

---

Olsztyn, Toruń, 2011

---

## Podróże po Imperium Liczb

# 12. Wielomiany

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Ostatnia aktualizacja: 31 maja 2013

Wstęp	1
<b>1 Trójmiany kwadratowe</b>	<b>5</b>
1.1 Trójmiany kwadratowe i pierwiastki . . . . .	5
1.2 Złożenia i iteracje trójmianów kwadratowych . . . . .	9
1.3 Równania typu $f(x) = g(x)$ dla trójmianów . . . . .	10
1.4 Trójmiany o współczynnikach całkowitych i zbiór wartości . . . . .	11
1.5 Dodatkowe fakty i zadania o trójmianach kwadratowych . . . . .	12
<b>2 Pierwiastki wielomianów</b>	<b>13</b>
2.1 Pierwiastki wielomianów trzeciego stopnia . . . . .	13
2.2 Pierwiastki wielomianów czwartego stopnia . . . . .	18
2.3 Pierwiastki wielomianów piątego stopnia . . . . .	20
2.4 Pierwiastki wielomianów szóstego stopnia . . . . .	21
2.5 Współczynniki całkowite i pierwiastki całkowite . . . . .	22
2.6 Współczynniki całkowite i pierwiastki wymierne . . . . .	24
2.7 Wielomiany z wszystkimi pierwiastkami rzeczywistymi . . . . .	24
2.8 Wielomiany bez pierwiastków rzeczywistych. . . . .	27
2.9 Wielomiany z $Z[x]$ mające pierwiastki w każdym $Z_m$ . . . . .	28
2.10 Pierwiastki rzeczywiste i przedziały . . . . .	29
2.11 Dodatnie pierwiastki rzeczywiste . . . . .	29
2.12 Pierwiastki i pochodna . . . . .	30
2.13 Pierwiastki zespolone . . . . .	30
2.14 Różne fakty i zadania o pierwiastkach wielomianów . . . . .	31
<b>3 Relacja podzielności dla wielomianów jednej zmiennej</b>	<b>33</b>
3.1 Reszta z dzielenia wielomianów . . . . .	33
3.2 Rozkładalność nad $Z$ i nad $Q$ . . . . .	34
3.3 Kryterium Eisensteina . . . . .	39
3.4 Wielomiany Eisensteina . . . . .	40
3.5 Inne kryteria nierozkładalności . . . . .	42
3.6 Wielomiany $a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \pm 1$ . . . . .	42
3.7 Wielomiany $a(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) + k$ . . . . .	44
3.8 Wielomiany $(x - a_1)^2(x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1$ . . . . .	45
3.9 Wielomiany $1 + \frac{a_1}{1!}x^1 + \frac{a_2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}x^n$ . . . . .	46
3.10 Przykłady pewnych wielomianów . . . . .	46
3.11 Podzielność i rozkład na czynniki w $R[x]$ . . . . .	49
3.12 Podzielność i wielomiany nierozkładalne nad $Z_m$ . . . . .	50
3.13 Dodatkowe fakty i zadania . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Wielomiany jednej zmiennej z małymi współczynnikami</b>	<b>53</b>
4.1	Rozkłady wielomianów zero-jedynkowych . . . . .	53
4.2	Nierozkładalne wielomiany zero-jedynkowe . . . . .	55
4.3	Rozkłady wielomianów o współczynnikach -1, 0, 1 . . . . .	56
4.4	Nierozkładalne wielomiany o współczynnikach -1, 0 i 1 . . . . .	58
4.5	Rozkłady wielomianów o współczynnikach 0, 1, 2 . . . . .	59
4.6	Nierozkładalne wielomiany o współczynnikach 0, 1 i 2 . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Rozkładalność i co najmniej dwie zmienne</b>	<b>63</b>
5.1	Wielomiany nierozkładalne dwóch zmiennych . . . . .	63
5.2	Jednorodne wielomiany zero-jedynkowe w $Z[x,y]$ . . . . .	65
5.3	Wielomiany postaci $(x + y)^n \pm x^n \pm y^n$ . . . . .	66
5.4	Rozkłady dla trzech zmiennych . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Wartości, obrazy i przeciwobrazy funkcji wielomianowych</b>	<b>69</b>
6.1	Przeciwobrazy względem wielomianów . . . . .	69
6.2	Przeciwobrazy zbioru $\{\pm 1\}$ . . . . .	70
6.3	Obrazy względem wielomianów . . . . .	71
6.4	Równości typu $f(a) = b$ . . . . .	72
6.5	Wartości wielomianów i cyfry . . . . .	77
6.6	Suma kwadratów współczynników wielomianu . . . . .	77
6.7	Wielomiany o współczynnikach zespolonych . . . . .	78
6.8	Różne fakty i zadania z wielomianami . . . . .	80
<b>7</b>	<b>Funkcje wymierne</b>	<b>83</b>
7.1	Ułamki właściwe . . . . .	83
7.2	Ułamki proste . . . . .	87
7.3	Twierdzenie Abela . . . . .	89
7.4	Funkcje wymierne i jedna zmienna . . . . .	91
7.5	Funkcje wymierne i co najmniej dwie zmienne . . . . .	93
7.6	Wielkie twierdzenie Fermata dla wielomianów . . . . .	93
<b>8</b>	<b>Wielomiany specjalnego typu</b>	<b>97</b>
8.1	Wielomiany binomialne . . . . .	97
8.2	Wielomiany nieujemne jednej zmiennej . . . . .	98
8.3	Wielomiany jednej zmiennej o nieujemnych współczynnikach . . . . .	101
8.4	Wielomiany nieujemne dwóch zmiennych . . . . .	102
8.5	Wielomiany nieujemne wielu zmiennych . . . . .	104
8.6	Wielomiany przemienne . . . . .	105
8.7	Wielomiany symetryczne i antysymetryczne . . . . .	110
8.8	Liczby z zerową sumą . . . . .	112
8.9	Wielomiany $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ . . . . .	114
<b>9</b>	<b>Wielomiany Czebyszewa</b>	<b>117</b>
9.1	Przykłady . . . . .	117
9.2	Własności wielomianów $T_n$ . . . . .	118
9.3	Własności wielomianów $C_n$ . . . . .	120
9.4	Własności wielomianów $U_n$ . . . . .	121
9.5	Wielomiany Czebyszewa i pochodna . . . . .	122
9.6	Różne fakty o wielomianach Czebyszewa . . . . .	123
9.7	Rekurencja $f_{n+2} = xf_{n+1} - f_n$ . . . . .	124

