832
19	6859	69	328509	119	1685159	169	4826809	219	10503459	269	19465109
20	8000	70	343000	120	1728000	170	4913000	220	10648000	270	19683000
21	9261	71	357911	121	1771561	171	5000211	221	10793861	271	19902511
22	10648	72	373248	122	1815848	172	5088448	222	10941048	272	20123648
23	12167	73	389017	123	1860867	173	5177717	223	11089567	273	20346417
24	13824	74	405224	124	1906624	174	5268024	224	11239424	274	20570824
25	15625	75	421875	125	1953125	175	5359375	225	11390625	275	20796875
26	17576	76	438976	126	2000376	176	5451776	226	11543176	276	21024576
27	19683	77	456533	127	2048383	177	5545233	227	11697083	277	21253933
28	21952	78	474552	128	2097152	178	5639752	228	11852352	278	21484952
29	24389	79	493039	129	2146689	179	5735339	229	12008989	279	21717639
30	27000	80	512000	130	2197000	180	5832000	230	12167000	280	21952000
31	29791	81	531441	131	2248091	181	5929741	231	12326391	281	22188041
32	32768	82	551368	132	2299968	182	6028568	232	12487168	282	22425768
33	35937	83	571787	133	2352637	183	6128487	233	12649337	283	22665187
34	39304	84	592704	134	2406104	184	6229504	234	12812904	284	22906304
35	42875	85	614125	135	2460375	185	6331625	235	12977875	285	23149125
36	46656	86	636056	136	2515456	186	6434856	236	13144256	286	23393656
37	50653	87	658503	137	2571353	187	6539203	237	13312053	287	23639903
38	54872	88	681472	138	2628072	188	6644672	238	13481272	288	23887872
39	59319	89	704969	139	2685619	189	6751269	239	13651919	289	24137569
40	64000	90	729000	140	2744000	190	6859000	240	13824000	290	24389000
41	68921	91	753571	141	2803221	191	6967871	241	13997521	291	24642171
42	74088	92	778688	142	2863288	192	7077888	242	14172488	292	24897088
43	79507	93	804357	143	2924207	193	7189057	243	14348907	293	25153757
44	85184	94	830584	144	2985984	194	7301384	244	14526784	294	25412184
45	91125	95	857375	145	3048625	195	7414875	245	14706125	295	25672375
46	97336	96	884736	146	3112136	196	7529536	246	14886936	296	25934336
47	103823	97	912673	147	3176523	197	7645373	247	15069223	297	26198073
48	110592	98	941192	148	3241792	198	7762392	248	15252992	298	26463592
49	117649	99	970299	149	3307949	199	7880599	249	15438249	299	26730899
50	125000	100	1000000	150	3375000	200	8000000	250	15625000	300	27000000

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.1 Cyfry sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.1.1.

$$
\boxed{\begin{array}{rcrrcr}
(5+1+2)^3 &=& 512, & (1+7+5+7+6)^3 &=& 17576,\\
(4+9+1+3)^3 &=& 4913, & (1+9+6+8+3)^3 &=& 19683,\\
(5+8+3+2)^3 &=& 5832, & & \text{([Je88], [Bedn] 48).} &
\end{array}}
$$

1.1.2. *Każdy wyraz następujących ciągów jest sześcianem liczby naturalnej.*

(1) $1331,\ 1030301,\ 1003003001, \dots;$ $\left(11^3,\ 101^3,\ 10001^3, \dots\right)$, ([Mat] 6/1954 102).

(2) $729,\ 970299,\ 997002999,\ 999700029999, \dots,$ ([MaS] 2/1998).

(3) $\dfrac{107811}{3},\ \dfrac{110778111}{3},\ \dfrac{111077781111}{3}, \dots,$ ([IMO] Longlist 1967, [Djmp] s.42).

1.1.3. *Liczby* 9261 *i* 804357 *są sześcianami liczb naturalnych:*

$$9261 = 21^3, \quad 804357 = 93^3.$$

Do ich zapisu wykorzystano wszystkie cyfry $0, 1, \dots, 9$*; każdą jeden raz. Jest to jedyny przykład tego rodzaju.* ([Mon] 47(3)(1940) E377).

1.1.4. *Liczby* 8 *i* 24137569 *są sześcianami liczb naturalnych:*

$$8 = 2^3, \quad 24137569 = 289^3.$$

Do ich zapisu wykorzystano wszystkie niezerowe cyfry $1, \dots, 9$*; każdą jeden raz. Są jeszcze dwa przykłady tego typu:*

$$8 = 2^3, \quad 32461759 = 319^3 \quad \textit{oraz} \quad 125 = 5^3, \quad 438976 = 76^3.$$

([Mon] 47(3)(1940) E377).

1.1.5. *Liczby:* 1, 8, 64 *i* 205379 *są sześcianami liczb naturalnych:*

$$1 = 1^3, \quad 8 = 2^3, \quad 64 = 4^3, \quad 205379 = 59^3.$$

Wykorzystano wszystkie cyfry $0, 1, \dots, 9$*; każdą jeden raz. Nie ma trzech liczb tego rodzaju.* ([Mon] 47(3)(1940) E377).

1.1.6. *Sześciany* $24137569 = 289^3$ *i* $32461759 = 319^3$ *zbudowane są z tych samych cyfr. Podobnie:*

$$42875 = 35^3, \quad 54872 = 38^3 \quad \textit{oraz} \quad 125 = 5^3, \quad 512 = 8^3.$$

([Mon] 47(3)(1940) E377).

