Podróże po Imperium Liczb

Część 09. Sześciany, Bikwadraty i Wyższe Potęgi

Rozdział 8

---

8. Problemy Prouhet-Tarry-Escotta

Andrzej Nowicki 24 kwietnia 2012, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

8 Problemy Prouhet-Tarry-Escotta

8.1 Sformułowanie problemu, oznaczenia i historia

Niech n i k będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Niech $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą n-elementowymi ciągami liczb całkowitych. Mówić będziemy, że (a, b) jest *PTE-parą stopnia k długości n*, jeśli spełnione są równości:

$$\begin{array}{rcl} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &=& b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 &=& b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \\ &\vdots& \\ a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k &=& b_1^k + b_2^k + \cdots + b_n^k. \end{array}$$

W tym przypadku pisać będziemy:

$$(a_1, \dots, a_n) \stackrel{k}{=} (b_1, \dots, b_n)$$

lub krótko $a \stackrel{k}{=} b$. W szczególności zapis $(a_1, \dots, a_n) \stackrel{1}{=} (b_1, \dots, b_n)$ oznacza, że sumy

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{oraz} \quad b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

są równe. Mamy na przykład $(2, 3, 7) \stackrel{2}{=} (1, 5, 6)$, gdyż

$$2 + 3 + 7 = 12 = 1 + 5 + 6, \quad 2^2 + 3^2 + 7^2 = 62 = 1^2 + 5^2 + 6^2.$$

Z każdej PTE-pary (a, b) stopnia k długości n można otrzymać nieskończenie wiele PTE-par tego samego stopnia k i długości większej od n. Wystarczy w tym celu do każdego z ciągów a i b dopisać nowy wspólny wyraz.

Jeśli a jest dowolnym skończonym ciągiem, a ciąg b powstaje przez permutacje wyrazów ciągu a, to oczywiście (a, b) jest PTE-parą dowolnego stopnia. Takie PTE-pary nie będą nas interesować. Interesować nas będą głównie *istotne* PTE-pary, tzn. takie PTE-pary (a, b), że zbiory

$$\Big\{a_1, a_2, \dots, a_n\Big\} \quad \text{i} \quad \Big\{b_1, b_2, \dots, b_n\Big\}$$

są rozłączne.

Jeśli k jest liczbą naturalną, to przez $N(k)$ oznaczać będziemy najmniejszą liczbę naturalną n taką, że istnieje co najmniej jedna istotna PTE-para stopnia k długości n. Można udowodnić (patrz 8.3.8), że $N(k) \geqslant k + 1$. Mówić będziemy, że istotna PTE-para stopnia k jest *idealna*, jeśli jej długość jest równa $k + 1$ (patrz [Cher]).

Liczba $N(1)$ jest oczywiście równa 2. Para (a, b), gdzie $a = (1, 3)$ i $b = (2, 2)$, jest idealną PTE-parą stopnia 1 długości $2 = 1 + 1$. Łatwo opisać wszystkie idealne PTE-pary stopnia 1.

Liczba $N(2)$ jest równa 3. Para (a, b), gdzie $a = (2, 3, 7)$ i $b = (1, 5, 6)$ (o której już wspomnieliśmy), jest idealną PTE-parą stopnia 2 długości $3 = 2 + 1$. Opis wszystkich idealnych PTE-par stopnia 2 przedstawimy w jednym z następnych podrozdziałów.

Następujące zadania nazywa się dzisiaj *problemami Prouhet-Tarry-Escotta.*

1. *Dla danych liczb naturalnych n, k opisać wszystkie PTE-pary stopnia k długości n.*
2. *Dla danej liczby naturalnej k obliczyć liczbę $N(k)$.*
3. *Dla jakich k istnieją idealne PTE-pary stopnia k?*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2 Równoważne sformułowania

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.2.1. *Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i niech $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą ciągami liczb całkowitych. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(a) $a \overset{k}{=} b$.

(b) *Stopień wielomianu* $\left(\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)\right) - \left(\prod_{i=1}^{n}(x - b_i)\right)$ *jest mniejszy lub równy* $n-(k+1)$.

([DoB], [BoI]).

D. Wynika to natychmiast z klasycznych faktów o przedstawianiu wielomianów symetrycznych w postaci wielomianów zależnych od elementarnych wielomianów symetrycznych. ⊠

8.2.2. *Niech $n, k \in \mathbb{N}$ i niech $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą ciągami nieujemnych liczb całkowitych. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(a) $a \overset{k}{=} b$.

(c) *Wielomian* $\left(\sum_{i=1}^{n} x^{a_i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{b_i}\right)$ *jest podzielny przez* $(x-1)^{k+1}$. ([DoB], [BoI]).

D. Wynika to z faktu, że dany wielomian $F(x)$ jest podzielny przez $(x-1)^{k+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $F(1) = F^{(1)}(1) = F^{(2)}(1) = \cdots = F^{(k)}(1) = 0$, gdzie każde $F^{(i)}(x)$ oznacza i-tą pochodną wielomianu $F(x)$. ⊠

8.2.3. *Niech $k \in \mathbb{N}$. Następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje idealna PTE-para stopnia k.*

(2) *Istnieją dwa moniczne wielomiany $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ takie, że:*
- (a) $\deg f(x) = \deg g(x) = k$,
- (b) *wszystkie (zespolone) pierwiastki tych wielomianów są liczbami całkowitymi,*
- (c) *różnica $f(x) - g(x)$ jest niezerową stałą.* ([DoB], [BoI]).

D. Jest to konsekwencją twierdzenia 8.2.1 dla $n = k + 1$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3 Twierdzenia o PTE-parach

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.3.1 (M. Frolov 1888)**.** *Niech* $k \in \mathbb{N}$ *i niech* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$. *Jeśli* $(a_1, \dots, a_n) \stackrel{k}{=} (b_1, \dots, b_n)$, *to*

$$(ua_1 + v, ua_2 + v, \dots, ua_n + v) \stackrel{k}{=} (ub_1 + v, ub_2 + v \dots, ub_n + v)$$

dla dowolnych $u, v \in \mathbb{Z}$. ([Frol], [DoB], [BoI]).

D. Łatwo to wynika na przykład z twierdzenia 8.2.2. ⊠

8.3.2. *Niech* $n, k \in \mathbb{N}$. *Jeśli istnieje istotna PTE-para stopnia* k *długości* n, *to takich istotnych PTE-par istnieje nieskończenie wiele.*

D. Wynika to natychmiast z 8.3.1. ⊠

Niech $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ będą ciągami liczb całkowitych i załóżmy, że $a \stackrel{k}{=} b$. Mówić będziemy, że PTE-para (a, b) jest *pierwotna*, jeśli wszystkie liczby $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ są nieujemne, najmniejsza z nich jest równa zero oraz $\mathrm{nwd}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 1$. Z twierdzenia 8.3.1 wynika:

8.3.3. *Niech* $n, k \in \mathbb{N}$. *Jeśli istnieje PTE-para stopnia* k *długości* n, *to istnieje pierwotna PTE-para stopnia* k *długości* n.

8.3.4 (Escott 1910, Tarry 1912)**.** *Niech* $k \in \mathbb{N}$ *i niech* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Z}$. *Jeśli* $(a_1, \dots, a_n) \stackrel{k}{=} (b_1, \dots, b_n)$, *to*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1 + c, b_2 + c, \dots, b_n + c) \stackrel{k+1}{=} (b_1, b_2, \dots, b_n, a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_n + c)$$

dla dowolnej liczby całkowitej c. ([Esco], [Tar], [DoB], [BoI]).

D. Dodając do wszystkich liczb $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ tę samą liczbę całkowitą d możemy założyć, na mocy 8.3.1, że wszystkie liczby $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ są nieujemne.