<b>10 Wielomianowe ciągi rekurencyjne</b>	<b>125</b>
10.1 Wielomiany Fibonacciego . . . . .	125
10.2 Wielomiany Lucasa . . . . .	128
10.3 Uogólnione wielomiany Fibonacciego i Lucasa . . . . .	129
10.4 Wielomiany Hermite'a . . . . .	129
10.5 Inne wielomianowe ciągi rekurencyjne . . . . .	130
<b>11 Pierwiastki z jedynki i macierze cykliczne</b>	<b>133</b>
11.1 Zespólone pierwiastki z jedynki . . . . .	133
11.2 Pierwotne pierwiastki z jedynki . . . . .	133
11.3 Macierze cykliczne . . . . .	137
11.4 Własności macierzy cyklicznych . . . . .	138
11.5 Wyznacznik macierzy cyklicznej . . . . .	140
<b>12 Wielomiany cyklotomiczne</b>	<b>143</b>
12.1 Definicja i przykłady . . . . .	143
12.2 Początkowe własności wielomianów cyklotomicznych . . . . .	144
12.3 Nierozkładalność wielomianów cyklotomicznych . . . . .	146
12.4 Następne własności wielomianów cyklotomicznych . . . . .	147
12.5 Wielomiany cyklotomiczne i nierówności . . . . .	151
12.6 Wielomiany cyklotomiczne nad ciałami . . . . .	152
12.7 Wielomiany $\Psi_n(x, y)$ . . . . .	153
12.8 Wielomiany cyklotomiczne i ich numery . . . . .	154
12.9 Współczynniki wielomianów cyklotomicznych . . . . .	158
12.10 Współczynniki wielomianu $\Phi_{pq}(x)$ . . . . .	159
12.11 Współczynniki wielomianów $\Phi_{pqr}(x)$ i $\Phi_{pqrs}(x)$ . . . . .	162
12.12 Liczby naturalne postaci $\Phi_n(a)$ . . . . .	164
12.13 Podzielność liczb $\Phi_n(a)$ przez liczby pierwsze . . . . .	166
12.14 Twierdzenie Hurwitza . . . . .	169
12.15 Twierdzenie Banga o rzędach . . . . .	169
12.16 Liczby pierwsze w postępach arytmetycznych . . . . .	172
12.17 Wielomiany podzielne przez $x^2 + x + 1$ . . . . .	172
12.18 Inne zastosowania wielomianów cyklotomicznych . . . . .	176
<b>Spis cytowanej literatury</b>	<b>177</b>
<b>Skorowidz nazwisk</b>	<b>184</b>
<b>Skorowidz</b>	<b>187</b>