1.1.7. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje sześcian, którego początkowe cyfry są odpowiednio równe cyfrom liczby* m*. Podobny fakt zachodzi również dla dowolnych systemów numeracji.* ([N-2]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Lustrzane odbicia sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Jeśli n jest liczbą naturalną, to przez n' oznaczać będziemy liczbę naturalną powstałą z cyfr liczby n zapisanych w odwrotnej kolejności. Mówić będziemy w tym przypadku, że n' jest *lustrzanym odbiciem* liczby n. Przykłady:

$$12345' = 54321, \quad 4453377' = 7733544, \quad 92100' = 129.$$

Takie liczby n' pojawiły się już w [N-2] i [N-3]. W tym podrozdziale zajmować się będziemy liczbami postaci n', gdzie n będzie sześcianem liczby naturalnej.

Mówimy, że liczba naturalna n jest *palindromiczna*, jeśli $n' = n$. Przykłady liczb palindromicznych: 12321, 341143, 1114111.

1.2.1. *Wszystkie palindromiczne liczby postaci n^3 dla $n < 10^6$.*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
1^3 &=& 1, & 2201^3 &=& 10662526601,\\
2^3 &=& 8, & 10001^3 &=& 1000300030001,\\
7^3 &=& 343, & 10101^3 &=& 1030607060301,\\
11^3 &=& 1331, & 11011^3 &=& 1334996994331,\\
101^3 &=& 1030301, & 100001^3 &=& 1000030000300001,\\
111^3 &=& 1367631, & 101101^3 &=& 1033394994933301,\\
1001^3 &=& 1003003001, & 110011^3 &=& 1331399339931331.
\end{array}$$

Pojawiła się liczba 2201. Jest to jedyna znana do tej pory taka liczba naturalna, która nie jest palindromiczna i ma palindromiczny sześcian.

1.2.2. *Każdy wyraz ciągu*

$$1331, \ 1030301, \ 1003003001, \cdots,$$

jest palindromicznym sześcianem. Palindromicznych sześcianów istnieje więc nieskończenie wiele.

1.2.3.

$$\begin{array}{rcl|rcl}
1011^3 &=& 1033364331 & 1334633301 &=& 1101^3\\
10011^3 &=& 1003303631331 & 1331363033001 &=& 11001^3\\
100011^3 &=& 1000330036301331 & 1331036300330001 &=& 110001^3\\
100101^3 &=& 1003033061330301 & 1030331603303001 &=& 101001^3\\
100111^3 &=& 1003333697667631 & 1367667963333001 &=& 111001^3.
\end{array}$$

Istnieją sześciany, których lustrzane odbicia są liczbami pierwszymi. Najmniejszym takim sześcianem jest liczba 5^3, której lustrzane odbicie jest liczbą pierwszą 521. Dopisując z prawej strony zera, otrzymujemy nieskończoną serię sześcianów, których lustrzane odbicia są liczbami pierwszymi: $(5^3)' = (50^3)' = (500^3)' = \cdots = 521$. W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko takimi sześcianami, które nie są podzielne przez 10.

1.2.4. *W przedziale* $[1, 100]$ *istnieją trzy niepodzielne przez* 10 *liczby naturalne n takie, że lustrzane odbicie liczby n^3 jest liczbą pierwszą. Są to liczby:*

$$5, \quad 52, \quad 89.$$

W przedziale $[1, 1000]$ *takich liczb jest* 59*, a w przedziale* $[1, 10\,000]$ *jest ich* 451*.* (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Cyfry sześcianów w różnych systemach numeracji

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1. $3^3 = 11011_2,\ \ 2^3 = 22_3.$

1.3.2.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
5^3 &=& 1331_4, & 6^3 &=& 1331_5,\\
17^3 &=& 1030301_4, & 26^3 &=& 1030301_5,\\
65^3 &=& 1003003001_4, & 126^3 &=& 1003003001_5,\\
257^3 &=& 1000300030001_4, & 626^3 &=& 1000300030001_5,\\
1025^3 &=& 1000030000300001_4, & 3126^3 &=& 1000030000300001_5,\\
4097^3 &=& 1000003000003000001_4. & 15626^3 &=& 1000003000003000001_5.
\end{array}$$

1.3.3.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
7^3 &=& 1331_6, & 2^3 &=& 11_7,\\
37^3 &=& 1030301_6, & 4^3 &=& 121_7,\\
217^3 &=& 1003003001_6, & 8^3 &=& 1331_7,\\
1297^3 &=& 1000300030001_6, & 16^3 &=& 14641_7,\\
7777^3 &=& 1000030000300001_6, & 50^3 &=& 1030301_7,\\
46657^3 &=& 1000003000003000001_6, & 100^3 &=& 11333311_7,\\
279937^3 &=& 1000000300000030000001_6. & 200^3 &=& 124666421_7,\\
 & & & 344^3 &=& 1003003001_7,\\
 & & & 688^3 &=& 11033033011_7,\\
 & & & 1376^3 &=& 121363363121_7,\\
 & & & 2402^3 &=& 1000300030001_7,\\
 & & & 4804^3 &=& 11003300330011_7,\\
 & & & 9608^3 &=& 121036303630121_7,\\
 & & & 16808^3 &=& 1000030000300001_7,\\
 & & & 33616^3 &=& 11000330003300011_7,\\
 & & & 67232^3 &=& 121003630036300121_7.
\end{array}$$

1.3.4.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
3^3 &=& 33_8, & 2^3 &=& 8_9,\\
9^3 &=& 1331_8, & 10^3 &=& 1331_9,\\
65^3 &=& 1030301_8, & 38^3 &=& 83238_9,\\
73^3 &=& 1367631_8, & 82^3 &=& 1030301_9,\\
513^3 &=& 1003003001_8, & 91^3 &=& 1367631_9,\\
4097^3 &=& 1000300030001_8, & 730^3 &=& 1003003001_9,\\
4161^3 &=& 1030607060301_8, & 6562^3 &=& 1000300030001_9,\\
32769^3 &=& 1000030000300001_8, & 6643^3 &=& 1030607060301_9,\\
262145^3 &=& 1000003000003000001_8, & 59050^3 &=& 1000030000300001_9.\\
262657^3 &=& 1003006007006003001_8. & & &
\end{array}$$