Dla danego ciągu $d = (d_1, d_2, \dots, d_s)$ nieujemnych liczb całkowitych, oznaczmy przez H_d wielomian $x^{d_1} + x^{d_2} + \cdots + x^{d_s}$. Z twierdzenia 8.2.2 wiemy, że wielomian $H_a - H_b$ jest podzielny przez $(x-1)^{k+1}$. Niech

$$u = (a_1, a_2, \dots, a_n, b_1 + c, b_2 + c, \dots, b_n + c), \quad v = (b_1, b_2, \dots, b_n, a_1 + c, a_2 + c, \dots, a_n + c).$$

Należy pokazać, że $u \stackrel{k+1}{=} v$.

Załóżmy najpierw, że c jest nieujemną liczbą całkowitą. Zauważmy, że $H_u = H_a + x^c H_b$, $H_v = H_b + x^c H_a$. Zatem $H_u - H_v = (H_a - x^c H_b) - (H_b + x^c H_a) = (1 - x^c)(H_a - H_b)$ i stąd wynika, że wielomian $H_u - H_v$ jest podzielny przez $(x-1)^{k+2}$. To implikuje, na mocy 8.2.2, że $u \stackrel{k+1}{=} v$.

Załóżmy teraz, że $c < 0$. Niech $c = -d$, gdzie $d \in \mathbb{N}$. Dodając do wszystkich wyrazów ciągów u i v liczbę d, otrzymujemy dwa ciągi

$$u' = (a_1 + d, a_2 + d, \dots, a_n + d, b_1, b_2, \dots, b_n), \quad v' = (b_1 + d, b_2 + d, \dots, b_n + d, a_1, a_2, \dots, a_n)$$

które, na mocy pierwszej części tego dowodu, tworzą PTE-parę stopnia $k+1$. Dodając do ich wszystkich wyrazów liczbę c, otrzymujemy parę (u, v) i dzięki 8.3.1 jest to PTE-para stopnia $k+1$. ⊠

Powyższe twierdzenie jest sformułowane dla liczb całkowitych. To samo zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych (a nawet zespolonych). Dowód jest identyczny. Zanotujmy:

8.3.5 (Escott 1910, Tarry 1912). *Jeśli* $a_1^i+a_2^i+\cdots+a_n^i = b_1^i+b_2^i+\cdots+b_n^i$ *dla* $i=1,2,\dots,k$, *to*

$$\begin{aligned}&a_1^i + a_2^i + \cdots + a_n^i + (b_1+c)^i + (b_2+c)^i + \cdots + (b_n+c)^i\\ &= b_1^i + b_2^i + \cdots + b_n^i + (a_1+c)^i + (a_2+c)^i + \cdots + (a_n+c)^i\end{aligned}$$

dla $i=1,2,\dots,k+1$, *gdzie* c *jest dowolną liczbą.* ([S59] 73).

8.3.6. *Niech* $n,s\in\mathbb{N}$ *i niech* $a_1,\dots,a_s,b_1,\dots,b_s\in\mathbb{Z}$. *Jeśli*

$$a_1^i + a_2^i + \cdots + a_s^i = b_1^i + b_2^i + \cdots + b_s^i,$$

dla wszystkich $i=1,3,5,\dots,2n-1$, *to*

$$(a_1,a_2,\dots,a_s,-b_1,-b2,\dots,-b_s) \stackrel{2n}{=} (-a_1,-a_2,\dots,-a_s,b_1,b_2,\dots,b_s).$$

([Sinha]).

Zanotujmy następujące stare twierdzenie.

8.3.7 (L. Bastein 1913). *Niech* $n,k\in\mathbb{N}$ *i niech* $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$ *będą ciągami liczb całkowitych. Załóżmy, że* (a,b) *jest istotną PTE-parą stopnia* k, *tzn.* $a\stackrel{k}{=}b$ *oraz zbiory* $\{a_1,\dots,a_n\}$ *i* $\{b_1,\dots,b_n\}$ *są rozłączne. Wtedy* $n\geqslant k+1$. ([Bast], [HW5] s.328).

D. Przypuśćmy, że $n\leqslant k$. Niech $F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, $G(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_n)$. Z twierdzenia 8.2.1 wiemy, że $\deg(F(x)-G(x))\leqslant n-(k+1)<0$. Zatem wielomian $F(x)-G(x)$ jest zerowy, czyli $F(x)=G(x)$. Wielomiany $F(x)$ i $G(x)$ mają więc identyczne zbiory pierwiastków. Zatem zbiory $\{a_1,\dots,a_n\}$ i $\{b_1,\dots,b_b\}$ są identyczne; wbrew temu, że są to zbiory rozłączne. ⊠

Przypomnijmy, że przez $N(k)$ oznaczamy najmniejszą liczbę naturalną n taką, że istnieje co najmniej jedna istotna PTE-para stopnia k długości n. Z powyższego twierdzenia wynika:

8.3.8. $N(k)\geqslant k+1$, *dla wszystkich* $k\in\mathbb{N}$. ([DoB], [BoI], [HW5] s.329).

Znane są również następujące oszacowania liczby $N(k)$.

8.3.9. $N(k)\leqslant \frac{1}{2}k(k+1)$. ([BoI], [HW5] s.329).

8.3.10 ([Wr35], [Me61]). $N(k)\leqslant\frac{1}{2}(k^2-3)$, *gdy* k *nieparzyste;* $N(k)\leqslant 12(k^2-4)$, *gdy* k *parzyste.* ([BoI]).

8.3.11. *Niech* $a\leqslant b$ *oraz* $c\leqslant d$ *będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech* $m>1$ *będzie liczbą naturalną. Jeśli* $a+b=c+d$ *i* $a^m+b^m=c^m+d^m$, *to* $a=c$ *i* $b=d$. ([S59] 71).

8.3.12. *Niech* $a_0,a_1,\dots,a_k$ *będą liczbami naturalnymi, gdzie* $k>1$. *Istnieje wtedy co najwyżej jedna liczba naturalna* n *taka, że*

$$a_0^n = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n. \quad \text{([Mat] 4/1964 188).}$$

★ Ewelina Kuczyńska, *Problemy Prouhet-Tarry-Escotta*, [Pmgr] 2009.

---

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4 PTE-pary stopnia 2

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.4.1. *Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieją dwa n-elementowe zbiory $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ i $B_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ takie, że:*

(1) *elementy $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ są liczbami naturalnymi,*

(2) $A_n \cap B_n = \emptyset$,

(3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$,

(4) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$.

([OM] Iran 1999, [Crux] 2002 s.11-12).

D. ([Crux] 2002 s.11-12). Dla $n = 3, 4, 5$ tezę spełniają zbiory:

$$\begin{array}{ll} A_3 = \{1,5,6\}, & B_3 = \{2,3,7\}, \\ A_4 = \{1,4,6,7\}, & B_4 = \{2,3,5,8\}, \\ A_5 = \{1,5,9,17,18\}, & B_5 = \{2,3,11,15,19\}. \end{array}$$

Niech $n \geqslant 3$ i załóżmy, że zbiory $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ i $B_n = \{y_1, \dots, y_n\}$ spełniają żądane warunki. Wtedy zbiory

$$A_{n+3} = \{1,5,6\} \cup \{8x_1, 8x_2, \dots, 8x_n\}, \quad B_{n+3} = \{2,3,7\} \cup \{8y_1, 8y_2, \dots, 8y_n\},$$

również spełniają żądane warunki. Teza wynika więc na mocy indukcji. ⊠

Dalej stosujemy terminologię wprowadzoną w poprzednich podrozdziałach.