---

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń  
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

---

## Skorowidz

- Abel N.H., 89  
Abhyankar S.S., 100  
Aharonov D., 123, 127  
Aitken W., 82  
Alexanderson G.L., 100  
Amir-Moez A.R., 18  
Andrescu T., 177, 182  
Apostol T.M., 148, 177  
Arnaudès J.M., 177  
Artin E., 105  
Aurifeuille, 149  
Avital S., 110
- Bang A.S., 159, 170, 171, 177  
Barbeau E.J., 110, 177  
Beardon A., 127  
Beardon A.F., 123  
Beiter M., 160, 162, 163  
Belov A., 178  
Berg C., 104  
Bergum G.E., 127–129  
Berlow S.L., 177  
Bernik V.I., 177  
Bertin J., 177  
Bertram E.A., 123  
Bicknell-Johnson M., 122, 127, 128, 131  
Birkhoff G., 177  
Block, 120  
Bloom D.M., 163, 177  
Bobiński Z., 8, 27, 49, 180  
Boltianski W.G., 177  
Borwein P., 177  
Brandt K.A., 18  
Brent R.P., 149–151  
Brickman L., 100  
Browkin J., 177  
Bruggeman T., 23  
Bryński M., 178  
Brzeziński B., 178
- Carlitz L., 151, 161, 162  
Carroll P.W., 82  
Cassels, 105  
Chądzyński J., 178  
Chalkley R., 20  
Chao H., 40  
Chau L.H., 178  
Chentzov N.N., 182  
Chihara T.S., 123  
Choi K-K.S., 177  
Choi M.D., 104  
Christensen J., 104
- Ciesielski K., 178  
Cohn A., 42  
Cox D.A., 40
- Deloup F., 38  
Dence J.B., 176  
Djukić D., 178  
Dorwart H.L., 178  
Doward H.L., 71  
Dresden G., 148, 178  
Dresden G.P., 159  
Driver E., 28, 51  
Driver K., 123, 127
- Efthimiou C., 178  
Ehrenfeucht A., 178  
Eisenstein F.G.M., 39  
Ellison W.J., 105  
Erdelyi T., 177
- Faddejev D.K., 178  
Fedorov R., 178  
Feng Z., 177  
Filaseta M., 148, 178  
Fletcher C.R., 40  
Fomin D.V., 178
- Gallot Y., 168  
Galpieri G.A., 179  
Garver R., 18  
Gaszkow S., 123  
Gauss, 35, 67, 149  
Gawrych E., 51  
Gelca R., 177  
Glaister P., 127  
Gleason A.M., 179  
Golomb S.W., 179  
Greenwood R.E., 179  
Griffiths P.A., 91  
Grigorjan A.A., 182  
Groves J., 23  
Guerrier W.J., 153  
Guersenzvaig N.H., 48  
Gush T., 23  
Gutenmacher W.L., 182
- Haruki S., 12  
Hayes D.R., 38  
He M.X., 127, 132  
Henderson A., 20  
Hermite Ch., 129  
Hilbert D., 102, 105