1.3.5. $(2+1+0+1)^3 = 2101_3, \quad (2+0+0+2+2+2)^3 = 200222_3.$

1.3.6.

$$\begin{array}{rcr@{\qquad}rcr}
(2+0)^3 &=& 20_4, & (1+0+2)^3 &=& 102_5,\\
(3+1+2+0)^3 &=& 3120_4, & (4+0+2+2)^3 &=& 4022_5,\\
(1+1+1+1+3)^3 &=& 11113_4, & (1+0+4+0+4)^3 &=& 10404_5,\\
(2+3+1+2+1)^3 &=& 23121_4, & (2+3+4+0+3)^3 &=& 23403_5,\\
(3+3+2+2+0)^3 &=& 33220_4, & (3+2+2+4+2)^3 &=& 32242_5.
\end{array}$$

1.3.7.
$$\begin{aligned} (3+2+1+3)^3 &= 3213_6, & (2+3+3+4+3)^3 &= 23343_6,\\ (1+0+0+5+5)^3 &= 10055_6, & (3+0+5+4+4)^3 &= 30544_6. \end{aligned}$$

1.3.8.
$$\begin{aligned} (1+1)^3 &= 11_7, & (3+6+1+1)^3 &= 3611_7,\\ (1+2+1)^3 &= 121_7, & (5+0+1+6)^3 &= 5016_7,\\ (1+3+3+1)^3 &= 1331_7, & (1+2+5+6+1)^3 &= 12561_7,\\ (2+0+6+1)^3 &= 2061_7, & (1+4+6+4+1)^3 &= 14641_7. \end{aligned}$$

1.3.9. $(3+3+0)^3 = 330_8$, $(4+2+2+5)^3 = 4225_8$, $(5+2+7+0)^3 = 5270_8$.

1.3.10.
$$\begin{aligned} (3+0)^3 &= 30_9, & (5+5+5+1)^3 &= 5551_9,\\ (4+2+1)^3 &= 421_9, & (1+7+6+1+8)^3 &= 17618_9,\\ (4+5+6+0)^3 &= 4560_9, & (4+8+8+4+8)^3 &= 48848_9. \end{aligned}$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Sumy cyfr sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przez $s(n)$ oznaczamy sumę cyfr liczby naturalnej n.

1.4.1. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Istnieje sześcian liczby naturalnej, którgo suma cyfr jest równa n wtedy i tylko wtedy, gdy resztą z dzielenia liczby n przez 9 jest $0, 1$ lub 8.*

D. Niech $n = s(a^3)$, gdzie $a \in \mathbb{N}$. Reszta z dzielenia liczby postaci a^3 przez 9 jest równa $0, 1$ lub 8. Ponieważ
$$s(a^3) \equiv a^3 \pmod 9,$$
więc $n = s(a^3) \equiv b \,(\mathrm{mod}\ 9)$, gdzie $b \in \{0, 1, 8\}$.

Niech n będzie dowolną liczbą podzielną przez 9. Wówczas n jest postaci $s(a^3)$, gdzie $a \in \mathbb{N}$. Mamy bowiem:

$$a_m = (10^m - 1)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-1}7\underbrace{00\dots0}_{m-1}2\underbrace{99\dots9}_{m}, \qquad s(a_m) = 9\cdot 2m, \text{ dla } m \geqslant 1$$

$$b_m = (10^m - 16)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-2}52\underbrace{00\dots0}_{m-3}767\underbrace{99\dots9}_{m-4}5904, \qquad s(b_m) = 9(2m-1), \text{ dla } m \geqslant 4.$$

Ponadto, $s(3^3) = s(27) = 9 = 9\cdot 1$, $s(3^9) = s(19683) = 27 = 9\cdot 3$ oraz $s(9^7) = s(4782969) = 45 = 9\cdot 5$.

Niech n będzie liczbą postaci $9k+1$. W tym przypadku mamy:

$$a_m = (10^m - 3)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-1}1\underbrace{00\dots0}_{m-2}26\underbrace{99\dots9}_{m-2}73, \qquad s(a_m) = 9(2m-1)+1, \text{ dla } m \geqslant 2$$

$$b_m = (10^m - 9)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-2}73\underbrace{00\dots0}_{m-3}242\underbrace{99\dots9}_{m-3}271, \qquad s(b_m) = 9(2m-1), \text{ dla } m \geqslant 3.$$

Ponadto, $s(7^3) = s(343) = 10 = 9\cdot 1 + 1$, $s(1^3) = s(1) = 1 = 9\cdot 0 + 1$ oraz $s(13^3) = s(2197) = 19 = 9\cdot 2 + 1$.

Niech n będzie liczbą postaci $9k+8$. W tym przypadku mamy:

$$a_m = (10^m - 2)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-1}4\underbrace{00\dots0}_{m-2}11\underbrace{99\dots9}_{m-1}2, \qquad s(a_m) = 9\cdot 2(m-1)+8, \text{ dla } m \geqslant 2$$

$$b_m = (10^m - 5)^3 = \underbrace{99\dots9}_{m-2}85\underbrace{00\dots0}_{m-2}74\underbrace{99\dots9}_{m-3}875, \qquad s(b_m) = 9(2m-1)+8, \text{ dla } m \geqslant 3.$$

Ponadto, $s(8^3) = s(512) = 8 = 9\cdot 0 + 8$, $s(47^3) = s(103823) = 17 = 9\cdot 1 + 8$ oraz $s(95^3) = s(857375) = 35 = 9\cdot 3 + 8$. ⊠

1.4.2. *Jeśli* $n \leqslant 1000$ *i* $n^2 = s(n)^3$*, to* $n = 1$ *lub* $n = 27$. ([Ibe] 1999).