8.4.2 (Maple)**.** *Przykłady pierwotnych idealnych PTE-par stopnia* 2.

$$\begin{array}{ccc}
(0,3,3) \stackrel{2}{=} (1,1,4); & (0,4,5) \stackrel{2}{=} (1,2,6); & (0,5,7) \stackrel{2}{=} (1,3,8); \\
(0,5,8) \stackrel{2}{=} (2,2,9); & (0,7,7) \stackrel{2}{=} (1,4,9); & (0,7,8) \stackrel{2}{=} (2,3,10); \\
(0,6,9) \stackrel{2}{=} (1,4,10); & (0,6,11) \stackrel{2}{=} (2,3,12); & (0,7,11) \stackrel{2}{=} (1,5,12); \\
(0,9,10) \stackrel{2}{=} (1,6,12); & (0,10,11) \stackrel{2}{=} (3,4,14); & (0,9,12) \stackrel{2}{=} (2,5,14); \\
(0,8,13) \stackrel{2}{=} (1,6,14); & (0,7,14) \stackrel{2}{=} (2,4,15); & (0,9,13) \stackrel{2}{=} (3,4,15); \\
(0,7,15) \stackrel{2}{=} (3,3,16); & (0,11,12) \stackrel{2}{=} (2,6,15); & (0,11,13) \stackrel{2}{=} (1,8,15); \\
(0,11,13) \stackrel{2}{=} (3,5,16); & (0,9,15) \stackrel{2}{=} (1,7,16); & (0,8,17) \stackrel{2}{=} (2,5,18); \\
(0,13,13) \stackrel{2}{=} (1,9,16); & (0,13,14) \stackrel{2}{=} (4,5,18); & (0,11,16) \stackrel{2}{=} (2,7,18); \\
(0,10,17) \stackrel{2}{=} (1,8,18); & (0,8,19) \stackrel{2}{=} (3,4,20); & (0,13,16) \stackrel{2}{=} (1,10,18); \\
(0,11,18) \stackrel{2}{=} (3,6,20); & (0,9,20) \stackrel{2}{=} (2,6,21); & (0,13,17) \stackrel{2}{=} (3,7,20).
\end{array}$$

8.4.3 (Goldbach 1750, [Dic2] s.705)**.**

$$(d,\ a+b+d,\ a+c+d,\ b+c+d) \stackrel{2}{=} (a+d,\ b+d,\ c+d,\ a+b+c+d).$$

8.4.4 (Euler 1751, [Dic2] s.705)**.**

$$(0,\ a+b,\ a+c,\ b+c) \stackrel{2}{=} (a,\ b,\ c,\ a+b+c).$$

8.4.5. *Jeśli* $t = \frac{2}{3}(a+b+c)$, *to*

$$(a,b,c) \stackrel{2}{=} (t-a,\ t-b,\ t-c).$$ ([Dic2] s.705).

8.4.6 (F. Pollock 1861). $(a, a+b, a+2b+3c) \stackrel{2}{=} (a-c, a+b+2c, a+2b+2c)$. ([Dic2] s.705).

8.4.7 (A. Martin 1898). $(a, b, 2a+2b) \stackrel{2}{=} (a+2b, 2a+b, 0)$. ([Dic2] s.706).

8.4.8 (A. Martin 1898). $(a, b, 2a+2b, 3a+3b) \stackrel{2}{=} (3a+2b, 2a+3b, a+b, 0)$. ([Dic2] s.706).

8.4.9 (A. Gérardin 1910). $(a, 2a+3b, 4a+2b) \stackrel{2}{=} (a+2b, 4a+3b, 2a)$. ([Dic2] s.709).

8.4.10. *Jeśli* $xy = bc$, *to* $(x+y, b, c) \stackrel{2}{=} (x, y, b+c)$. ([Dic2] s.706).

8.4.11 (A. Cunningham 1903). *Jeśli* $(a,b,c) \stackrel{2}{=} (x,y,z)$, *to*

$$(a, b, c+kz, kc) \stackrel{2}{=} (x, y, z+kc, kz).$$ ([Dic2] s.706).

8.4.12. *Jeśli* $(x_1,x_2,x_3) \stackrel{2}{=} (y_1,y_2,y_3)$, *to*

$$(y_1-x_3)(y_1-x_1) = (x_2-y_2)(x_2-y_3).$$ ([Mat] 2/58 53).

8.4.13 (Dickson 1919). *Wszystkie rozwiązania całkowite równania*

$$(x_1,x_2,x_3) \stackrel{2}{=} (y_1,y_2,y_3)$$

są postaci

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1 &=& ac+u, & \qquad & y_1 &=& ac+bd+u, \\ x_2 &=& ad+bc+u, & & y_2 &=& bc+u, \\ x_3 &=& bd+u, & & y_3 &=& ad+u, \end{array}$$

gdzie $a,b,c,d,u \in \mathbb{Z}$. ([Dic2], [DoB], [S59] 74).

8.4.14. $(-1,-2,3,-4,5,6,-7) \stackrel{2}{=} (1,2,-3,4,-5,-6,7)$. ([Dic2] s.706).

8.4.15 (E. Cesaro 1878).

$$(2,4,5,9) \stackrel{2}{=} (1,5,6,8) \stackrel{2}{=} (2,3,7,8).$$

Występują tu wszystkie liczby $1,2,\dots,9$. ([Dic2] s.705).

8.4.16. $(1,43,64) \stackrel{2}{=} (8,29,71) \stackrel{2}{=} (16,19,73)$. ([Glod], [S59] 66).

8.4.17 (Maple). *Przykłady "potrójnych" idealnych PTE-par stopnia* 2.

$$\begin{array}{ll} (0,11,13) \stackrel{2}{=} (1,8,15) \stackrel{2}{=} (3,5,16); & (0,11,19) \stackrel{2}{=} (1,9,20) \stackrel{2}{=} (4,5,21); \\ (0,13,23) \stackrel{2}{=} (1,11,24) \stackrel{2}{=} (3,8,25); & (0,15,24) \stackrel{2}{=} (2,11,26) \stackrel{2}{=} (6,6,27); \\ (0,22,23) \stackrel{2}{=} (2,15,28) \stackrel{2}{=} (7,8,30); & (0,19,29) \stackrel{2}{=} (3,13,32) \stackrel{2}{=} (7,8,33); \\ (0,21,28) \stackrel{2}{=} (1,18,30) \stackrel{2}{=} (6,10,33); & (0,23,27) \stackrel{2}{=} (3,15,32) \stackrel{2}{=} (5,12,33). \end{array}$$

8.4.18. $(5a+b, 4b-a, 8a+10b) \stackrel{2}{=} (6b, 9a+9b, 3a) \stackrel{2}{=} (3a+9b, 9a+6b, 0)$.

8.4.19. $(9,10,35) \stackrel{2}{=} (1,26,27) \stackrel{2}{=} (5,15,34) \stackrel{2}{=} (2,21,31)$. *Dokładniej, układ równań:*

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 54 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2 &= 1406, \end{cases}$$

ma dokładnie 4 *rozwiązania całkowite*(x_1,x_2,x_3) *spełniające warunek* $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$: $(9,10,35)$, $(1,26,27)$, $(5,15,34)$, $(2,21,31)$. ([Mon] 43(2)(1936) z.3692).

8.4.20 (Maple). *Przykłady czterech ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,16,17) \stackrel{2}{=} (1,12,20) \stackrel{2}{=} (2,10,21) \stackrel{2}{=} (5,6,22)$; $(0,17,22) \stackrel{2}{=} (1,14,24) \stackrel{2}{=} (2,12,25) \stackrel{2}{=} (4,9,26)$;
$(0,21,21) \stackrel{2}{=} (1,16,25) \stackrel{2}{=} (3,12,27) \stackrel{2}{=} (7,7,28)$; $(0,25,26) \stackrel{2}{=} (1,20,30) \stackrel{2}{=} (4,14,33) \stackrel{2}{=} (8,9,34)$;
$(0,25,29) \stackrel{2}{=} (1,21,32) \stackrel{2}{=} (4,15,35) \stackrel{2}{=} (7,11,36)$; $(0,23,31) \stackrel{2}{=} (1,20,33) \stackrel{2}{=} (3,16,35) \stackrel{2}{=} (5,13,36)$;
$(0,27,30) \stackrel{2}{=} (2,20,35) \stackrel{2}{=} (3,18,36) \stackrel{2}{=} (8,11,38)$; $(0,29,31) \stackrel{2}{=} (1,24,35) \stackrel{2}{=} (5,16,39) \stackrel{2}{=} (9,11,40)$.