- Hobbs A.W., 20  
Hoggatt V.E., 122, 127–129, 131  
Hou Sh-H., 89, 91  
Hurwitz A., 169
- Isaacs I.M., 151, 179  
Iwanow S.W., 177
- Jadrenko M.I., 183  
Janković V., 178  
Jantarov I., 110  
Jarek P., 180  
Jarski A.S., 92  
Jeśmanowicz L., 179  
Jegorow A.A., 182  
Jensen C., 104  
Johnson J.M., 82
- Kanel-Belov A.J., 178  
Kaniel-Bielow A.J., 179  
Kartaszow I.W., 183  
Kedlaya K.S., 179  
Kelly L.M., 179  
Khoi L.H., 178  
Khrabrov A.I., 123  
Klamkin M., 52  
Klosinski L.F., 100  
Kołakowska J., 44  
Kochas K.P., 177  
Kohel D.R., 151  
Kollar J., 82  
Konjagin S.W., 182  
Koshy T., 129  
Kostyrykin A.I., 179  
Kovaldzhii A., 178  
Kowaldźy A.K., 179  
Kramkowska A., 112  
Krishnaswami A., 129  
Kronecker, 146, 147  
Kumor P., 101, 104  
Kurlandczyk L., 179  
Kurschak J., 179  
Kurtz D.C., 26  
Kwong C.H.H., 26
- Laeng E., 179  
Laird P.G., 82  
Lam T.Y., 104, 160–162  
Lang S., 179  
Larson L.C., 100  
Lasseur L., 149  
Lee M.A., 51  
Lehmer E., 159  
Leijenhorst van D.C., 176  
Leja F., 179
- Leman W.G., 177  
Lemmermeyer F., 82  
Lenstra H., 161, 162  
Leonard P.A., 28, 51  
Leung K.H., 160–162  
Lewin M., 124  
Li X., 92  
Lind, 127  
Lloyd D.B., 48  
Liu A., 92  
Łoś J., 179  
Long C.T., 129  
Lucas E., 149
- MacDougall J., 151, 168  
Magidin A., 38  
Marshall M., 105, 179  
Martynowa B., 179  
Mason R.C., 93, 179  
Matić I., 178  
Matus F., 100, 112  
McCann R., 82  
McKeon D.G.C., 151  
McKinnon D., 38  
McLean K.F., 151  
McLean K.R., 71  
Mead D.G., 112  
Melnikow O.W., 177  
Michaiłowski W.I., 183  
Migotti A., 159, 162  
Mirsky L., 151  
Miszyńska A.P., 180  
Mnich W., 26  
Mościcki A., 82  
Mohammad Q.G., 32  
Mordkowicz A.G., 18  
Mostowski A., 180  
Motose K., 151, 158, 168, 176, 180  
Motzkin T., 102
- Nagell T., 145, 147, 181  
Nagle T.D., 18  
Narkiewicz W., 151, 181  
Nathanson M.B., 130, 181  
Newton, 25  
Nodzyński P., 8, 180  
Nogradi H.A., 18  
Nonin J.N., 82  
Nowicki A., 180, 181
- Oleinikov V.A., 38, 40, 102  
Ordowski T., 150, 165  
Ore O., 71
- Parberry E.A., 127

- Paszkowski S., 82  
 Pawłowski H., 181  
 Perron J., 42  
 Petrović N., 178  
 Pfister A., 105  
 Pisarevsky B., 12  
 Płoski A., 90, 181  
 Podkolzin A.S., 182  
 Polya G., 42, 181  
 Poonen B., 179  
 Prasolov V.V., 98, 105, 123, 181  
 Proskuriakow I.W., 180, 181  
 Pursell L.E., 82  
  
 Rabbot Z.M., 182  
 Rabinowitz S., 48  
 Rempała J., 177  
 Ribenboim P., 66, 151, 181  
 Ricci P.E., 127, 132  
 Rice R.E., 12  
 Robinson R.M., 104, 181  
 Roma J.C., 18  
 Rotkiewicz A., 181  
 Rudin W., 79  
 Ryżkow L.W., 82  
  
 Sabia J., 172  
 Sadowniczj W.A., 182  
 Salmassi M., 129  
 Sankiewicz J., 120, 124  
 Santos D.A., 182  
 Sato N., 18  
 Savchev S., 182  
 Savio D.Y., 124  
 Sawczuk M., 151  
 Schönemann T., 40  
 Schinzel A., 28, 148, 178  
 Schmüdgen K., 104  
 Schur B.S., 42, 43, 45, 46  
 Schur I., 159  
 Schweitzer, 72  
 Schweizer B., 12  
 Sengerov W., 151  
 Seres, 45  
 Shannon A.G., 129  
 Sherry T.N., 151  
 Shklarsky D.O., 182  
 Sierpiński W., 182  
 Simon D., 127, 132  
 Singer R., 35, 39  
 Sklar A., 12  
 Small Ch., 72  
 Sominskij I.S., 178  
 Spira R., 79  
 Spivak A., 151  
  