1.4.3. *Liczba* n *ma* 19 *cyfr. Wiadomo, że* $s(n) = 3$. *Ile może wynosić* $s(n^3)$ *?*
Odp. 9, 18 *lub* 27. ([Fom] 20/73).

1.4.4. *Liczby* $n = 1, 8, 17, 18, 26, 27$ *spełniają równość*

$$s(n^3) = n.$$

Są to wszystkie tego rodzaju liczby naturalne.

D. Załóżmy, że liczba naturalna n spełnia równość $s(n^3) = n$. Niech k będzie liczbą cyfr liczby n. Wtedy $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$ oraz $10^{3(k-1)} \leqslant n^3 < 10^{3k}$. Stąd mamy:

$$10^{k-1} \leqslant n = s(n^3) \leqslant 9 \cdot 3k = 27k < 10^2 k,$$

więc $10^{k-3} < k$ i stąd $k \leqslant 3$. Liczba n jest więc mniejsza od 1000. Wystarczy zatem tylko zbadać wszystkie liczby naturalne co najwyżej 3-cyfrowe. Wśród nich tylko liczby $1, 8, 17, 18, 26, 27$ spełniają rozpatrywaną równość. ⊠

1.4.5. *Spójrzmy na przykłady:*

$$\begin{array}{llll}
1 = s(n), & 1^3 = s(n^3), & dla & n = 1; \\
2 = s(n), & 2^3 = s(n^3), & dla & n = 2 \text{ } lub \text{ } n = 11; \\
3 = s(n), & 3^3 = s(n^3), & dla & n = 111 \text{ } lub \text{ } n = 1011; \\
4 = s(n), & 4^3 = s(n^3), & dla & n = 11011; \\
5 = s(n), & 5^3 = s(n^3), & dla & n = 1000001010001001; \\
6 = s(n), & 6^3 = s(n^3), & dla & n = 1000000000100000100001000010001.
\end{array}$$

Czy dla każdej liczby naturalnej m *istnieje liczba naturalna* n *taka, że* $s(n) = m$ *i* $s(n^3) = m^3$ *?*

1.4.6. *Czy stnieje taka liczba naturalna* n*, że* $s(n) = 100$ *oraz* $s(n^3) = 100^3$ *?*
([OM] Rosja 2009, citeKWANT 4/2010 s.57).

Odpowiedzi na te pytania są pozytywne. Wynika to z następującego stwierdzenia.

1.4.7. *Dla każdej liczby naturalnej* m *istnieje liczba naturalna* n *taka, że*

$$s(n) = m \quad oraz \quad s(n^3) = m^3.$$

D. Przypomnijmy najpierw następujący uogólniony wzór Newtona:

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum_{i_1 + \cdots + i_m = n} \langle i_1, \ldots, i_s \rangle a_1^{i_1} \ldots a_m^{i_m},$$

gdzie $\sum\limits_{i_1 + \cdots + i_m = n}$ oznacza, że sumowanie przebiega wszystkie ciągi nieujemnych liczb całkowitych $(i_1, \ldots, i_m)$ takie, że $i_1 + \cdots + i_m = n$. Występujące tu współczynniki postaci $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$ są liczbami (naturalnymi) zdefiniowanymi jako

$$\langle i_1, \ldots, i_s \rangle = \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_s)!}{i_1! i_2! \ldots i_s!}.$$

Szczegóły znajdziemy w [N11] w podrozdziale o uogólniononych symbolach Newtona..

Niech teraz m będzie daną liczbą naturalną i niech

$$n = \sum_{k=1}^{m} 10^{4^k} = 10^4 + 10^{16} + \cdots + 10^{4^m}.$$

Suma cyfr liczby n jest równa m. Podnosząc n do trzeciej potęgi, otrzymujemy:

$$(*) \qquad n^3 = \sum_{i_1+\cdots i_m=3} \langle i_1, \ldots, i_m \rangle 10^{i_1 4^1 + i_2 4^2 + \cdots + i_m 4^m}.$$

Jeśli $i_1, \ldots, i_m$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi, których suma jest równa 3, to są to liczby mniejsze od 4. Każdy więc uogólniony symbol Newtona $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle$, występujący w równości $(*)$, jest jedną z cyfr $1, 3$ lub 6. Z jednoznaczności przedstawienia liczb w systemie numeracji o podstawie 4 wynika, że potęgi dziesiątki, występujące po prawej stronie równości $(*)$, są parami różne. Liczba n^3 zbudowana jest więc z cyfr $0, 1, 3, 6$. Zatem

$$s(n^3) = \sum_{i_1+\cdots i_m=3} \langle i_1, \ldots, i_m \rangle = \sum_{i_1+\cdots i_m=3} \langle i_1, \ldots, i_m \rangle 1^{i_1} 1^{i_2} \cdots 1^{i_m} = (1 + 1 + \cdots + 1)^3 = m^3,$$