8.4.21 (Maple). *Przykłady pięciu ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$$(0,35,49) \stackrel{2}{=} (1,32,51) \stackrel{2}{=} (5,24,55) \stackrel{2}{=} (7,21,56) \stackrel{2}{=} (11,16,57);$$
$$(0,43,59) \stackrel{2}{=} (3,35,64) \stackrel{2}{=} (4,33,65) \stackrel{2}{=} (9,25,68) \stackrel{2}{=} (13,20,69);$$
$$(0,47,67) \stackrel{2}{=} (1,44,69) \stackrel{2}{=} (7,32,75) \stackrel{2}{=} (9,29,76) \stackrel{2}{=} (12,25,77);$$
$$(0,53,76) \stackrel{2}{=} (1,50,78) \stackrel{2}{=} (8,36,85) \stackrel{2}{=} (10,33,86) \stackrel{2}{=} (20,21,88);$$
$$(0,46,83) \stackrel{2}{=} (3,40,86) \stackrel{2}{=} (6,35,88) \stackrel{2}{=} (11,28,90) \stackrel{2}{=} (18,20,91);$$
$$(0,58,83) \stackrel{2}{=} (3,50,88) \stackrel{2}{=} (6,44,91) \stackrel{2}{=} (11,36,94) \stackrel{2}{=} (19,26,96);$$
$$(0,63,84) \stackrel{2}{=} (3,54,90) \stackrel{2}{=} (8,44,95) \stackrel{2}{=} (14,35,98) \stackrel{2}{=} (18,30,99);$$

8.4.22 (Maple). *Przykłady sześciu ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$$(0,41,46) \stackrel{2}{=} (1,36,50) \stackrel{2}{=} (2,33,52) \stackrel{2}{=} (6,25,56) \stackrel{2}{=} (8,22,57) \stackrel{2}{=} (12,17,58);$$
$$(0,49,56) \stackrel{2}{=} (1,44,60) \stackrel{2}{=} (4,36,65) \stackrel{2}{=} (5,34,66) \stackrel{2}{=} (10,26,69) \stackrel{2}{=} (14,21,70);$$
$$(0,52,65) \stackrel{2}{=} (1,48,68) \stackrel{2}{=} (2,45,70) \stackrel{2}{=} (8,33,76) \stackrel{2}{=} (10,30,77) \stackrel{2}{=} (13,26,78);$$
$$(0,67,68) \stackrel{2}{=} (2,55,78) \stackrel{2}{=} (3,52,80) \stackrel{2}{=} (10,38,87) \stackrel{2}{=} (12,35,88) \stackrel{2}{=} (22,23,90);$$
$$(0,53,82) \stackrel{2}{=} (2,48,85) \stackrel{2}{=} (5,42,88) \stackrel{2}{=} (8,37,90) \stackrel{2}{=} (13,30,92) \stackrel{2}{=} (20,22,93);$$
$$(0,70,77) \stackrel{2}{=} (2,60,85) \stackrel{2}{=} (5,52,90) \stackrel{2}{=} (8,46,93) \stackrel{2}{=} (13,38,96) \stackrel{2}{=} (21,28,98);$$
$$(0,69,81) \stackrel{2}{=} (1,64,85) \stackrel{2}{=} (4,55,91) \stackrel{2}{=} (9,45,96) \stackrel{2}{=} (15,36,99) \stackrel{2}{=} (19,31,100);$$

8.4.23 (Maple). *Przykłady siedmiu ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,62,79) \stackrel{2}{=} (2,55,84) \stackrel{2}{=} (4,50,87) \stackrel{2}{=} (7,44,90) \stackrel{2}{=} (10,39,92) \stackrel{2}{=} (15,32,94) \stackrel{2}{=} (22,24,95)$;
$(0,79,101) \stackrel{2}{=} (1,75,104) \stackrel{2}{=} (5,64,111) \stackrel{2}{=} (9,56,115) \stackrel{2}{=} (16,45,119) \stackrel{2}{=} (19,41,120) \stackrel{2}{=} (24,35,121)$;
$(0,89,109) \stackrel{2}{=} (4,75,119) \stackrel{2}{=} (7,68,123) \stackrel{2}{=} (9,64,125) \stackrel{2}{=} (13,57,128) \stackrel{2}{=} (23,43,132) \stackrel{2}{=} (32,33,133)$

8.4.24 (Maple). *Przykłady ośmiu ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,71,73) \stackrel{2}{=} (1,63,80) \stackrel{2}{=} (3,56,85) \stackrel{2}{=} (5,51,88) \stackrel{2}{=} (8,45,91) \stackrel{2}{=} (11,40,93) \stackrel{2}{=} (16,33,95) \stackrel{2}{=} (23,25,96)$;

$(0,86,97) \stackrel{2}{=} (1,80,102) \stackrel{2}{=} (2,76,105) \stackrel{2}{=} (6,65,112) \stackrel{2}{=} (10,57,116) \stackrel{2}{=} (17,46,120) \stackrel{2}{=} (20,42,121) \stackrel{2}{=} (25,36,122)$.

8.4.25 (Maple). *Przykłady* 9 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,154,161) \stackrel{2}{=} (1,144,170) \stackrel{2}{=} (6,124,185) \stackrel{2}{=} (9,116,190) \stackrel{2}{=} (14,105,196) \stackrel{2}{=} (20,94,201) \stackrel{2}{=} (25,86,204) \stackrel{2}{=} (40,66,209) \stackrel{2}{=} (49,56,210)$;

$(0,218,241) \stackrel{2}{=} (1,210,248) \stackrel{2}{=} (6,188,265) \stackrel{2}{=} (10,176,273) \stackrel{2}{=} (20,153,286) \stackrel{2}{=} (33,130,296) \stackrel{2}{=} (41,118,300) \stackrel{2}{=} (58,96,305) \stackrel{2}{=} (65,88,306)$;

$(0,255,288) \stackrel{2}{=} (2,242,299) \stackrel{2}{=} (12,207,324) \stackrel{2}{=} (20,188,335) \stackrel{2}{=} (27,174,342) \stackrel{2}{=} (38,155,350) \stackrel{2}{=} (63,120,360) \stackrel{2}{=} (74,107,362) \stackrel{2}{=} (90,90,363)$.

8.4.26 (Maple). *Przykłady* 10 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,273,273) \stackrel{2}{=} (1,256,289) \stackrel{2}{=} (3,243,300) \stackrel{2}{=} (13,208,325) \stackrel{2}{=} (21,189,336) \stackrel{2}{=} (28,175,343) \stackrel{2}{=} (39,156,351) \stackrel{2}{=} (64,121,361) \stackrel{2}{=} (75,108,363) \stackrel{2}{=} (91,91,364)$;

$(0,305,307) \stackrel{2}{=} (1,288,323) \stackrel{2}{=} (8,253,351) \stackrel{2}{=} (15,232,365) \stackrel{2}{=} (23,213,376) \stackrel{2}{=} (32,195,385) \stackrel{2}{=} (43,176,393) \stackrel{2}{=} (57,155,400) \stackrel{2}{=} (85,120,407) \stackrel{2}{=} (101,103,408)$;

$(0,343,392) \stackrel{2}{=} (2,330,403) \stackrel{2}{=} (7,308,420) \stackrel{2}{=} (18,275,442) \stackrel{2}{=} (28,252,455) \stackrel{2}{=} (35,238,462) \stackrel{2}{=} (48,215,472) \stackrel{2}{=} (70,182,483) \stackrel{2}{=} (87,160,488) \stackrel{2}{=} (98,147,490)$.