 Spodzieja S., 78, 132, 181  
 Stark M., 180  
 Staszyński S., 82  
 Straszewicz S., 177, 182  
 Suryanarayan E.R., 124  
 Suzuki J., 159  
 Świątek A., 180  
 Szabunin M.I., 82  
 Szapiro G.M., 182  
 Szczepański J., 178  
 Szego G., 181  
 Szneperman L.B., 182  
 Szoka M., 71  
 Szymiczek K., 182  
  
 Tesauri S., 172  
 Thangadurai R., 152, 172  
 Thielman, 120  
 Tołpygo A.K., 179  
 Tomalczyk W., 181  
 Toom A.L., 182  
 Trigg Ch., 182  
 Tripathi A., 26  
 Tuckerman B., 176  
 Tverberg H., 182  
  
 Udrea G., 124  
 Uscki M., 8, 180  
  
 Vakil R., 179  
 Vandiver H.S., 177  
 Vasiliev N., 124  
 Vatwani A., 152, 172  
  
 Wahab J.H., 38  
 Wang X., 29  
 Ward M., 169  
 Wasilev J.B., 179  
 Wasilev N.B., 182  
 Webb W.A., 127  
 Wedderburn, 176  
 Weisner L., 44  
 Westlund J., 43  
 Wieczyńska J., 38  
 Wilenkij I.J., 177  
 Williams K.S., 28, 51  
 Wyszenskij W.A., 183  
  
 Yaglom I.M., 182  
 Yashchenko I., 178  
  
 Zeitlin D., 161, 163, 183  
 Zelevinski A., 124  
 Żuk I.K., 177

## Skorowidz

- algebraiczne domknięcie ciała, 93, 94
- algorytm, 41
  - Euklidesa, 114, 151
- automorfizm, 45
- bezwzględna wartość, 6, 8, 19, 20, 22, 32, 42, 71, 73, 77, 102, 119, 136, 151, 159, 162, 163
- całka, 127, 130
- charakterystyka ciała, 80, 89, 93, 95, 96
- ciąg, 26, 73, 77, 132
  - arytmetyczny, 4, 17, 32, 48, 69, 70, 76, 91, 172
  - Fibonacciego, 125
  - geometryczny, 11, 76
  - Lucasa, 125
  - okresowy, 77
  - rekurencyjny, 109, 111, 124, 125, 130, 150, 165
  - wielomianów, 109, 111, 117, 120, 125, 128–132
- ciało, 35, 63, 64, 74, 79, 80, 83, 87, 89, 112, 152, 176
  - $\mathbb{Z}_p$ , 28, 35, 39, 50, 51, 146, 152
  - charakterystyki zero, 80, 93, 95, 96
  - funkcji wymiernych, 83, 91–93, 100, 105
  - skończone, 152, 153, 176
  - ułamków, 40, 83
- cosinus, 81, 119–121, 127, 128, 133, 144, 151
- cyfry, 22, 77
- część całkowita, 102, 130
- część rzeczywista, 133
- deg, 3
- element pierwszy, 40
- formuła Jacobiego, 90
- funkcja, 80, 82, 91, 97, 150
  - $\varphi$ , 2, 4, 143, 147, 149, 152, 153, 158–160, 162, 163, 172
  - bijekcja, 80, 97
  - ciągła, 27
  - Möbiusa, 137, 149
  - nieparzysta, 118, 120, 121
  - parzysta, 118, 120, 121
  - rosnąca, 151
  - wielomianowa, 69, 82, 97
  - wymierna, 83, 87, 91, 92, 94, 100, 102, 105
- granica ciągu, 29, 89
- grupa, 133
  - cykliczna, 176
  - Galois, 176
- homomorfizm pierścieni, 35, 39, 50, 146
- iloczyn, 20, 76, 87, 89, 137, 144, 147, 152, 155, 158, 166, 167
  - macierzy, 138, 139, 141
  - pierwiastków wielomianu, 38, 46
  - skalarny, 139
  - ułamków, 83, 90
  - wielomianów, 35, 45, 47, 48, 51, 64, 72, 98, 101, 102, 143, 144, 147, 149, 150, 152, 153, 155
- iloraz, 92, 130
  - pierwiastków wielomianu, 37, 46
- IMO, 1, 47, 71
  - Longlist, 11, 23, 44, 75, 98, 107
  - Shortlist, 101, 111, 132
- indukcja matematyczna, 24, 33, 85, 87, 92, 98, 110, 112, 116, 123, 124, 126, 145, 150, 154, 155, 165
- izomorfizm pierścieni, 39
- koło, 7, 30, 120, 147
- krotność pierwiastka, 29, 31, 98, 99, 146
- kryterium Eisensteina, 39, 40, 44, 46, 68
- lemat Gaussa, 35
- liczba
  - $\pi$ , 119, 121, 127, 128, 133, 141, 144
  - bezkwadratowa, 51, 80, 149
  - Fibonacciego, 125, 126
  - kwadratowa, 11, 72, 75
  - Lucasa, 125, 126, 128
  - Mersenne’a, 169, 170
  - nieparzysta, 6, 11, 22, 27, 29, 43, 46, 47, 72, 76, 80, 91, 98, 102, 120, 123, 128, 131, 149, 152, 155, 158, 159, 170
  - parzysta, 11, 27, 29, 41, 50, 72, 76, 80, 91, 98, 102, 120, 129, 131, 149, 152, 155, 158, 176
  - pierwsza, 7, 12, 26, 28, 35, 39–41, 44, 46–48, 50, 51, 66, 71, 123, 127–129, 144, 146, 152–157, 159–163, 166–172, 176
  - różnych pierwiastków wielomianu, 93, 94, 96
  - wymierna, 15, 16, 20, 36–38
  - złożona, 50
  - zespolona, 5, 13, 15, 16, 36–38, 46, 99, 100, 120
- liczby względnie pierwsze, 7, 28, 39, 54, 63, 115, 116, 134–136, 144, 146, 151, 155, 160, 166, 169
- macierz, 121, 126, 139–142