Mamy więc: $s(n) = m$ oraz $s(n^3) = m^3$. ⊠

Rozpatrzmy ciągi postaci

$$n, \ D(n), \ D(D(n)), \ D(D(D(n))), \ \cdots,$$

gdzie $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją przyporządkowującą każdej liczbie naturalnej n sumę jej cyfr podniesioną do trzeciej potęgi, tzn. $D(n) = s(n)^3$. Spójrzmy najpierw na kilka przykładów takich ciągów:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
5, & 5^3, & 8^3, & 8^3, & 8^3, & 8^3, & 8^3, & 8^3, & \cdots; \\
6, & 6^3, & 9^3, & 18^3, & 18^3, & 18^3, & 18^3, & 18^3, & \cdots; \\
22, & 4^3, & 10^3, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & \cdots; \\
49, & 13^3, & 19^3, & 28^3, & 19^3, & 28^3, & 19^3, & 28^3, & \cdots; \\
59, & 14^3, & 17^3, & 17^3, & 17^3, & 17^3, & 17^3, & 17^3, & \cdots; \\
899, & 26^3, & 26^3, & 26^3, & 26^3, & 26^3, & 26^3, & 26^3, & \cdots; \\
999, & 27^3, & 27^3, & 27^3, & 27^3, & 27^3, & 27^3, & 27^3, & \cdots.
\end{array}$$

W każdym z tych ciągów pojawił się wyraz należący do zbioru $\{1^3, 8^3, 17^3, 18^3, 19^3, 26^3, 27^3\}$. Udowodnimy, że tak jest zawsze.

1.4.8. *Niech $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją określoną wzorem*

$$D(n) = s(n)^3, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba naturalna k taka, że $D^k(n)$ jest jedną z liczb:

$$1^3, \ 8^3, \ 17^3, \ 18^3, \ 19^3, \ 26^3, \ 27^3.$$

D. (1). Najpierw udowodnimy, że jeśli $m \geqslant 7$ jest liczbą naturalną, to

$$(9m)^3 < 10^{m-1}.$$

Zrobimy to metodą indukcji matematycznej ze względu na m. Dla $m = 7$ mamy: $(9m)^3 = 250047 < 10^6 = 10^{m-1}$. Niech $m \geqslant 7$ i niech $(9m)^3 < 10^{m-1}$. Wtedy

$$\Big(9(m+1)\Big)3 \leqslant 9^3 \left((m + \frac{m}{7}\right)^3 = 9^3 \left(\frac{8}{7}\right)^3 m^3 < \frac{512}{343} 10^{m-1} < 10 \cdot 10^{m-1} = 10^m,$$

a zatem, $(9(m+1))^3 < 10^{(m+1)-1}$ i to kończy nasz indukcyjny dowód.

(2). Teraz wykżemy, że jeśli $n \geqslant 10^6$, to $D(n) < n$. Załóżmy, że $n \geqslant 10^6$ i niech m będzie liczbą cyfr liczby n. Wtedy $m \geqslant 7$ oraz $10^{m-1} \leqslant n$. Korzystamy z nierówności udowodnionej w punkcie (1) i mamy:

$$D(n) = s(n)^3 \leqslant (9m)^3 < 10^{m-1} \leqslant n,$$

a więc $D(n) < n$.

(3). Teraz wystarczy zbadać tylko te wszystkie liczby naturalne n, które są mniejsze od 10^6. W tym celu wystarczy tylko zbadać wszystkie sześciany mniejsze od 10^6, czyli liczby $1^3, 2^3, \dots, 99^3$. Sprawdzamy to na przykład za pomocą komputera. W każdym przypadku widzimy, że zachodzi rozważana teza. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Końcowe cyfry sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5.1. *Niech* $\left(c_p, c_{p-1}, \dots, c_1, c_0\right)$ *(gdzie* $p \geqslant 0$*) będzie ciągiem cyfr układu dziesiętnego, przy czym* $\operatorname{nwd}(c_0, 10) = 1$. *Istnieje wtedy liczba naturalna* n *taka, że końcowymi cyframi liczby* n^3 *są odpowiednio cyfry* $c_p, c_{p-1}, \dots, c_0$. ([OM] Ukraina 1998).

D. Indukcja ze względu na $p \geqslant 0$. Dla $p = 0$ jest to oczywiste, gdyż $1^3 = 1$, $7^3 = 243$, $3^3 = 27$ oraz $9^3 = 729$.

Niech $p > 0$ i załóżmy, że $(c_p, \dots, c_1, c_0)$ jest danym ciągiem cyfr takim, że $\operatorname{nwd}(c_0, 10) = 1$. Na mocy indukcji istnieje liczba naturalna m taka, że końcowe cyfry liczby m^3 tworzą ciąg $(c_{p-1}, c_{p-2}, \dots, c_1, c_0)$. Niech a będzie cyfrą liczby m^3 stojącą na p-tym (licząc od końca) miejscu, tzn. $m^3 = \dots a c_{p-1} c_{p-2} \dots c_1 c_0$. Niech $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ będzie taką cyfrą, że $a + b \equiv c_p \pmod{10}$.

Ponieważ ostatnią cyfrą liczby m jest $1, 3, 7$ lub 9, więc ostatnią cyfrą liczby $3m^2$ jest 3 lub 7. Istnieje zatem liczba $k \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ taka, że ostatnią cyfrą liczby $3m^2k$ jest b. (Mamy bowiem, modulo 10, następujące równości: $0 \cdot 3 = 0$, $1 \cdot 3 = 3$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 3 = 2$, $5 \cdot 3 = 5$, $6 \cdot 3 = 8$, $7 \cdot 3 = 1$, $8 \cdot 3 = 4$, $9 \cdot 3 = 7$ oraz $0 \cdot 7 = 0$, $1 \cdot 7 = 7$, $2 \cdot 7 = 4$, $3 \cdot 7 = 1$, $4 \cdot 7 = 8$, $5 \cdot 7 = 5$, $6 \cdot 7 = 2$, $7 \cdot 7 = 9$, $8 \cdot 7 = 6$, $9 \cdot 7 = 3$.)