8.4.27 (Maple). *Przykłady* 11 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,175,203) \stackrel{2}{=} (3,160,215) \stackrel{2}{=} (5,153,220) \stackrel{2}{=} (7,147,224) \stackrel{2}{=} (15,128,235) \stackrel{2}{=} (17,124,237) \stackrel{2}{=} (28,105,245) \stackrel{2}{=} (32,99,247) \stackrel{2}{=} (37,92,249) \stackrel{2}{=} (49,77,252) \stackrel{2}{=} (60,65,253)$;

$(0,224,259) \stackrel{2}{=} (3,208,272) \stackrel{2}{=} (4,204,275) \stackrel{2}{=} (14,175,294) \stackrel{2}{=} (19,164,300) \stackrel{2}{=} (22,158,303) \stackrel{2}{=} (28,147,308) \stackrel{2}{=} (47,118,318) \stackrel{2}{=} (50,114,319) \stackrel{2}{=} (63,98,322) \stackrel{2}{=} (72,88,323)$;

$(0,238,287) \stackrel{2}{=} (2,228,295) \stackrel{2}{=} (7,210,308) \stackrel{2}{=} (8,207,310) \stackrel{2}{=} (20,178,327) \stackrel{2}{=} (23,172,330) \stackrel{2}{=} (40,143,342) \stackrel{2}{=} (42,140,343) \stackrel{2}{=} (55,122,348) \stackrel{2}{=} (63,112,350) \stackrel{2}{=} (78,95,352)$.

8.4.28 (Maple). *Przykłady* 12 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2.

$(0,188,193) \stackrel{2}{=} (1,176,204) \stackrel{2}{=} (4,161,216) \stackrel{2}{=} (6,154,221) \stackrel{2}{=} (8,148,225) \stackrel{2}{=} (16,129,236) \stackrel{2}{=} (18,125,238) \stackrel{2}{=} (29,106,246) \stackrel{2}{=} (33,100,248) \stackrel{2}{=} (38,93,250) \stackrel{2}{=} (50,78,253) \stackrel{2}{=} (61,66,254)$;

$(0,235,251) \stackrel{2}{=} (1,225,260) \stackrel{2}{=} (4,209,273) \stackrel{2}{=} (5,205,276) \stackrel{2}{=} (15,176,295) \stackrel{2}{=} (20,165,301) \stackrel{2}{=} (23,159,304) \stackrel{2}{=} (29,148,309) \stackrel{2}{=} (48,119,319) \stackrel{2}{=} (51,115,320) \stackrel{2}{=} (64,99,323) \stackrel{2}{=} (73,89,324)$;

$(0,254,265) \stackrel{2}{=} (1,242,276) \stackrel{2}{=} (4,225,290) \stackrel{2}{=} (6,217,296) \stackrel{2}{=} (10,204,305) \stackrel{2}{=} (17,186,316) \stackrel{2}{=} (30,160,329) \stackrel{2}{=} (41,142,336) \stackrel{2}{=} (50,129,340) \stackrel{2}{=} (56,121,342) \stackrel{2}{=} (70,104,345) \stackrel{2}{=} (81,92,346)$.

8.4.29 (Maple)**.** *Przykłady* 16 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 2*.*

$(0,389,412) \stackrel{2}{=} (2,369,430) \stackrel{2}{=} (4,357,440) \stackrel{2}{=} (5,352,444) \stackrel{2}{=} (12,325,464) \stackrel{2}{=} (17,310,474)$
$\stackrel{2}{=} (24,292,485) \stackrel{2}{=} (34,270,497) \stackrel{2}{=} (37,264,500) \stackrel{2}{=} (49,242,510) \stackrel{2}{=} (60,224,517) \stackrel{2}{=} (70,209,522)$
$\stackrel{2}{=} (90,182,529) \stackrel{2}{=} (94,177,530) \stackrel{2}{=} (104,165,532) \stackrel{2}{=} (122,145,534)$;

$(0,433,443) \stackrel{2}{=} (1,416,459) \stackrel{2}{=} (3,400,473) \stackrel{2}{=} (8,375,493) \stackrel{2}{=} (9,371,496) \stackrel{2}{=} (23,328,525)$
$\stackrel{2}{=} (25,323,528) \stackrel{2}{=} (31,309,536) \stackrel{2}{=} (48,275,553) \stackrel{2}{=} (56,261,559) \stackrel{2}{=} (59,256,561) \stackrel{2}{=} (88,213,575)$
$\stackrel{2}{=} (91,209,576) \stackrel{2}{=} (111,184,581) \stackrel{2}{=} (125,168,583) \stackrel{2}{=} (141,151,584)$.

8.4.30. *Nie ma liczb całkowitych a_0, a_1, a_2 różnych od zera takich, że*

$$a_0 = a_1 + a_2, \quad a_0^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

([Mat] 4/1964 189, wynika z 8.3.7).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5 PTE-pary stopnia 3

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.5.1. $(0,4,7,11) \stackrel{3}{=} (1,2,9,10)$. ([S59] 72).

8.5.2. $(1,-1,8,-8) \stackrel{3}{=} (4,-4,7,-7)$. ([S64] s.125).

8.5.3. $(2^2,16^2,21^2,25^2) \stackrel{3}{=} (5^2,14^2,23^2,24^2)$. ([Gl47], [S59] 72).

8.5.4. $(1^3,1^3,6^3,6^3) \stackrel{3}{=} (-42,87,130,259)$. (National Mathem. Magazine 13(1)(1958) 42-43).

8.5.5 (Maple)**.** *Przykłady pierwotnych idealnych PTE-par stopnia* 3*.*

$(0,3,4,7) \stackrel{3}{=} (1,1,6,6)$;	$(0,5,5,10) \stackrel{3}{=} (1,2,8,9)$;	$(0,4,7,11) \stackrel{3}{=} (1,2,9,10)$;
$(0,6,7,13) \stackrel{3}{=} (1,3,10,12)$;	$(0,5,10,15) \stackrel{3}{=} (1,3,12,14)$;	$(0,7,9,16) \stackrel{3}{=} (1,4,12,15)$;
$(0,8,9,17) \stackrel{3}{=} (2,3,14,15)$;	$(0,5,12,17) \stackrel{3}{=} (2,2,15,15)$;	$(0,7,11,18) \stackrel{3}{=} (2,3,15,16)$;
$(0,8,11,19) \stackrel{3}{=} (1,5,14,18)$;	$(0,6,13,19) \stackrel{3}{=} (1,4,15,18)$;	$(0,10,11,21) \stackrel{3}{=} (1,6,15,20)$;
$(0,9,11,22) \stackrel{3}{=} (2,4,15,21)$;	$(0,9,13,22) \stackrel{3}{=} (1,6,16,21)$;	$(0,11,13,22) \stackrel{3}{=} (1,7,18,20)$;
$(0,11,12,23) \stackrel{3}{=} (2,5,18,21)$;	$(0,8,15,23) \stackrel{3}{=} (3,3,20,20)$;	$(0,7,16,23) \stackrel{3}{=} (1,5,18,22)$;
$(0,6,17,23) \stackrel{3}{=} (2,3,20,21)$;	$(0,11,13,24) \stackrel{3}{=} (3,4,20,21)$;	$(0,10,15,25) \stackrel{3}{=} (1,7,18,24)$.

8.5.6 (J.W. Nicholson 1894, [Dic2] 706)**.**

$$(3a+3b, 2a+4b, a, b) \stackrel{3}{=} (3a+4b, a+3b, 2a+b, 0).$$

8.5.7 (A. Gérardin 1907, [Dic2] 707)**.**

$$(0, a+2, 3a+1, 4a+3) \stackrel{3}{=} (1, a, 3a+3, 4a+2).$$

8.5.8 (C. Bisman 1911, [Dic2] 709)**.**

$$(a-b, a-2c, a+b+c, a+2b-c) \stackrel{3}{=} (a+2b, a+c, a-b-c.a+b-2c).$$

8.5.9 (A. Gérardin 1913). $(0, p(p+a+b), p^2+2p(a+b)+2ab, p(a+b)+2ab) \overset{3}{=} (ap, bp, p^2+p(a+2b)+2ab, p^2+p(2a+b)+2ab)$. ([Dic2] 711).