- cykliczna, 137  
 Maple, 1, 11, 54, 62, 65, 66, 68, 164, 171  
 max, 33, 69, 83, 93, 94, 96  
 moduł liczby zespolonej, 31, 79  
  
 nice polynomial, 23  
 nierówność, 8, 12, 14, 17, 18, 24–26, 29, 42, 44,  
 70, 71, 73, 79, 93, 98, 100, 104, 118, 119,  
 151, 152, 163, 170  
 nietrywialne rozwiązanie, 95  
 nwd, 1, 28, 35, 63, 80, 84–86, 114, 122, 127, 131,  
 135, 148  
 nww, 1, 80, 144, 150, 165  
  
 obraz, 50, 69, 71, 104  
 odcinek, 7, 8, 71  
 okrąg, 18, 120, 151  
 Olimpiada Matematyczna  
   Australia, 17, 76  
   Białoruś, 32  
   Bułgaria, 47  
   Chiny, 10, 30, 46, 79, 132  
   Czechy-Słowacja, 9, 22, 93  
   Grecja, 18  
   Indie, 7, 12, 21, 23, 31  
   Iran, 46, 52, 70, 92  
   Irlandia, 76  
   Japonia, 47  
   Kanada, 27, 75  
   Leningrad, 7, 8, 17, 52  
   Łotwa, 104  
   Mołdawia, 10, 23, 74, 81, 132  
   Moskwa, 5, 6, 8, 11, 73, 101  
   Polska, 7, 17, 20, 23, 27, 48, 49, 72, 73, 76,  
   80, 81, 100,  
   Rosja, 8, 9, 12, 19, 20, 22, 32, 81, 92  
   Rumunia, 30, 47, 79  
   Słowenia, 11, 17, 70  
   Singapur, 32  
   St Petersburg, 7, 8, 11, 12, 16, 27, 30, 71, 76  
   Szwecja, 12, 21, 92, 100, 124  
   Ukraina, 7, 32, 49  
   Unesco Cont. Iasi, 102  
   USA, 19, 49, 73, 74, 102  
   W. Brytania, 73, 75  
   Węgry, 19, 93  
   Wietnam, 18, 19, 21, 27, 29, 74  
   ZSRR, 64  
 otoczka wypukła, 31  
  