Niech $n = m + 10^p k$. Wtedy $n^3 = m^3 + 3m^2k \cdot 10^p + 3mk^2 10^{2p} + k^3 10^{3p}$ i jest oczywiste, że końcowe cyfry liczby n^3 tworzą ciąg $(c_p, c_{p-1}, \dots, c_1, c_0)$. ⊠

1.5.2. *Znaleźć liczbę naturalną* n *taką, że końcowe cyfry liczby* n^3 *tworzą liczbę* 19981997. Odp. $n = 43691413$, $n^3 = 83404267142141019981997$. ([OM] Ukraina 1998).

1.5.3. *Przykłady liczb naturalnych* n *takich, że końcowe cyfry liczby* n^3 *tworzą daną liczbę* m.

m	n	n^3
1997	1413	2821151997
19981997	43691413	83404267142141019981997
199919981997	552743691413	168877341551614637488967199919981997
1999	3999	63952011999
19991999	2663999	18906109653319991999
19981999	75993999	438872022882520119981999
9999999	9999999	999999700000029999999
1234554321	5329817841	151403912720127257101234554321
123456789	464658829	100323478236586978123456789
12345678987654321	80608557871517841	$\dots$6012345678987654321
987654321	871517841	661955578081361127987654321
20022003	71680587	368302493763542720022003

(Maple i dowód 1.5.1).

1.5.4. *Jeśli liczba naturalna n ma w zapisie dziesiętnym na końcu s dziewiątek, to liczba n^3 ma na końcu co najmniej s dziewiątek.*

1.5.5. *Jeśli ostatnią cyfrą liczby n^3 jest* 5*, to przedostatnią cyfrą tej liczby jest* 2 *lub* 7*.*

1.5.6.

(1) *Jeśli dwie ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 25*, to trzy ostatnie cyfry tej liczby tworzą liczbę* 125 *lub* 625*.*

(2) *Jeśli dwie ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 75*, to trzy ostatnie cyfry tej liczby tworzą liczbę* 375 *lub* 875*.*

(3) *Trzy ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 125 *wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 40k + 5$.*

(4) *Trzy ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 375 *wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 40k + 15$.*

(5) *Trzy ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 625 *wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 40k + 25$.*

(6) *Trzy ostatnie cyfry liczby n^3 tworzą liczbę* 875 *wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 40k + 35$.*

1.5.7. *Liczba n^3 nie może mieć w zapisie dziesiętnym końcówki* 14375*, To samo z końcówkami:* 14375, 10625 *oraz* 11875*.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Własności sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. *Każda liczba postaci n^3 jest sumą n kolejnych liczb nieparzystych.* ([WyKM] 156-52).

D. $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, $4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, $\cdots$. Niech $a = n(n-1)$. Wtedy $(a + 1) + (a + 3) + \cdots + (a + 2n - 1) = n^3$. ⊠

1.6.2. *Z równości*

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

wynika, że każdy sześcian liczby naturalnej jest różnicą dwóch liczb kwadratowych. ([S50] 510).

1.6.3. *W ciągu kolejnych liczb naturalnych $1, 2, 3\dots$ wykreślamy co trzecią liczbę. W nowym ciągu $1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$ każdy wyraz zastępujemy sumą tego wyrazu i wszystkich poprzedzających go wyrazów. W nowym ciągu $1, 3, 7, 12, 19, 27, 37, 48, 61, \dots$ wykreślamy co drugi wyraz i następnie każdy wyraz nowego ciągu zastępujemy sumą tego wyrazu i wszystkich go poprzedzających. Otrzymany w ten sposób ciąg jest ciągiem wszystkich kolejnych sześcianów liczb naturalnych.* ([Mat] 1-2/1955 78).

1.6.4. *Jeśli liczby x, y i $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ są całkowite, to $\dfrac{x^2+y^2+6}{xy}$ jest sześcianem liczby całkowitej.* ([OM] Estonia 1996, [Pa97]).

1.6.5. *Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Jeśli $\mathrm{nwd}(a, c) = 1$ i $bc(a^2 - b^2) = a(c^2 - b^4)$, to a jest sześcianem.* ([MG] 88(511)(2004) s.166).

1.6.6. *Jeśli x, y, z, a, b, c są niezerowymi liczbami takimi, że $x + y + z = a + b + c = 0$, to*

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{abc}{xyz}.$$ ([Dlt] 4/1999).

1.6.7. *Niech $a \in \mathbb{N}$ i niech $x_n = n^3 + a$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:*

(1) $\operatorname{nwd}\Big(x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}\Big) = 1$ *dla $n \in \mathbb{N}$;*

(2) *jeśli a jest sześcianem, to istnieje n takie, że* $\operatorname{nwd}(x_n, x_{n+1}) > 1$*;*

(3) *nie istnieje takie a, że* $\operatorname{nwd}(x_n, x_{n+1}) = 1$ *dla każdego $n \in \mathbb{N}$;*

(4) *jeśli p jest liczbą pierwszą dzielącą* $\operatorname{nwd}(x_n, x_{n+1})$ *dla pewnego n, to $p \mid 27a^2 + 1$.*

([Kw] 5/1999 M1680).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Istnienie lub nieistnienie pewnych sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7.1. *Dla każdej liczby naturalnej $n > 32$ pomiędzy liczbami n i $2n$ istnieje co najmniej jeden sześcian liczby naturalnej.* ([Mat] 5/1952 55, [S64] 167, [S68] 102).

D. Zauważmy najpierw, że jeśli $k \geqslant 4$, to $(k+1)^3 < 2k^3$. Istotnie: $2k^3 - (k+1)^3 = k^3 - 3k^2 - 3k - 1 > k^3 - 3k^2 - 4k = k(k-4)(k+1) \geqslant 0$.