8.5.10. $(ab, cd, cd+ad+bc, ab+ad+bc) \overset{3}{=} (ad, bc, ab+cd+ad, ab+cd+bc)$. ([DoB]).

8.5.11 (Maple). *Przykłady "potrójnych" idealnych PTE-par stopnia* 3.

$(0,10,15,25) \overset{3}{=} (1,7,18,24) \overset{3}{=} (3,4,21,22)$;
$(0,13,16,29) \overset{3}{=} (1,9,20,28) \overset{3}{=} (2,7,22,27)$;
$(0,15,20,35) \overset{3}{=} (2,9,26,33) \overset{3}{=} (5,5,30,30)$;
$(0,17,19,36) \overset{3}{=} (1,12,24,35) \overset{3}{=} (3,8,28,33)$;
$(0,14,23,37) \overset{3}{=} (1,11,26,36) \overset{3}{=} (2,9,28,35)$;
$(0,15,25,40) \overset{3}{=} (1,12,28,39) \overset{3}{=} (4,7,33,36)$;
$(0,19,22,41) \overset{3}{=} (1,14,27,40) \overset{3}{=} (5,7,34,36)$.

8.5.12 (Maple). *Przykłady czterech ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 3.

$$(0,23,24,47) \overset{3}{=} (2,14,33,45) \overset{3}{=} (3,12,35,44) \overset{3}{=} (5,9,38,42);$$
$$(0,28,29,57) \overset{3}{=} (1,21,36,56) \overset{3}{=} (2,18,39,55) \overset{3}{=} (6,11,46,51);$$
$$(0,27,34,61) \overset{3}{=} (1,22,39,60) \overset{3}{=} (4,15,46,57) \overset{3}{=} (6,12,49,55);$$
$$(0,30,35,65) \overset{3}{=} (2,21,44,63) \overset{3}{=} (5,15,50,60) \overset{3}{=} (8,11,54,57);$$
$$(0,29,37,66) \overset{3}{=} (1,24,42,65) \overset{3}{=} (2,21,45,64) \overset{3}{=} (9,10,56,57);$$
$$(0,31,38,69) \overset{3}{=} (3,20,49,66) \overset{3}{=} (4,18,51,65) \overset{3}{=} (9,11,58,60);$$
$$(0,28,41,69) \overset{3}{=} (1,24,45,68) \overset{3}{=} (3,19,50,66) \overset{3}{=} (6,14,55,63);$$
$$(0,36,37,73) \overset{3}{=} (1,28,45,72) \overset{3}{=} (3,22,51,70) \overset{3}{=} (7,15,58,66);$$
$$(0,36,43,79) \overset{3}{=} (1,30,49,78) \overset{3}{=} (3,24,55,76) \overset{3}{=} (10,13,66,69);$$
$$(0,35,45,80) \overset{3}{=} (3,24,56,77) \overset{3}{=} (5,20,60,75) \overset{3}{=} (11,12,68,69);$$
$$(0,41,42,83) \overset{3}{=} (3,26,57,80) \overset{3}{=} (6,20,63,77) \overset{3}{=} (8,17,66,75);$$
$$(0,37,46,83) \overset{3}{=} (2,28,55,81) \overset{3}{=} (7,18,65,76) \overset{3}{=} (11,13,70,72).$$

8.5.13 (Maple). *Przykłady* 6 *ciągów tworzących idealne PTE-pary stopnia* 3.

$$(0,50,55,105) \overset{3}{=} (1,42,63,104) \overset{3}{=} (5,30,75,100) \overset{3}{=} (6,28,77,99) \overset{3}{=} (9,23,82,96) \overset{3}{=} (12,19,86,93).$$

8.5.14. *Niech* $a \leqslant b$ *oraz* $c \leqslant d$ *będą liczbami rzeczywistymi. Jeśli* $a^2+b^2=c^2+d^2$ *i* $a^3+b^3=c^3+d^3$, *to* $a=c$ *i* $b=d$. ([Mon] 83(8)(1976) E2615).

8.5.15 (A. Gérardin 1906). $1+12+15=2+10+16$, $\quad 1^3+12^3+15^3=2^3+10^3+16^3$. ([Dic2] 707, [S59] 73).

8.5.16. *Istnieje nieskończenie wiele piątek* (a,b,c,x,y) *liczb naturalnych takich, że*

$$a+b+c=x+y, \quad a^3+b^3+c^3=x^3+y^3,$$

$\mathrm{nwd}(a,b,c,x,y)=1$. *Przykłady:*

(1) $(2m^2+2n^2, 3mn-n^2, m^2-mn-2n^2, m^2+3mn, 2m^2-mn-n^2)$, *gdzie* $\mathrm{nwd}(m,n)=1$, (A. Gloden, [Mon] 76(1)(1969) 84-85 E2034);

(2) $(3pq, p^2+8pq+10q^2, 2p^2+13pq+20q^2, 2p^2+12pq+10q^2, p^2+12pq+20q^2)$, *w tym przykładzie liczby* a,b,c *tworzą ciąg arytmetyczny;* ([Mon] 76(1)(1969) 84-85 E2034, [MOc] 2004 z.342);

(3) $(2, n(n+3), (n+1)(n+4), (n+2)^2-2, (n+2)^2)$. ([MOc] 2004 z.342).

8.5.17. *Jeśli* $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + b + c = 3$, $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ *oraz* $a \leqslant b \leqslant c$, *to* $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ *lub* $(a, b, c) = (-5, 4, 4)$. ([MaS] 4/1993 z.3703).

★ [Crux] 2000 s.180 z.2426.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.6 PTE-pary stopnia 4

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.6.1. $(0, 4, 8, 16, 17) \stackrel{4}{=} (1, 2, 10, 14, 18)$*; idealna PTE-para stopnia* 4. ([DoB], [HW5] s.331).

8.6.2 (Maple)**.** *Przykłady pierwotnych idealnych PTE-par stopnia* 4.

$$
\begin{array}{ll}
(0,4,8,16,17) \stackrel{4}{=} (1,2,10,14,18); & (0,6,8,17,19) \stackrel{4}{=} (1,3,12,14,20); \\
(0,8,10,23,27) \stackrel{4}{=} (2,3,15,20,28); & (0,8,13,25,26) \stackrel{4}{=} (1,5,18,20,28); \\
(0,9,10,26,29) \stackrel{4}{=} (1,5,14,24,30); & (0,6,16,25,29) \stackrel{4}{=} (1,4,20,21,30); \\
(0,9,13,26,32) \stackrel{4}{=} (2,4,20,21,33); & (0,12,13,29,31) \stackrel{4}{=} (1,7,20,24,33); \\
(0,12,13,31,39) \stackrel{4}{=} (3,4,21,27,40); & (0,6,19,37,38) \stackrel{4}{=} (2,3,21,34,40); \\
(0,12,16,32,41) \stackrel{4}{=} (2,6,25,26,42). &
\end{array}
$$

8.6.3 (A. Gérardin 1910)**.** $(a-2b)^i + (4a-b)^i + (2a-5b)^i = (4a-3b)^i + (2a-5b)^i + (a+b)^i$ *dla* $i = 1, 2, 4$. ([Dic2] s.709).

8.6.4. *Jeśli* $x + y + z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, *to*

$$x^4 + y^4 + z^4 = \frac{25}{6}.$$

([Crux] 1997 s.33).

8.6.5. *Układ równań*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2, \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = y_1^4 + y_2^4$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych takich, że $\mathrm{nwd}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 1$. ([Zw] 2004).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.7 PTE-pary stopnia 5

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przykłady idealnych PTE-par stopnia 5:

8.7.1 (A. Gérardin 1907). $(0,10,13,33,36,46) \stackrel{5}{=} (1,6,18,28,40,45)$. ([Dic2] s.707).

8.7.2 (E. Miot 1913). $(0,5,6,16,17,22) \stackrel{5}{=} (1,2,10,12,20,21)$. ([Dic2] s.710, [S59] 73).