 parabola, 8, 12  
 permutacja, 110  
 pierścień, 69, 80, 145  
    $\mathbb{C}[x, y]$ , 31, 78, 79  
    $\mathbb{C}[x]$ , 14, 31, 70, 79, 97, 132  
    $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , 79  
    $\mathbb{Q}[x]$ , 30, 32, 35, 36, 39, 42, 46, 48, 72, 76, 115,  
   153  
    $\mathbb{R}[t]$ , 111  
    $\mathbb{R}[x, y, z]$ , 104, 111  
    $\mathbb{R}[x, y]$ , 78, 79, 81, 102–104, 111, 132  
    $\mathbb{R}[x]$ , 7, 9, 12, 14, 16–18, 20, 21, 25–27, 29–  
   32, 49, 50, 69–72, 77, 80, 91, 92, 97, 98,  
   100–102, 111, 119, 132  
    $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , 79, 97, 104, 105  
    $\mathbb{Z}[x, y, z]$ , 76  
    $\mathbb{Z}[x, y]$ , 65, 66, 129, 153  
    $\mathbb{Z}[x]$ , 3, 7, 11, 22–24, 26, 28, 31, 34–36, 40–48,  
   50–52, 54, 71, 74–77, 109, 115–117, 124,  
   125, 128, 130, 147, 149, 152, 166, 174  
    $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ , 81  
    $\mathbb{Z}_m$ , 28, 51, 138  
    $\mathbb{Z}_p[x]$ , 28, 35, 39, 50, 51, 146, 152  
    $k[t]$ , 33, 34, 64  
    $k[x, y, z]$ , 68  
    $k[x, y]$ , 63, 64  
    $k[x]$ , 35, 40, 63, 64, 74, 80, 153, 176  
    $k[x_1, \dots, x_n]$ , 3, 64, 83, 111  
   bez jedynek, 80, 84  
   skończony, 51  
   z jednoznacznością rozkładu, 35, 39, 40  
 pierwiastek  
   podwójny, 13, 14  
 pierwiastek wielomianu, 111, 112, 115, 176  
   całkowity, 7, 9, 10, 17, 18, 20, 22, 23, 28, 32,  
   41, 50  
   dodatni, 17, 19, 21, 29  
   konstruowalny, 18  
   podwójny, 15, 16  
   potrójny, 20  
   rzeczywisty, 5–10, 12–14, 16–21, 25–27, 29–  
   32, 45, 48, 50, 57, 91, 98, 119, 121, 124,  
   130–132  
   wymierny, 18, 24  
   zespolony, 7, 8, 17, 20, 30, 31, 36, 51, 99, 124,  
   127, 128, 143, 147  
 pierwiastek z jedynek, 30, 133–137, 143, 144, 146,  
 147, 152, 158  
   pierwotny, 133–136, 140, 142–144, 146, 147,  
   158, 173, 174  
 pochodna, 15, 16, 23, 25–27, 30, 31, 41, 81, 89, 90,  
 92, 100, 122, 126, 173–175  
 podzbiór, 80, 92  
 podzielność, 126, 173, 174  
   liczb, 22, 24, 28, 63, 122, 134, 136, 147, 149,  
   155, 169  
   przez 3, 22, 115, 157, 174  
   przez 4, 48  
   przez 5, 23, 47, 115



- przez 7, 50  
przez  $p$ , 35, 39–41, 50, 51, 146, 150, 152, 155, 158, 166–171  
przez potęgę liczby pierwszej, 11, 39, 41, 168, 170, 171  
wielomianów, 48–50, 66, 68, 110, 116, 123, 128, 144, 147, 153, 157, 166, 175
- potęga  
dwójki, 9–11, 28, 41, 45, 47, 73–75, 91, 105, 116, 118–121, 123, 128–130, 154, 156, 159, 167, 169–172  
liczby pierwszej, 39–41, 51, 153, 154, 158, 159, 164, 166–168, 170, 171  
piątki, 23  
siódemki, 23  
trójki, 16, 25, 75, 172
- przeciwobraz, 69  
przedziały, 6, 29, 119, 120, 132, 151  
pytanie, 9, 10, 19, 31, 37, 43, 48, 71–73, 92, 176
- reszta z dzielenia wielomianów, 7, 33, 50, 115  
równanie, 8–10, 17, 18, 20, 28–30, 32, 91, 129  
rozkład kanoniczny, 87, 88  
różnica, 69, 70, 80  
  pierwiastków wielomianu, 36, 46  
  symetryczna, 80  
rozszerzenie ciał, 79, 146  
  Galois, 176  
rugownik, 41
- siedemnasty problem Hilberta, 105  
silnia, 23, 41, 46, 73, 92, 97  
sinus, 81, 120, 121, 133, 141, 144  
składowa jednorodna, 63, 79  
splot funkcji, 149  
średnia  
  arytmetyczna, 103  
  geometryczna, 103  
stopień wielomianu, 3, 33, 34  
suma  
  cyfr, 77  
  kwadratów, 77, 79, 98–100, 102–105  
  pierwiastków wielomianu, 37, 46, 137  
  ułamków, 83, 85, 87, 88, 90  
  wielomianów, 8, 12, 63, 80, 111  
  współczynników, 20, 102, 158  
  zerowa, 112  
symbol Legendre’a, 51  
symbol Newtona, 41, 75, 97, 100, 101, 115, 120, 121, 124, 127, 130  
system numeracji, 33  
szereg, 97, 127, 128
- tożsamość Eulera, 103  
trójkąt, 7
- trójmian kwadratowy, 3, 5–12, 25, 27, 35, 41, 42, 47, 50, 57, 61, 77, 92, 98, 101, 174
- twierdzenie  
  Abela, 89, 90  
  Banga, 169, 171, 172  
  chińskie o resztach, 28, 136  
  Dirichleta, 4, 172  
  Eulera, 90  
  Hilberta, 102  
  Hurwitza, 169  
  małe Fermata, 167, 169, 172  
  Masona, 93, 96  
  o średnich, 103  
  Wedderburna, 152  
  wielkie Fermata, 93
- układ równań, 7, 23, 45, 82, 93  
ułamek,  
  prosty, 87, 88  
  właściwy, 83–86, 88, 89
- wartość własna macierzy, 142  
wartość wielomianu, 69  
warunki równoważne, 7, 8, 14, 28, 30, 41, 42, 48, 50, 63, 64, 66, 72, 80, 91, 92, 98, 115, 123, 127–129, 134, 153, 159, 160, 168, 169, 171, 174–176
- wielokąt wypukły, 31  
wielomian  
  alternujący, 110  
  antysymetryczny, 110, 111  
  binomialny, 97, 98  
  Cauchy’ego, 66  
  cyklotomiczny, 4, 34, 133, 143–147, 149–163, 166–172, 176  
  Czebyszewa, 3, 110, 117, 123–125  
  drugiego rodzaju, 117, 118, 120–122  
  pierwszego rodzaju, 117–124  
  dobry, 102  
  datni, 101  
  dopuszczalny, 102  
  Eisensteina, 40, 41  
  kanoniczny, 40, 41  
  Fibonacciego, 123, 125–129, 132  
  Hermite’a, 129, 130  
  Jacobsthala, 130  
  jednorodny, 31, 63, 65, 76, 78, 82  
  Laurenta, 77  
  Lucasa, 127, 128  
  minimalny, 21, 36–38  
  moniczny, 3, 8, 10, 23, 25, 30, 31, 35, 51, 52, 61, 71, 73, 79, 99, 106–109, 119, 124, 130, 144–147, 173, 174  
  Motzkina, 102–105

- nierozkładalny, 26, 31, 35, 36, 39–48, 51, 61, 63–65, 68, 80, 87, 115, 123, 127–130, 146, 147, 152, 153
- pierwotny, 35
- podziału koła, 143
- subtelny, 23
- symetryczny, 110–112
- zredukowany, 107
- wielomiany
  - przemienne, 27, 105–110, 120
  - równoważne, 71
  - względnie pierwsze, 78–80, 92, 132, 147, 152, 157
- współczynnik wiodący, 3, 8, 10, 12, 27, 33, 35, 63, 69, 77, 99, 100, 118, 120, 121
- wyróżnik wielomianu, 5, 8, 12, 92, 98
- wyznacznik, 105, 121, 126, 137, 139–142
  - Vandermonde’a, 141
- wzór
  - Moivre’a, 120
  - Taylora, 33
- wzory Viete’a, 25
- zawartość wielomianu, 35
- zbiór, 69, 84, 133–135, 144, 158
  - liczb
    - $\mathbb{N}_0$ , 1, 48, 113, 127, 132
    - całkowitych, 1, 11, 32, 76
    - naturalnych, 1, 80, 97
    - pierwszych, 1, 39, 41, 47, 51, 150, 152, 155, 158, 166, 172
    - rzeczywistych, 1, 13, 69, 70, 82, 83, 87, 91, 104
    - wymiernych, 1, 70, 72, 80, 83, 92
    - zespolonych, 1, 13, 68, 78, 80, 83
  - nieskończony, 7, 20, 28, 32, 36, 70, 92, 172
  - skończony, 8, 102, 110, 144, 151, 166
  - wartości, 11
  - wypukły, 8, 31
- zbiory rozłączne, 11, 132, 136, 144