Jeśli $33 \leqslant n < 64$, to $n < 4^3 < 2n$. Niech teraz $n \geqslant 64$ i niech k będzie największą liczbą naturalną taką, że $k^3 \leqslant n$. Wtedy $(k+1)^3 > n$ oraz $k \geqslant 4$. Mamy zatem: $n < (k+1)^3 < 2k^3 \leqslant 2n$. ⊠

1.7.2. *Dla każdej liczby naturalnej $n > 9$ pomiędzy liczbami n i $3n$ istnieje co najmniej jeden sześcian liczby naturalnej.* ([AndG] 63).

1.7.3. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych a, b takich, że liczby*

$$a - b \quad i \quad a^2 + 3b^2 + 1$$

są sześcianami liczb całkowitych. ([OM] St Petersburg 1997).

1.7.4. *Istnieje nieskończenie wiele sześcianów postaci $7^n + 7^m$, gdzie n i m są różnymi liczbami naturalnymi. Każda bowiem liczba*

$$7^{1+3s} + 7^{3s}$$

jest sześcianem równym $(2 \cdot 7^s)^3$.

1.7.5. *Istnieje nieskończenie wiele sześcianów postaci $26^n + 26^m$, gdzie n i m są różnymi liczbami naturalnymi. Każda bowiem liczba*

$$26^{1+3s} + 26^{3s}$$

jest sześcianem równym $(3 \cdot 26^s)^3$.

1.7.6. *Jeśli w nieskończonym postępie arytmetycznym o wyrazach naturalnych istnieje sześcian liczby naturalnej, to takich sześcianów w tym postępie istnieje nieskończenie wiele.*

1.7.7. *Nie ma trzech różnych sześcianów liczb naturalnych tworzących postęp arytmetyczny.* ([S59] 130).

1.7.8 (Maple). *Przykłady trójek (a, b, c), liczb naturalnych takich, że $a < b < c$ i wszystkie liczby*

$$ab + c, \quad bc + a, \quad ca + b,$$

są sześcianami.

$$\begin{aligned}&(1, 2, 62), (1, 21, 195), (1, 27, 37), (1, 37, 475),\\&(2, 15, 34), (2, 17, 30),\\&(3, 10, 34),\\&(5, 29, 367),\\&(8, 27, 296), (8, 37, 216),\\&(9, 20, 36),\\&(10, 15, 66),\\&(12, 19, 115), (12, 39, 44).\end{aligned}$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Różnice dwóch sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. $721 = 16^3 - 15^3 = 9^3 - 2^3$, $728 = 12^3 - 10^3 = 9^3 - 1^3$. ([Mat] 3/1984 180).

1.8.2. *Liczba* 721 *jest najmniejszą liczbą naturalną mającą dwa różne rozkłady na różnicę dwóch sześcianów liczb naturalnych.* ([Mat] 3/1984 180).

1.8.3. $3367 = 15^3 - 2^3 = 16^3 - 9^3 = 34^3 - 33^3$. ([Mat] 3/1984 180).

1.8.4. $172^3 - 135^3 = 144^3 - 71^3 = 138^3 - (-1)^3$. ([Dlt] 4/2001 6-7).

1.8.5. *Niech $x \in \mathbb{Z}$. Jeśli $(x + 1)^3 - x^3 = n^2$ dla pewnego naturalnego n, to*

$$n = a^2 + (a + 1)^2$$

dla pewnego $a \in \mathbb{Z}$. Przykład: $8^3 - 7^3 = 13^2$, $13 = 2^2 + 3^2$. ([IMO] Longlist 1971).

★ A. Górski, *Trzy równe różnice dwóch sześcianów*, [Dlt] 4/2001 6-7.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.9 Odwrotności sześcianów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Odwrotnościami sześcianów zajmowaliśmy się już w pierwszej książce serii "Podróże po Imperium Liczb" [N-1] (lub [N-1a]). W tym podrozdziale przypominamy tylko pewne zagadnienia pochodzące z tej książki.

1.9.1. *Równanie* $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{1}{z^3}$ *nie ma rozwiązań naturalnych.*

D. Przypuśćmy, że takie naturalne rozwiązanie (x, y, z) istnieje. Wtedy po pomnożeniu stronami przez $(xyz)^3$ otrzymujemy równość $(yz)^3 + (xz)^3 = (xy)^3$. Dobrze wiadomo jednak, że równanie $x^3 + y^3 = z^3$ nie ma rozwiązań naturalnych. ⊠

1.9.2. $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}=\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{65^3}+\frac{1}{260^3}=\frac{1}{520^2}$, $\frac{1}{(4\cdot 13\cdot 61)^3}+\frac{1}{(9\cdot 13\cdot 61)^3}=\frac{1}{(8\cdot 27\cdot 13\cdot 61)^2}$.

1.9.3. *Równanie* $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{1}{z^2}$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

1.9.4. *Jeśli* x, y, z *są liczbami naturalnymi takimi, że* $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{1}{z^2}$, *to* $\mathrm{nwd}(x,y)\geqslant 2$.

1.9.5. $\frac{1}{9^3}+\frac{1}{12^3}+\frac{1}{72^3}=\frac{1}{8^3}$. *Zauważmy, że* $\mathrm{nwd}(9,12,72)=3$ *oraz* $3\nmid 8$. *Inne przykłady tego typu:*

(1) $\frac{1}{95^3}+\frac{1}{171^3}+\frac{1}{570^3}=\frac{1}{90^3}$, $\mathrm{nwd}(95,171,570)=19$ *oraz* $19\nmid 90$.