8.7.3 (A. Aubry 1914). $(0,11,20,42,51,62) \stackrel{5}{=} (2,6,27,35,56,60)$. ([Dic2] s.712).

8.7.4. $(0,4,9,17,22,26) \stackrel{5}{=} (1,2,12,14,24,25)$. ([DoB], [S59] 73).

8.7.5 (Maple). *Przykłady pierwotnych idealnych PTE-par stopnia* 5.

$(0,3,5,11,13,16) \stackrel{5}{=} (1,1,8,8,15,15)$; $(0,5,6,16,17,22) \stackrel{5}{=} (1,2,10,12,20,21)$;
$(0,4,9,17,22,26) \stackrel{5}{=} (1,2,12,14,24,25)$; $(0,7,7,21,21,28) \stackrel{5}{=} (1,3,12,16,25,27)$;
$(0,7,8,22,23,30) \stackrel{5}{=} (2,2,15,15,28,28)$.

8.7.6 (G. Tarry 1912). $(c, a+3b, 2a-b-c, 4a+5b-3c, 5a+b-4c, 6a+4b-5c) \stackrel{5}{=} (b+c, a-b, 2a+4b-c, 4a-3c, 5a+5b-4c, 6a+3b-5c)$. ([Dic2] s.708).

8.7.7 (G. Tarry 1912). $(6a-3b-8c, 5a-9c, 4a-4b-3c, 2a+2b-5c, a-2b+c, b) \stackrel{5}{=} (6a-2b-9c, 5a-4b-5c, 4a+b-8c, 2a-3b, a+2b-3c, c)$. ([Dic2] s.710).

8.7.8 (J.W. Nicholson 1894). $(\pm32, \pm24, \pm18, \pm10, \pm4) \stackrel{5}{=} (\pm30, \pm28, \pm16, \pm8, \pm6)$. ([Dic2] 707).

8.7.9 (J.W. Nicholson 1894). $(5a+10b, 4a+11b, 3a+5b, 2a+8b, 3a+3b, 2a+6b, a, b) \stackrel{5}{=} (5a+11b, 4a+6b, 3a+10b, 3a+8b, a+5b, 2a+3b, 2a+b)$. ([Dic2] 707).

8.7.10 (L. J. Lander). $24+28+67 = 3+54+62$, $24^5+28^5+67^5 = 3^5+54^5+62^5$ ([Mon] 75(10)(1968) 1061).

8.7.11. *Niech* $a \leqslant b$ *oraz* $c \leqslant d$ *będą liczbami rzeczywistymi. Jeśli* $a^2+b^2 = c^2+d^2$ *i* $a^5+b^5 = c^5+d^5$, *to* $a = c$ *i* $b = d$. ([Mon] 83(8)(1976) E2615).

8.7.12. *Liczba naturalna* n *jest sumą sześcianów dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych i jednocześnie jest sumą piątych potęg dwóch względnie pierwszych liczb całkowitych. Wykazać, że jeśli* $n > 2^{15}$, *to* n *ma dzielnik pierwszy postaci* $30k+1$. ([Zw] 2003).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.8 PTE-pary stopni większych od 5

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.8.1 (Tarry 1913). $(0, 18, 27, 58, 64, 89, 101) \stackrel{6}{=} (1, 13, 38, 44, 75, 84, 102)$*; idealna PTE-para stopnia* 6. ([DoB]).

8.8.2 (Crussol 1913). $2^i + 16^i + 21^i + 25^i = 5^i + 14^i + 23^i + 24^i$ *dla* $i = 2, 4, 6$. *Stąd przez dołączenie liczb przeciwnych otrzymuje się idealną PTE-parę stopnia* 7. ([DoB]).

8.8.3. *Niech* $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z}$. *Jeśli* $a^6+b^6+c^6 = x^6+y^6+z^6$, *to liczba* $a^2+b^2+c^2-x^2-y^2-z^2$ *jest podzielna przez* 180. ([Zw] 2002).

Idealne PTE-pary stopnia 7:

8.8.4. $(2, -2, 16, -16, 21, -21, 25, -25) \stackrel{7}{=} (5, -5, 14, -14, 23, -23, 24, -24)$. ([Cher], [BoI]).

8.8.5. $(1, 5, 10, 24, 28, 42, 47, 51) \stackrel{7}{=} (2, 3, 12, 21, 31, 40, 49, 50)$. ([S59] 73).

8.8.6. *Istnieją idealne PTE-pary stopnia* 7. ([Zw] 2000).

8.8.7. *Niech* $[p, q, r]$ *oznacza liczbę* $pm^2 + qmn + rn^2$. *Niech*

$$\begin{array}{lcllcl} a_1 & = & [-7, 62, -30] & b_1 & = & [-9, 66, -42] \\ a_2 & = & [7, 38, -50] & b_2 & = & [5, 42, -62] \\ a_3 & = & [5, -8, -22] & b_3 & = & [-21, 38, -22] \\ a_4 & = & [19, -32, -42] & b_4 & = & [9, -14, -50] \\ a_5 & = & [-19, 36, -62] & b_5 & = & [21, -36, -30]. \end{array}$$

Wtedy $a_1^i + a_2^i + a_3^i + a_4^i + a_5^i = b_1^i + b_2^i + b_3^i + b_4^i + b_5^i$ *dla* $i = 1, 3, 5, 7$, *gdzie* n, m *są dowolnymi liczbami. Stąd otrzymać można parametryczne PTE-pary stopnia* 8 *długości* 10. ([Sinha]).

8.8.8 (Letac, Gloden 1944, [BoI]). *Idealne PTE-pary stopnia* 8 :

$$\begin{array}{rcl} (-98, -82, -58, -34, 13, 16, 69, 75, 99) & \stackrel{8}{=} & (98, 82, 58, 34, -13, -16, -69, -75, -99); \\ (-169, -161, -119, -63, 8, 50, 132, 148, 174) & \stackrel{8}{=} & (169, 161, 119, 63, -8, -50, -132, -148, -174). \end{array}$$

8.8.9 (C.J. Smyth 1991, [BoI]). *Idealna PTE-para stopnia* 9 :

$$\pm 436, \pm 11\,857, \pm 20\,449, \pm 20\,667, \pm 23\,750) \stackrel{9}{=} (\pm 12, \pm 11\,881, \pm 20\,231, \pm 20\,885, \pm 23\,738).$$

Do dzisiaj (2006 rok) nie jest znany żaden przykład idealnej PTE-pary stopnia 10.

8.8.10 (Chen Shuwen, Nuuti Kuosa, Jean-Charles Meyrignac 1999).
Idealna PTE-para stopnia 11 :

$$(0, 11, 24, 65, 90, 129, 173, 212, 237, 278, 291, 302) \stackrel{11}{=} (3, 5, 30, 57, 104, 116, 186, 198, 245, 272, 297, 299).$$

(`http://member.netease.com/$\sim$chin/eslp/TarryPrb.htm`).

8.8.11 (L.J. Lander 1973). *Niech* $a = (a_1, a_2, \dots, a_{26})$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_{26})$, *gdzie liczby* $a_1, \dots, a_{26}$ *są odpowiednio równe* $1, 8, 9, 22, 23, 34, 36, 48, 50, 62, 75, 83, 87, 89, 95, 97, 109, 130, 132, 1x34, 136, 156, 157, 158, 171, 173$ *oraz* $b_i = 175 - a_i$ *dla* $i = 1, \dots, 26$. *Wtedy* $a \stackrel{14}{=} b$.
([MatC] 27(122)(1973) s.397).

★ C. J. Smyth, *Ideal* 9*th-order multigrades and Leatac's ecliptic curve*, [MatC] 10(1991).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.9 PTE-pary i rozbicia zbiorów

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.9.1 (E. Prouhet 1851). *Zbiór* $\{1, 2, 3 \dots, 27\}$ *można rozbić na trzy równoliczne parami rozłączne zbiory, z których dwa tworzą PTE-parę stopnia* 2 :

$$(1, 6, 8, 12, 14, 16, 20, 22, 27) \stackrel{2}{=} (2, 4, 9, 10, 15, 17, 21, 23, 25).$$

([Dic2] s.705).