(2) $\frac{1}{140^3}+\frac{1}{170^3}+\frac{1}{340^3}=\frac{1}{119^3}$, $\mathrm{nwd}(140,170,340)=10$ *oraz* $10\nmid 119$.

(3) $\frac{1}{120^3}+\frac{1}{252^3}+\frac{1}{266^3}=\frac{1}{171^3}$, $\mathrm{nwd}(120,252,266)=2$ *oraz* $2\nmid 171$. (Maple).

1.9.6. *Równanie* $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{t^3}$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.*

D. Z poprzednich przykładów wynika, że co najmniej jedno rozwiązanie naturalne (x,y,z,t) istnieje. Każda więc czwórka postaci (ax,ay,az,at), gdzie $a\in\mathbb{N}$, też jest rozwiązaniem naturalnym rozpatrywanego równania. ⊠

1.9.7. $\frac{1}{12^3}+\frac{1}{15^3}+\frac{1}{20^3}=\frac{1}{10^3}$.
Równość tę otrzymujemy dzieląc obie strony znanej równości $3^3+4^3+5^3=6^3$ *przez* 60^3. *Istnieje więc rozwiązanie naturalne równania*

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{t^3}$$

takie, że $\mathrm{nwd}(x,y,z)=1$. *Czy istnieje inne tego typu rozwiązanie naturalne? Nie znam odpowiedzi na to pytanie.* (15.02.2008).

1.9.8. *Dla każdej liczby naturalnej* $s\geqslant 3$ *równanie* $\frac{1}{x_0^3}=\frac{1}{x_1^3}+\cdots+\frac{1}{x_s^3}$ *ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych.* ([S64] 151).

1.9.9. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{5}{4}$. ([IMO] Longlist 1969, [OM] Grecja 2005).

1.9.10. $\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{n^3}<\frac{1}{12}$. ([OM] Irlandia 1990).

1.9.11. $\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^3}\right)>\frac{1}{2}$. ([IMO] Longlist 1971).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10 Różne fakty i zadania z sześcianami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.10.1. *Cztery różne przedstawienia liczby* 1025 *w postaci* $x^2 + y^3$*:*

$$1025 = 32^2 + 1^3 = 31^2 + 4^3 = 30^2 + 5^3 = 5^2 + 10^3.$$

([MG] 529(2010) 167).

1.10.2 (Maple)**.** *Cztery różne rozkłady postaci* $x^2 + y^3$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 65537 & = & 256^2 + 1^3 & = & 255^2 + 8^3 & = & 219^2 + 26^3 & = & 122^2 + 37^3, \\ 105633 & = & 325^2 + 2^3 & = & 303^2 + 24^3 & = & 264^2 + 33^3 & = & 143^2 + 44^3, \\ 183185 & = & 428^2 + 1^3 & = & 293^2 + 46^3 & = & 256^2 + 49^3 & = & 87^2 + 56^3, \\ 12730625 & = & 3568^2 + 1^3 & = & 3425^2 + 100^3 & = & 3397^2 + 106^3 & = & 2175^2 + 200^3. \end{array}$$

1.10.3. $16257025 = 4032^2 + 1^3 = 3430^2 + 165^3 = 2645^2 + 210^3 = 2541^2 + 214^3 = 795^2 + 250^3$; *pięć różnych rozkładów postaci* $x^2 + y^3$. (Maple).

1.10.4. $28344977 = 5324^2 + 1^3 = 5323^2 + 22^3 = 5310^2 + 53^3 = 4765^2 + 178^3 = 4099^2 + 226^3 = 3372^2 + 257^3$; *sześć różnych rozkładów postaci* $x^2 + y^3$. (Maple).

1.10.5. *Jeśli* $f(x) = 13x^2 - 13x + 1$, *to liczby*

$$f(-1), \quad f(0), \quad f(1), \quad f(2)$$

są sześcianami. (L. Kurlandczyk 1999).

1.10.6. *Znaleźć wszystkie pary* (a, b) *liczb naturalnych, dla których liczby*

$$a^3 + 6ab + 1, \quad b^3 + 6ab + 1$$

są sześcianami. Odp. $(a, b) = (1, 1)$. ([OM] Polska 1999/2000).

1.10.7. *Dla dowolnej liczby rzeczywistej* $r > 0$ *istnieją liczby naturalne* a *i* b *takie, że*

$$b^3 < a^2 < b^3 + rb.$$

([IMO] Shortlist 1999, [Zw] 2001).

★ Agnieszka Bajak, *Wykresy płaskich krzywych algebraicznych trzeciego i czwartego stopnia*, [Pmgr] 1999.

Literatura

[AndG] T. Andreescu, R. Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2004.

[Bedn] W. Bednarek, *Zbiór Zadań dla Uczniów Lubiących Matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1995.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. V. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[Ibe] Iberoamerican Mathematical Olympiad.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Je88] S. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, wydanie 8, PSiP, Warszawa, 1988.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-1] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[N-1a] A. Nowicki, *Liczby Wymierne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.1. Wydanie drugie. Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2012.

[N-2] A. Nowicki, *Cyfry Liczb Naturalnych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.2, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N11] A. Nowicki, *Silnie i Symbole Newtona*, Podróże po Imperium Liczb, cz.11, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[S50] W. Sierpiński, *Teoria Liczb*, Warszawa - Wrocław, 1950.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[S68] W. Sierpiński, *Arytmetyka Teoretyczna*, (wydanie 4), Biblioteka Matematyczna 7, PWN, Warszawa, 1968.

[WyKM] W. A. Wyszenskij, I. W. Kartaszow, W. I. Michaiłowskij, M. I. Jadrenko, *Zbiór Zadań Kijowskich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), 1935-1983, Kijów, 1984.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.