8.9.2. *Dla każdej liczby naturalnej* k *liczby* $1, 2, 3, \dots, 2^{k+1}$ *można podzielić na dwie grupy* $x_1, \dots, x_{2^k}$ *oraz* $y_1, \dots, y_{2^k}$ *takie, że*

$$x_1^n + x_2^n + \cdots + x_{2^k}^n = y_1^n + y_2^n + \cdots + y_{2^k}^n$$

dla $n = 1, 2, \dots, k$. ([Dic6] 50, [S59] 74, [Mon] 102(9)(1995) z.10284, [OM] Szwecja 1996,[Crux] 2002 s.365).

D. Niech A będzie zbiorem liczb z pierwszej grupy i B zbiorem liczb z drugiej grupy. Dla $k = 1$ przyjmujemy $A = \{1, 4\}$ i $B = \{2, 3\}$. Niech $k \geqslant 1$ i załóżmy, że zbiory A i B są już skonstruowane. Wówczas zbiory

$$A' = A \cup \Big\{b + 2^{k+1};\ b \in B\Big\}, \quad B' = B \cup \Big\{a + 2^{k+1};\ a \in A\Big\}$$

spełniają żądane warunki dla $k + 1$. ⊠

8.9.3 (G. Tarry 1912). *Zbiór* $\Big\{1, 2, 3, \dots, 2^n(2a + 1)\Big\}$ *można rozbić na dwa rozłączne podzbiory tej samej mocy* $2^{n-1}(2a + 1)$ *tworzące PTE-parę stopnia* n. ([Dic2] s.709).

8.9.4 (Lehmer 1947). *Niech* $m, k \in \mathbb{N}$. *Zbiór* $\{0, 1, 2, 3, \dots, m^{k+1} - 1\}$ *można rozbić na* m *parami rozłącznych podzbiorów tej samej mocy* m^k *w ten sposób, że ciągi* $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(m)}$, *utworzone z tych podzbiorów, spełniają warunek:*

$$a^{(1)} \stackrel{k}{=} a^{(2)} \stackrel{k}{=} \dots \stackrel{k}{=} a^{(m)}.$$

([Le47], [Prou], [Robe]).

8.9.5. *Wszystkie naturalne liczby mające nie więcej niż* n *cyfr rozbito na dwie grupy. W pierwszej grupie są wszystkie liczby mające parzystą sumę cyfr. W drugiej grupie są wszystkie liczby o nieparzystej sumie cyfr. Wykazać, że jeśli* $1 \leqslant k < n$, *to suma* k*-tych potęg wszystkich liczb grupy pierwszej jest równa sumie* k*-tych potęg wszystkich liczb grupy drugiej.*
([Kw] 8/1971 40, [WaJ] 142(70)).

U. Fakt opisany w tym zadaniu zachodzi w dowolnym systemie pozycyjnym o parzystej podstawie. Jeśli podstawa jest dwójką, otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{array}{rcl} 1+2 &=& 3 \\ 1^1+2^1+4^1+7^1 &=& 3^1+5^1+6^1 \\ 1^2+2^2+4^2+7^2 &=& 3^2+5^2+6^2 \\ 1^1+2^1+4^1+7^1+8^1+11^1+13^1+14^1 &=& 3^1+5^1+6^1+9^1+10^1+12^1+15^1 \\ 1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2 &=& 3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2 \\ 1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3 &=& 3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3. \boxtimes \end{array}$$

★ A. Adler, S-Y. R. Li, *Magic cubes and Prouhet sequences*, [Mon] 84(8)(1977) 618-627.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.10 Różne zadania stowarzyszone z PTE problemami

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

8.10.1. *Znaleźć wszystkie rozwiązania całkowite następujących równań.*

(1) $x^2 + y^2 = x + y$. ([S59] 165).

(2) $x^3 + y^3 = x + y$. ([S59] 167).

(3) $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$. ([S59] 166).

(4) $x^m + y^m = x^n + y^n$, *gdzie* $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. ([S59] 168).

8.10.2. *Niech* $n \geqslant 3$. *Układ równań*

$$x + y + z = 3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad x^n + y^n + z^n = 3$$

ma w zbiorze liczb zespolonych dokładnie jedno rozwiązanie $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $n = 3, 4$ *lub* 5. ([Crux] 2004 s.436 z.2873).

★ H. L. Dorwart, *Can this polynomial be factored?*, [TcM] 8(2)(1977) 67-72.

H. L. Dorwart, *Old-fashioned algebra can be useful*, [MM] 54(1)(1981) 11-13.

A. Gloden, *Two theorems on multi-degree equalities*, [Mon] 53(4)(1946) 205-206.

H. D. Grossman, *Applications of an operator to algebra and to number theory, with comments on the Tarry-Escott problem*, National Mathem. Magazine 19(8)(1945) 385-390.

R. C. Lyness, M. Goldberg, *Special normal trigrade*, [Mon] 69(9)(1962) 924 (rozw. zad. E1504).

J. Pla, *On a simple set of integers*, [MG] 527(2009) 200-212.

J. B. Roberts, *A curious sequence of signs*, [Mon] 64(5)(1957) 317-322.

E. M. Wright, *Prouhet's 1851 solution of the Tarry-Escott problem 1910*, [Mon] 66(3)(1959) 199-201.

Literatura

[Bast] L. Bastein, *Impossibilité de* $u + v \stackrel{3}{=} x + y + x$, Sphinx-Oedipe 8(1913), 171-172.

[BoI] P. Borwein, C. Ingalls, *The Prouhet-Tarry-Escot problem revisited*, Enseign. Math., 40(2)(1994), 3-27.

[Cher] J. Chernick, *Ideal solutions of the Tarry-Escott problem*, The American Mathematical Monthly, 44(10)(1937), 626-633.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dic2] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, Vol. II. *Diophantine analysis*, Carnegie Institute of Washington, 1919. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, New York, 1992.

[Dic6] L. E. Dickson, *Introduction to the Theory of Numbers*, 1936.

[DoB] H. L. Dorwart, O. E. Brown, *The Tarry-Escott problem*, The American Mathematical Monthly, 44(10)(1937), 613-626.

[Esco] E. B. Escott, Quarterly Journal of Mathematics, 1910, 141-147.

[Frol] M. Frolov, Bulletin de la Société Mathématique de France, 17(1888-9) 69-83; 20(1892) 69-84.

[Gl47] A. Gloden, Scripta Mathematica 13(1947), 227.

[Glod] A. Gloden, Scripta Mathematica, 12(1946), 226.

[HW5] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fifth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1979.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Le47] D. H. Lehmer, *The Tarry-Escott problem*, Scripta Math., 13(1947), 37-41.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MatC] Mathematics of Computations, American Mathematical Society, czasopismo matematyczne.

[Me61] Z. A. Melzak, *A note on the Tarry-Escott problem*, Canadian Mathematical Bulletin, 4(3)(1961), 233-237.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2010.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Prou] M. E. Prouhet, *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris, 33(1851), 255.

[Robe] J. B. Roberts, *Splitting consecutive integers into classes with equal power sums*, The American Mathematical Monthly, 71(1)(1964), 25-37.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[Sinha] T. N. Sinha, *On the Tarry-Escott problem*, The American Mathematical Monthly, 73(3)(1966), 280-285.

[Tar] G. Tarry, L'Intermédiare des Mathématiciens, 19(1912), 219-221.

[TcM] The Two Year College Mathematics Journal, 1970-1983.

[WaJ] N. B. Wasilev, A. A. Jegorow, *Zadania Olimpiad Matematycznych Związku Radzieckiego* (po rosyjsku), 1961-1987, Moskwa, Nauka, 1988.

[Wr35] E. M. Wright, *On Tarry's problem (I)*, Quart. J. Math., Oxford Ser. 6(1935), 261-267.

[Zw] Zwardoń, Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej.