Podróże po Imperium Liczb

Część 12. Wielomiany

Rozdział 7

7. Funkcje wymierne

Andrzej Nowicki 31 maja 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

7 Funkcje wymierne

Jeśli k jest ciałem, to przez $k(x_1, \dots, x_n)$ oznaczamy ciało funkcji wymiernych zmiennych $x_1, \dots, x_n$ nad k, czyli ciało ułamków pierścienia wielomianów $k[x_1, \dots, x_n]$. Każdy element ciała $k(x_1, \dots, x_n)$ jest postaci $\frac{f}{g}$, gdzie $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$, przy czym $g \neq 0$.

Zajmować się będziemy głównie elementami ciała $k(x)$, czyli funkcjami wymiernymi jednej zmiennej x nad ustalonym ciałem k. Tym ustalonym ciałem k będzie zwykle jedno z ciał liczbowych: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Przykłady funkcji wymiernych nad $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{x-1}, \quad \frac{x+2}{3x+7}, \quad \frac{x^3+2x^2+x-1}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+1}{3x^3+2x^2-3x+12}.$$

Są to również funkcje wymierne nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$.

7.1 Ułamki właściwe

Niech $\varphi = \frac{f}{g}$ (gdzie $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$) będzie funcją wymierną jednej zmiennej x nad danym ciałem k. Mówić będziemy, że φ jest *ułamkiem właściwym*, jeśli stopień wielomianu f jest ostro mniejszy od stopnia wielomianu g. Przykłady ułamków właściwych:

$$\frac{1}{x-1}, \quad \frac{2x}{x^2+1}, \quad \frac{x+2}{x^3+x^2+2x+1}.$$

W szczególności $0 = \frac{0}{1}$ jest ułamkiem właściwym.

7.1.1. *Niech $\varphi \in k(x)$ będzie ułamkiem właściwym. Ułamek φ jest wielomianem należącym do $k[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi = 0$.*

D. Jeśli $\varphi = 0$, to oczywiście φ należy do $k[x]$. Niech $\varphi = \frac{f}{g}$, $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$, $\deg f < \deg g$. Załóżmy, że $\varphi = \frac{f}{g} = u \in k[x]$ i przypuśćmy, że $\varphi \neq 0$. Wtedy $f = ug$, $f \neq 0$, $u \neq 0$ i mamy sprzeczność: $\deg g > \deg f = \deg(ug) = \deg u + \deg g \geqslant \deg g$. ⊠

7.1.2. *Suma ułamków właściwych jest ułamkiem właściwym.*

D. Niech $\varphi, \psi \in k(x)$ będą ułamkami właściwymi. Niech $\varphi = \frac{a}{b}$, $\psi = \frac{c}{d}$, gdzie $a, b, c, d \in k[x]$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $\deg a < \deg b$, $\deg c < \deg d$. Wtedy $\varphi + \psi = \frac{u}{v}$, gdzie $u = ad + bc$, $v = bd \neq 0$ i mamy:

$$\begin{aligned} \deg(ad+bc) &\leqslant \max(\deg(ad), \deg(bc)) = \max(\deg(a)+\deg(d), \deg(b)+\deg(c)) \\ &< \max(\deg(b)+\deg(d), \deg(b)+\deg(d)) = \deg(b)+\deg(d) \\ &= \deg(bd). \end{aligned}$$

Zatem $\deg u < \deg v$, a zatem ułamek $\frac{u}{v}$ jest więc właściwy. ⊠

7.1.3. *Iloczyn ułamków właściwych jest ułamkiem właściwym.*

D. Niech $\varphi, \psi \in k(x)$ będą ułamkami właściwymi. Niech $\varphi = \frac{a}{b}$, $\psi = \frac{c}{d}$, gdzie $a, b, c, d \in k[x]$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $\deg a < \deg b$, $\deg c < \deg d$. Wtedy $\varphi \cdot \psi = \frac{ac}{bd}$ i

$$\deg(ac) = \deg(a) + \deg(c) < \deg(b) + \deg(d) = \deg(bd).$$

Ułamek $\varphi \cdot \psi$ jest więc właściwy. ⊠

Zanotujmy również oczywiste stwierdzenie,

7.1.4. *Jeśli $\varphi \in k(x)$ jest ułamkiem właściwym i $\lambda \in k$, to $\lambda\varphi$ jest ułamkiem właściwym.*

Ze powyższych stwierdzeń wynika następujący wniosek.

7.1.5. *Zbiór wszystkich ułamków właściwych (należących do ciała $k(x)$) jest pierścieniem przemiennym ze względu na dodawanie i mnożenie funkcji wymiernych. Jest to pieścień bez jedynki. Pierścień ten jest k-algebrą.*

7.1.6. *Każda funkcja wymierna $\varphi \in k(x)$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

gdzie φ_1 jest wielomianem należącym do $k[x]$ oraz $\varphi_2 \in k(x)$ jest ułamkiem właściwym.

D. Niech $\varphi = \frac{f}{g}$, $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$. Istnieją takie wielomiany $u, r \in k[x]$, że $f = ug + r$, $\deg r < \deg g$ (patrz 3.1.1). Mamy wtedy równość $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, gdzie $\varphi_1 = u \in k[x]$ oraz $\varphi_2 = \frac{r}{q}$ jest ułamkiem właściwym.

Jednoznaczność. Przypuśćmy, że $\varphi_1 + \varphi_2 = f = \varphi_1' + \varphi_2'$, gdzie $\varphi_1, \varphi_1' \in k[x]$ i $\varphi_2, \varphi_2' \in k(x)$ są ułamkami właściwymi. Mamy wtedy równość $\varphi_2 - \varphi_2' = \varphi_1' - \varphi_1$, z której wynika, że $\varphi_2 - \varphi_2'$ jest wielomianem należącym do $k[x]$. Ale $\varphi_2 - \varphi_2'$ jest ułamkiem właściwym (patrz 7.1.2). Z 7.1.1 wynika więc, że $\varphi_2 - \varphi_2' = 0$. Zatem $\varphi_2 = \varphi_2'$ i stąd $\varphi_1 = \varphi_1'$. ⊠

7.1.7. *Niech g, h będą niezerowymi, względnie pierwszymi, wielomianami należącymi do $k[x]$, stopni większych od 0. Niech $0 \neq f \in k[x]$, $\deg f < \deg(gh)$, $\operatorname{nwd}(f, gh) = 1$. Istnieją wtedy takie jednoznacznie wyznaczone wielomiany $u, v \in k[x]$, że*

$$\frac{f}{gh} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$$

oraz $u \neq 0$, $v \neq 0$, $\operatorname{nwd}(u, g) = 1$, $\operatorname{nwd}(v, h) = 1$, $\deg u < \deg g$, $\deg v < \deg h$.

D. Część I. Istnienie. Ponieważ wielomiany g i h są względnie pierwsze, więc istnieją takie wielomiany $\alpha, \beta \in k[x]$, że $1 = \alpha g + \beta h$. Istnieją również (patrz 3.1.1) takie wielomiany $\gamma, \delta, u, v \in k[x]$, że

$$f\beta = \gamma g + u, \quad \deg u < \deg g, \quad f\alpha = \delta h + v, \quad \deg v < \deg h.$$

Mamy zatem równości:

$$\frac{f}{gh} = \frac{f\alpha g + f\beta h}{gh} = \frac{(\delta h + v)g + (\gamma g + u)h}{gh} = \gamma + \delta + \frac{u}{g} + \frac{v}{h}.$$

Ułamki $\frac{f}{gh}$, $\frac{u}{g}$, $\frac{v}{h}$ są właściwe, więc (patrz 7.1.2) funkcja wymierna

$$\frac{f}{gh} - \frac{u}{g} - \frac{v}{h}$$

jest ułamkiem właściwym. Ale funkcja ta jest równa $\gamma + \delta$, jest więc wielomianem należącym do $k[x]$. Zatem (na mocy 7.1.1) $\gamma + \delta = 0$ i mamy równość

$$\frac{f}{gh} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$$

oraz nierówności $\deg u < \deg g$, $\deg v < \deg h$. Zauważmy, że $f = uh + vg$.

Przypuśćmy, ze $u = 0$. Wtedy $f = gv$. Ponieważ wielomiany f i g są niezerowe i względnie pierwsze (gdyż $\text{nwd}(f, gh) = 1$), więc stąd wynika, że $g \in k$. To jest jednak sprzeczne z tym, że $\deg g \geqslant 1$. Zatem $u \neq 0$ i w podobny sposób wykazujemy, że $v \neq 0$.

Należy jeszcze wykazać, że $\text{nwd}(u, g) = \text{nwd}(v, h) = 1$. Przypuśćmy, że istnieje wielomian $p \in k[x]$, stopnia większego od zera, dzielący wielomiany u i g. Wtedy p dzieli g oraz f (gdyż $f = uh+vg$), wbrew temu, że $\text{nwd}(f, g) = 1$. Zatem $\text{nwd}(u, g) = 1$ i w podobny sposób wykazujemy, że $\text{nwd}(v, h) = 1$.

Część II. Jednoznaczność. Przypuśćmy, że

$$\frac{u}{g} + \frac{v}{h} = \frac{u'}{g} + \frac{v'}{h},$$

gdzie u, u', v, v' są niezerowymi wielomianami należącymi do $k[x]$ i przy tym $\deg u < \deg g$, $\deg u' < \deg g$, $\deg v < \deg h$, $\deg v' < \deg h$. Wtedy

$$\frac{u - u'}{g} = \frac{v' - v}{h}$$

i stąd $(u - u')h = (v' - v)g$. Wielomian $(u - u')h$ jest więc podzielny przez g. Ale $\text{nwd}(g, h) = 1$, więc g dzieli $u - u'$ i przy tym $\deg(u - u') < \deg g$. Zatem $u - u' = 0$, a zatem $u = u'$. W podobny sposób wykazujemy, że $v = v'$. ⊠

Powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

7.1.8. *Niech $g_1, \dots, g_n$ będą niezerowymi, parami względnie pierwszymi, wielomianami należącymi do pierścienia $k[x]$, stopni większych od 0. Niech $0 \neq f \in k[x]$, $\deg f < \deg(g_1 \cdots g_n)$, $\text{nwd}(f, g_1 \cdots g_n) = 1$. Istnieją wtedy takie jednoznacznie wyznaczone wielomiany $u_1, \dots, u_n \in k[x]$, że*

$$\frac{f}{g_1 \cdots g_n} = \frac{u_1}{g_1} + \dots + \frac{u_n}{g_n}$$

oraz $u_i \neq 0$, $\text{nwd}(u_i, g_i) = 1$, $\deg u_i < \deg g_i$, dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

D. Część I. Istnienie. Dla $n = 1$ jest to oczywiste. Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że dla $n - 1$ to jest prawdą. Oznaczmy:

$$g = g_1 g_2 \cdots g_{n-1}.$$

Wielomiany g i g_n są niezerowe, względnie pierwsze i ich stopnie są większe od 0. Ponadto $\text{nwd}(f, g \cdot g_n) = 1$ i $\deg f < \deg(g \cdot g_n)$. Z twierdzenia 7.1.7 wynika, że

$$\frac{f}{g \cdot g_n} = \frac{u}{g} + \frac{u_n}{g_n},$$

gdzie u, u_n są niezerowymi wielomianami naleącymi do $k[x]$ takimi, że $\text{nwd}(u, g) = 1$, $\text{nwd}(u_n, g_n) = 1$, $\deg u < \deg g$, $\deg u_n < \deg g_n$. Z założenia indukcyjnego wynika natomiast, że ułamek $\frac{u}{g}$ jest sumą $(n - 1)$ ułamków $\frac{u_i}{g_i}$ (gdzie $i = 1, \dots, n - 1$), spełniających rozpatrywane warunki. Zatem

$$\frac{f}{g_1 \cdots g_n} = \frac{u_1}{g_1} + \dots + \frac{u_n}{g_n}$$

oraz $u_i \neq 0$, $\text{nwd}(u_i, g_i) = 1$, $\deg u_i < \deg g_i$, dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

Część II. Jednoznaczność. Przypuśćmy, że

$$\frac{u_1}{g_1} + \dots + \frac{u_n}{g_n} = \frac{u'_1}{g_1} + \dots + \frac{u'_n}{g_n},$$

gdzie u_i, u_i', dla wszystkich $i = 1, \dots, n$, są niezerowymi wielomianami należącymi do $k[x]$ takimi, że $\operatorname{nwd}(u_i, g_i) = 1$, $\operatorname{nwd}(u_i', g_i) = 1$, $\deg u_i < \deg g_i$, $\deg u_i' < \deg g_i$. Wtedy

$$\frac{v_1}{g_1} + \dots + \frac{v_n}{g_n} = 0,$$

gdzie $v_i = u_i - u_i'$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd otrzymujemy równość

$$v_1 g_2 \cdots g_n + v_2 g_1 g_3 \cdots g_n + \dots + v_n g_1 \cdots g_{n-1} = 0,$$

z której wynika, że wielomian $v_1 g_2 g_3 \cdots g_n$ jest podzielny przez g_1. Ale $\operatorname{nwd}(g_1, g_2 g_3 \cdots g_n) = 1$, więc g_1 dzieli v_1 i przy tym $\deg v_1 < \deg g_1$. Zatem $u_1 - u_1' = v_1 = 0$, a zatem $u_1 = u_1'$. W podobny sposób wykazujemy, że $u_2 = u_2', \dots, u_n = u_n'$. ⊠

Rozpatrzmy wielomiany $g_1 = x - a_1$, $g_2 = x - a_2$, $\dots, g_n - a_n$, gdzie $a_1, \dots, a_n$ są parami różnymi elementami ciała k. Są to niezerowe, parami względnie pierwsze, wielomiany należące do $k[x]$, stopni większych od zera. Z twierdzenia 7.1.9, zastosowanego dla tych wielomianów, otrzymujemy następujący wniosek.

7.1.9. *Niech $a_1, \dots, a_n$ są parami różnymi elementami ciała k. Niech $f \in k[x]$ będzie niezerowym wielomianem stopnia mniejszego niż n takim, ze $f(a_i) \neq 0$ dla $i = 1, \dots, n$. Istnieją wtedy takie jednoznacznie wyznaczone niezerowe elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$, że*

$$\frac{f}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \frac{\lambda_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x-a_n}.$$

Założyliśmy tu, że $f(a_i) \neq 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$. Dzięki temu założeniu, istniejące elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są niezerowe. Bez tego założenia powyższy wniosek ma następującą postać.

7.1.10. *Niech $a_1, \dots, a_n$ są parami różnymi elementami ciała k. Niech $f \in k[x]$ będzie niezerowym wielomianem stopnia mniejszego niż n, Istnieją wtedy jednoznacznie wyznaczone elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ takie, że*

$$\frac{f}{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} = \frac{\lambda_1}{x-a_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{x-a_n}.$$

Zanotujmy kilka przykładów ilustrujących przedstawione powyżej fakty.

7.1.11.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{(x-1)(x-2)} &= -\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{1}{x-2}, \\
\tfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \tfrac{1}{x-1} - \tfrac{2}{x-2} + \tfrac{1}{x-3}, \\
\tfrac{6}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} &= -\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{3}{x-2} - \tfrac{3}{x-3} + \tfrac{1}{x-4}, \\
\tfrac{24}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} &= \tfrac{1}{x-1} - \tfrac{4}{x-2} + \tfrac{6}{x-3} - \tfrac{4}{x-4} + \tfrac{1}{x-5}.
\end{aligned}$$

7.1.12.

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{(x-1)(x-2)} &= -\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{2}{x-2}, \\
\tfrac{2x}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \tfrac{1}{x-1} - \tfrac{4}{x-2} + \tfrac{3}{x-3}, \\
\tfrac{6x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} &= -\tfrac{1}{x-1} + \tfrac{6}{x-2} - \tfrac{9}{x-3} + \tfrac{4}{x-4}, \\
\tfrac{24x}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} &= \tfrac{1}{x-1} - \tfrac{8}{x-2} + \tfrac{18}{x-3} - \tfrac{16}{x-4} + \tfrac{5}{x-5}.
\end{aligned}$$

7.1.13.

$$\frac{2x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{8}{x-2} + \frac{9}{x-3},$$

$$\frac{6x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{12}{x-2} - \frac{27}{x-3} + \frac{16}{x-4},$$

$$\frac{24x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{1}{x-1} - \frac{16}{x-2} + \frac{54}{x-3} - \frac{64}{x-4} + \frac{25}{x-5}.$$

7.1.14.

$$\frac{2}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{24}{(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-1} + \frac{6}{x} - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{x+2},$$

$$\frac{6!}{(x-3)(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x-2} + \frac{15}{x-1} - \frac{20}{x} + \frac{15}{x+1} - \frac{5}{x+2} + \frac{1}{x+3}.$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.2 Ułamki proste

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech k będzie ustalonym ciałem. *Ułamkiem prostym* nad k nazywamy każdą funkcję wymierną postaci $\frac{f}{g^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq f \in k[x]$ i $g \in k[x] \smallsetminus k$ jest wielomianem nierozkładalnym w $k[x]$ oraz $\deg f < \deg g$. Poniższe funkcje wymierne są ułamkami prostymi nad ciałem $\mathbb{R}$, liczb rzeczywistych.

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{3}{(x-2)^5}, \quad \frac{2x+1}{x^2+1}, \quad \frac{x+5}{(x^2+x+1)^7}, \quad \frac{1}{(x^2+5)^3}.$$

7.2.1. *Każda funkcja wymierna należąca do ciała $k(x)$ jest sumą wielomianu należącego do $k[x]$ i ułamków prostych nad k.*

D. ([MoS]). Niech $\varphi = \frac{f}{g} \in k(x)$, $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$. Jeśli $\varphi = 0$ lub $g \in k$, to φ jest wielomianem i nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $f \neq 0$ i $\deg g \geqslant 1$. Niech

$$g = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$$

będzie rozkładem wielomianu g na czynniki nierozkładalne; $p_1, \dots, p_n$ są parami niestowarzyszonymi wielomianami nierozkładalnymi w $k[x]$ oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ są liczbami naturalnymi. Zastosujemy indukcję matematyczną względem n.

Niech $n = 1$. Wtedy

$$\varphi = \frac{f}{p^\alpha},$$

$p = p_1$, $\alpha = \alpha_1$. Wielomian f (patrz twierdzenie 3.1.4) ma jednoznaczne przedstawienie postaci

$$f = r_s p^s + r_{s-1} p^{s-1} + \cdots + r_1 p + r_0,$$

gdzie s jest nieujemną liczbą całkowitą oraz $r_0, r_1, \dots, r_s$ są wielomianami należącymi do $k[x]$, stopni mniejszych niż $\deg p$. Dzieląc f przez p^α, otrzymujemy sumę wielomianu i ułamków prostych.

Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n-1$. Oznaczmy:

$$h = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}.$$

Ponieważ wielomiany h i $p_n^{\alpha_n}$ są względnie pierwsze, istnieją takie wielomiany $u, v \in k[x]$, że $1 = uh + vp_n^{\alpha_n}$. Stąd

$$\varphi = \frac{f}{g} = \frac{uf}{p_n^{\alpha_n}} + \frac{vf}{p_1^{\alpha_1} \cdots p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}.$$

Pierwszy składnik jest sumą wielomianu i ułamków prostych. Drugi składnik jest również, na mocy założenia indukcyjnego, sumą wielomianu i ułamków prostych. Twierdzenie zostało zatem wykazane w całej ogólności. ⊠

Ułamek prosty jest oczywiście niezerowym ułamkiem właściwym. Wiemy (patrz 7.1.6), że każda funkcja wymierna $\varphi \in k(x)$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci sumy wielomianu i ułamka właściwego. Twierdzenie 7.2.1 można zatem udowodnić inaczej. Wystarczy to udowodnić tylko dla ułamków właściwych. W takim przypadku twierdzenie to wynika natychmiast z twierdzeń 7.1.8 i 3.1.4. Otrzymujemy nawet dodatkową informację o jednoznaczności rozkładu. Zanotujmy:

7.2.2. *Każdy niezerowy ułamek właściwy ma jednoznaczne przedstawienie w postaci skończonej sumy ułamków prostych.*

Z twierdzenia 7.1.8 wynika również następna informacja o rozkładach na ułamki proste.

7.2.3. *Niech* $0 \neq \varphi = \frac{f}{g} \in k(x)$, $f, g \in k[x]$, $g \neq 0$, $\deg g \geqslant 1$, $\deg f < \deg g$, $\operatorname{nwd}(f, g) = 1$. *Niech* $g = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ *będzie rozkładem wielomianu* g *na czynniki nierozkładalne;* $p_1, \dots, p_n$ *są parami niestowarzyszonymi wielomianami nierozkładalnymi w* $k[x]$ *oraz* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *są liczbami naturalnymi.*

Wtedy w rozkładzie funkcji wymiernej φ *na ułamki proste występują wszystkie ułamki proste z mianownikami* $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_n^{\alpha_n}$.

Pewne przykłady rozkładów funkcji wymiernych na ułamki proste podaliśmy w poprzednim podrozdziale. Zanotujmy inne przykłady.

7.2.4.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2} &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2}, \\
\frac{4}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2} &= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} - \frac{3}{x-3}, \\
\frac{2}{(x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)} &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+3},
\end{aligned}$$

7.2.5.
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1+x}{x^2+x+1}, \\
\frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+x+1)} &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1+x}{x^2+x+1}, \\
\frac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)^2} &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1+x}{(x^2+x+1)^2}, \\
\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)} &= -\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+x+1}, \\
\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)^2} &= -\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x+3}{x^2+x+1} + \frac{x}{(x^2+x+1)^2}.
\end{aligned}$$

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3 Twierdzenie Abela

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.3.1 (Twierdzenie Abela)**.** *Niech $f(x)$ i $g(x)$ będą niezerowymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Załóżmy, że $\deg g(x) = n \geqslant 2$, $\deg f(x) \leqslant n-2$ oraz, że wielomian $g(x)$ ma n parami różnych pierwiastków rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$. Wtedy*

$$\frac{f(a_1)}{g'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{g'(a_2)} + \cdots + \frac{f(a_n)}{g'(a_n)} = 0,$$

gdzie $g'(x)$ jest pochodną wielomianu $g(x)$. ([InvM] 35(1976) 321-390, [Mon] 116(2009) 629-630).

D. (Shui-Hung Hou, [Mon] 116(2009) 629-630). Rozpatrzmy ułamek właściwy $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i zastosujmy do niego 7.1.10. Istnieją takie liczby rzeczywiste $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, że

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x-a_n}.$$

Mamy wtedy równość $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \dfrac{g(x)}{x-a_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x-a_1)\cdots\widehat{(x-a_i)}\cdots(x-a_n)$. Porównując współczynniki przy x^{n-1} otrzymujemy, że $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$. Mamy ponadto:

$$f(a_i) = \lambda_i \prod_{j\neq i}(a_i - a_j) = \lambda_i \lim_{x\to a_i} \frac{g(x)}{x-a_i} = \lambda_i \lim_{x\to a_i} \frac{g(x)-g(a_i)}{x-a_i} = \lambda_i g'(a_i).$$

Zatem $f(a_i) = \lambda_i g'(a_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f(a_i)}{g'(a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. ⊠

W powyższym twierdzeniu zakładaliśmy, że wielomiany mają współczynniki rzeczywiste. To założenie nie jest tu istotne. Ciało liczb rzeczywistych można zastąpić dowolnym ciałem (nawet ciałem dodatniej charakterystyki).

7.3.2 (Twierdzenie Abela)**.** *Niech k będzie dowolnym ciałem , $n \geqslant 2$ liczbą naturalną oraz $a_1, \dots, a_n$ parami różnymi elementami ciała k. Niech $g(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_n)$ i niech $f(x) \in k[x]$ będzie wielomianem stopnia mniejszego niż $n-1$. Wtedy*

$$\frac{f(a_1)}{g'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{g'(a_2)} + \cdots + \frac{f(a_n)}{g'(a_n)} = 0,$$

gdzie $g'(x)$ jest pochodną wielomianu $g(x)$.

D. Dla każdego $i = 1, \dots, n$, oznaczmy przez $g_i(x)$ wielomian $g(x)/(x-a_i)$.

Rozpatrzmy ułamek właściwy $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ i zastosujmy do niego 7.1.10. Istnieją takie elementy $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, należące do ciała k, że

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x-a_n}.$$

Mamy wtedy równość $f = \lambda_1 g_i(x) + \cdots + \lambda_n g_n(x)$, z której wynika, że $f(a_i) = \lambda_i g_i(a_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Porównując współczynniki przy x^{n-1}, otrzymujemy równość $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$. Ponadto

$g'(x) = g_1(x) + \dots g_n(x)$, więc $g'(a_i) = g_i(a_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Zatem $f(a_i) = \lambda_i g'(a_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd $\sum_{i=1}^{n} \frac{f(a_i)}{g'(a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. ⊠

W twierdzeniu Abela występują wielomiany jednej zmiennej. Istnieje podobnego typu twierdzenie, zwane formułą Jacobiego, dla pewnych wielomianów dowolnej (skończonej) liczby zmiennych. Sformułowanie, dowód i wnioski wynikające z tej formuły znajdziemy na przykład w artykule Arkadiusza Płoskiego [Plo]. Twierdzenie Abela, nazywane również twierdzeniem Eulera, jest szczególnym przypadkiem formuły Jacobiego.

Podamy teraz kilka zastosowań twierdzenia Abela.

7.3.3. *Jeśli a, b, c są parami różnymi elementami ciała k, to:*

(1) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0,$$

(2) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

7.3.4. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi elementami ciała k, to:*

(1) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

(2) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

(3) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

7.3.5. $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i \prod_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} \right) = 0$, *dla $n \geqslant 3$ i parami różnych liczb $a_1, \dots, a_n$.* ([Crux] 2000 s.486).

Wszystkie powyższe równości są szczególnymi przypadkami twierdzenia Abela 7.3.2. Drobne modyfikacje dowodu tego twierdzenia pozwalają udowodnić następujące, podobnego typu, twierdzenie.

7.3.6. *Niech k będzie dowolnym ciałem , $n \geqslant 2$ liczbą naturalną oraz $a_1, \dots, a_n$ parami różnymi elementami ciała k i niech $g(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Wtedy*

$$\frac{a_1^{n-1}}{g'(a_1)} + \frac{a_2^{n-1}}{g'(a_2)} + \dots + \frac{a_n^{n-1}}{g'(a_n)} = 1, \quad \frac{a_1^{n}}{g'(a_1)} + \frac{a_2^{n}}{g'(a_2)} + \dots + \frac{a_n^{n}}{g'(a_n)} = a_1 + \dots + a_n,$$

gdzie $g'(x)$ jest pochodną wielomianu $g(x)$.

Zanotujmy szczególne przypadki tego twierdzenia.

7.3.7. *Jeśli a, b, c są parami różnymi elementami ciała k, to:*

(1) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

(2) $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

7.3.8. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi elementami ciała k, to:*

(1) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1,$

(2) $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d.$

7.3.9. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\frac{a^4+1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4+1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4+1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4+1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d.$$

([Crux] 2000 s.511 z.2487, wynika to z poprzednich równości).

★ P. A. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, [InvM] 35(1976) 321-390.
Shui-Hung Hou, *On a theorem of Abel*, [Mon] 116(2009) 629-630.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4 Funkcje wymierne i jedna zmienna

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.4.1. *Jeśli ciąg (a, b, c, d) jest arytmetyczny, to pierwiastki równania*

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} = 0$$

tworzą również ciąg arytmetyczny. ([MaJ] 138).

7.4.2. *Niech $f \in \mathbb{R}(x)$. Jeśli $f(x) = f(\frac{1}{x})$, to istnieje taka funkcja wymierna $g \in \mathbb{R}(x)$, że*

$$f(x) = g\left(x + \frac{1}{x}\right).$$ ([Mat] 1/60 57).

7.4.3. *Nie ma takich wielomianów $f, g, h \in \mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$, że*

$$\frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} = h\left(\frac{1}{x}\right).$$

([MM] 990).

7.4.4. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Istnieje taki wielomian $f(t) \in \mathbb{R}[t]$, że*

$$x^n - \frac{1}{x^n} = f\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy n jest nieparzyste. ([Putn] 1958).

U. ([G-gk]). Jeśli n jest parzyste, to nie ma nawet żadnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że

$$x^n - \frac{1}{x^n} = f\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

Gdyby taka funkcja f istniała, to dla $x = \frac{1}{2}$ i $x = -2$ mielibyśmy

$$\frac{1}{2^n} - 2^n = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1/2}\right) = f\left(\frac{1}{2} - 2\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-2 - \frac{1}{-2}\right) = (-2)^n - \frac{1}{(-2)^n} = 2^n - \frac{1}{2^n},$$

skąd wynikałaby sprzeczność: $2\left(2^n - \frac{1}{2^n}\right) = 0$. ⊠

7.4.5. *Dany trójmian kwadratowy $f(x)$ zamieniamy na jeden z trójmianów*

$$x^2 f\Big(1+\frac{1}{x}\Big) \quad lub \quad (x-1)^2 f\Big(\frac{1}{x-1}\Big).$$

Czy można otrzymać w ten sposób z trójmianu x^2+4x+3 trójmian $x^2+10x+9$?
Odp. *Nie można. Przy takiej zamianie nie zmieniają się wyróżniki.* ([OM] Rosja 1992, [Pa97]).

7.4.6. *Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$ i niech $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Istnieją takie trzy różne liczby rzeczywiste p, q, r, że $f(p) = q$, $f(q) = r$ i $f(r) = p$.*

(2) $a = -b^2$. ([OM] Szwecja 1993, [Crux] 1998 s.328).

7.4.7. *Rozważmy n-tą pochodną funkcji wymiernej $\frac{1}{x^k-1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Jest ona postaci*

$$\frac{P_n(x)}{(x^k-1)^{n+1}},$$

gdzie $P_n(x)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{R}[x]$. Znaleźć $P_n(1)$. Odp. $P_n(1) = (-k)^n n!$. ([Putn] 2002).

7.4.8. *Niech $\varphi = \varphi(x) \in \mathbb{R}(x)$. Załóżmy, że istnieje taki nieskończony podzbiór $A \subseteq \mathbb{Q}$, że $\varphi(A) \subseteq \mathbb{Q}$. Wtedy $\varphi \in \mathbb{Q}(x)$.* ([PoS] 130, 321 z.92, [Crux] 1999 s.143).

D. ([Crux] 1999 s.143). Niech $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, gdzie $f(x), g(x) \neq 0$ są względnie pierwszymi wielomianami należącymi do $\mathbb{R}[x]$. Niech $r = \deg f(x) + \deg g(x)$. Możemy założyć, że $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$ (w przeciwnym wypadku zamieniamy $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ na $\dfrac{g(x)}{f(x)}$).

Dla $r = 0$ dowód jest oczywisty. Niech a będzie jedną z liczb wymiernych taką, że $g(a) \neq 0$ oraz $\dfrac{f(a)}{g(a)} \in \mathbb{Q}$. Oznaczmy:

$$h(x) = f(x) - g(x)\frac{f(a)}{g(a)}.$$

Wtedy $h(x)$ jest wielomianem należącym do $\mathbb{R}[x]$ i takim, że $h(a) = 0$. Zatem $h(x) = (x-a)f_1(x)$, gdzie $f_1(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f_a < \deg f$. Wtedy

$$\frac{f_1(b)}{g(b)} \in \mathbb{Q}$$

dla wszystkich $b \in A \smallsetminus \{a\}$ oraz $\deg f_1 + \deg g < r$. Zatem, na mocy indukcji, $\dfrac{f_1}{g} \in \mathbb{Q}(x)$ i stąd $\varphi = \dfrac{f}{g} \in \mathbb{Q}(x)$. ⊠

7.4.9. *Niech $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Wiadomo, że dla nieskończenie wielu liczb wymiernych a liczba $f(a)/g(a)$ jest wymierna. Wykazać, że ułamek $\frac{f(x)}{g(x)}$ można zapisać jako iloraz dwóch wielomianów o współczynnikach wymiernych.* ([S-kg] 67, [OM] Iran 1994).

★ A. S. Jarski, *Liczby i funkcje*, [Kw] 6/88 13-18.
X. Li, A. Liu, *Some properties of functions of the form* $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$, [MC] 14(2)(2001) 35-41.

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5 Funkcje wymierne i co najmniej dwie zmienne

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.5.1. *Jeśli* $xyz = 1$, *to*

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

Jeśli $xyzt = 1$, *to*

$$\frac{1}{1+x+xy+xyz} + \frac{1}{1+y+yz+yzt} + \frac{1}{1+z+zt+ztx} + \frac{1}{1+t+tx+txy} = 1.$$

([MaS] 4/1993).

7.5.2. *Niech* $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$. *Jeśli*

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z},$$

to $x = y = z = 1$. ([OM] Węgry 1999).

7.5.3. *Znaleźć wszystkie takie pary* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *że układ równań*

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} = a, \quad \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = b,$$

ma rozwiązanie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ([OM] Czechy-Słowacja 1999).

O. Układ ten ma rozwiązanie $\iff$ $0 < ab \leqslant \frac{9}{8}$ lub $(a, b) = (0, 0)$. ⊠

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

7.6 Wielkie twierdzenie Fermata dla wielomianów

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zakładać będziemy, że k jest ciałem charakterystyki zero. Jeśli f jest wielomianem należącym do $k[t] \smallsetminus k$, to przez $\eta(f)$ oznaczamy liczbę wszystkich różnych pierwiastków wielomianu f należących do $\overline{k}$ (algebraicznego domknięcia ciała k). Dla przykładu, jeśli $f = t^3 - t^2 = t^2(t-1)$, to $\eta(f) = 2$. Zanotujmy oczywiste własności liczb postaci $\eta(f)$.

7.6.1.

(1) $\eta(f) \leqslant \deg(f)$.

(2) $\eta(f^n) = \eta(f)$.

(3) $\eta(fg) \leqslant \eta(f) + \eta(g)$.

(4) $\eta(fg) = \eta(f) + \eta(g)$, *gdy Jeśli* $\operatorname{nwd}(f, g) = 1$.

W dalszym ciągu istotną rolę odgrywać będzie następujące twierdzenie.

7.6.2 (Mason 1984). *Niech* a, b, c *będą względnie pierwszymi wielomianami należącymi do* $k[t] \smallsetminus k$, *gdzie* k *jest ciałem charakterystyki zero. Jeśli* $a + b = c$, *to*

$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leqslant \eta(abc) - 1.$$

([Maso], [Laen]).

D. ([Laen]). Z założeń wynika, że wielomiany a, b, c są parami względnie pierwsze. Rozpatrzmy funkcje wymierne

$$f = \frac{a}{c}, \quad g = \frac{b}{c}.$$

Należą one do ciała $k(t)$ i ich suma $f+g$ jest równa 1. Pochodna tej sumy jest zatem równa 0. Mamy więc równość $f' + g' = 0$. Równość tę możemy zapisać jako $\frac{f'}{f}f + \frac{g'}{g}g = 0$ i stąd mamy:

$$-\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = \frac{g}{f} = \frac{b}{a}.$$

Każdą funkcję wymierną $r(t) \in k(t) \setminus k$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$r(t) = R \cdot (t-u_1)^{s_1}(t-u_2)^{s_2} \cdots (t-u_n)^{s_n},$$

gdzie $R \in k \setminus \{0\}$, $u_1, \dots, u_n \in \overline{k}$, $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz elementy $u_1, \dots, u_n$ są parami różne. Jest oczywiste, że mamy wówczas równość:

$$\frac{r'}{r} = \frac{s_1}{t-u_1} + \cdots + \frac{s_n}{t-u_n}.$$

Przedstawmy wielomiany a, b, c w postaci iloczynów wielomianów nierozkładalnych:

$$\begin{aligned} a &= A \cdot (t-\alpha_1)^{l_1} \cdots (t-\alpha_L)^{l_L}, \\ b &= B \cdot (t-\beta_1)^{m_1} \cdots (t-\beta_M)^{m_M}, \\ c &= C \cdot (t-\gamma_1)^{n_1} \cdots (t-\gamma_N)^{n_N}. \end{aligned}$$

Tutaj $A, B, C \in k \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_L$, $\beta_1, \dots, \beta_M$, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ są parami różnymi elementami ciała $\overline{k}$ oraz $l_1, \dots, l_L$, $m_1, \dots, m_M$, $n_1, \dots, n_N$ są dodatnimi liczbami całkowitymi. Wówczas

$$\frac{f'}{f} = \sum_{i=1}^{L} \frac{l_i}{t-\alpha_i} - \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{t-\gamma_k}, \qquad \frac{g'}{g} = \sum_{j=1}^{L} \frac{m_i}{t-\beta_j} - \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{t-\gamma_k},$$

a zatem

$$\frac{b}{a} = -\frac{\frac{f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = -\frac{\sum \frac{l_i}{t-\alpha_i} - \sum \frac{n_k}{t-\gamma_k}}{\sum \frac{m_j}{t-\beta_j} - \sum \frac{n_k}{t-\gamma_k}}.$$

Rozpatrzmy teraz wielomian

$$h(t) = (t-\alpha_1) \cdots (t-\alpha_L)(t-\beta_1) \cdots (t-\beta_M)(t-\gamma_1) \cdots (t-\gamma_N).$$

Jest jasne, że

$$\eta(abc) = \deg h, \quad \frac{f'}{f}h \in \overline{k}[t], \quad \frac{g'}{g}h \in \overline{k}[t] \quad \text{oraz} \quad \frac{b}{a} = -\frac{\frac{f'}{f}h}{\frac{g'}{g}h}.$$

Stopień wielomianu $\frac{f'}{f}h$ jest co najwyżej równy $\deg(h) - 1 = \eta(abc) - 1$. Stopień wielomianu $\frac{g'}{g}h$ jest również co najwyżej równy $\deg(h) - 1 = \eta(abc) - 1$. Ponieważ wielomiany a i b są względnie pierwsze, więc z powyżej równości wynika, że $\deg a \leqslant \eta(abc) - 1$ oraz $\deg b \leqslant \eta(abc) - 1$. Ponadto,

$$\deg c = \deg(a+b) \leqslant \max(\deg a, \ \deg b) \leqslant \eta(abc) - 1.$$

Zatem $\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} \leqslant \eta(abc) - 1$. ⊠

Spójrzmy na oczywistą równość:

$$\left(t^2-1\right)^2+\left(2t^2\right)^2=\left(t^2+1\right)^2.$$

Zachodzi ona w każdym pierścieniu wielomianów $k[t]$. Z równości tej wynika, że jeśli $n=2$, to równanie

$$X^n+Y^n=Z^n$$

ma nietrywialne rozwiązanie w pierścieniu $k[t]$. Pokażemy, że takich nietrywialnych rozwiązań nie ma dla $n>2$.

Wyjaśnijmy najpierw co rozumiemy mówiąc "nietrywialne rozwiązanie". Dla każdej liczby naturalnej n, w pierścieniu $\mathbb{R}[t]$ zachodzi równość

$$\left(t+1\right)^n+\left(t+1\right)^n=\left(\sqrt[n]{2}(t+1)\right)^n.$$

Wielomian $t+1$ możemy zastąpić dowolnym wielomianem i również taka równość zostanie zachowana. Dla każdego wielomianu a zachodzi także równość

$$a^{2n+1}+(-a)^{2n+1}=0^{2n+1}.$$

Tego rodzaju rozwiązania nie są interesujące.

Niech a,b,c będą wielomianami należącymi do $k[t]$. Mówić będziemy, że trójka (a,b,c) jest nietrywialnym rozwiązaniem równania $X^n+Y^n=Z^n$ w pierścieniu $k[t]$, jeśli $a^n+b^n=c^n$ oraz spełnione są następujące trzy warunki:

(1) $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$;

(2) $\operatorname{nwd}(a,b,c)=1$;

(3) co najmniej jeden z tych wielomianów jest dodatniego stopnia.

Teraz możemy udowodnić:

7.6.3. *Jeśli $n\geqslant 3$, to równanie*

$$X^n+Y^n=Z^n$$

nie ma nietrywialnych rozwiązań w pierścieniu $k[t]$ (gdzie k jest ciałem charakterystyki zero). ([Laen], [Mart]).

D. ([Laen]). Przypuśćmy, że istnieją takie niezerowe wielomiany $a,b,c\in k[t]$, że trójka (a,b,c) jest nietrywialnym rozwiązaniem rozpatrywanego równania.

Rozpatrzmy najpierw przypadki, w których co najmniej jeden z tych wielomianów należy do k. Jeśli dwa z tych wielomianów należą do k, to trzeci nie należy (bo założyliśmy, że co najmniej jeden nie należy) i wtedy ten trzeci jest algebraiczny nad k, co jest oczywiście sprzecznością. Załóżmy, że dokładnie jeden z wielomianów a,b,c należy do k. Mamy wtedy równość typu $f^n\pm g^n=u$, gdzie $0\neq u\in k$ oraz $f,g\in k[t]\smallsetminus\{0\}$. Wtedy wielomiany f i g są względnie pierwsze i po zróżniczkowaniu mamy równość

$$nf^{n-1}f'=\mp ng^{n-1}g',$$

z której wynika, że $g\mid f'$ oraz $f\mid g'$. Wtedy $\deg g\leqslant\deg f'=\deg f-1$, $\deg f\leqslant\deg g'=\deg g-1$ i mamy sprzeczność: $\deg g\leqslant\deg f-1\leqslant\deg g-2$.

Załóżmy teraz, że $a,b,c\in k[t]\smallsetminus k$, $a^n+b^n=c^n$ i oznaczmy przez $|a|,|b|,|c|$ odpowiednio stopnie wielomianów a,b,c. Przypomnijmy, że wielomiany a,b,c są względnie pierwsze.

Z Twierdzenia Masona 7.6.2 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} n|a| &= \deg(a^n) \leqslant \max\{\deg a^n, \deg b^n, \deg c^n\} \\ &\leqslant \eta(a^n b^n c^n) - 1 = \eta(abc) - 1 \\ &\leqslant \deg(abc) - 1 = |a| + |b| + |c| - 1, \end{aligned}$$

Zatem $n|a| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1$. Analogicznie:

$$n|b| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1 \quad \text{oraz} \quad n|c| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1.$$

Po dodaniu tych trzech nierówności stronami mamy

$$n(|a| + |b| + |c|) \leqslant 3(|a| + |b| + |c|) - 3$$

i stąd otrzymujemy sprzeczność: $n \leqslant 3 - \dfrac{3}{|a| + |b| + |c|} < 3$. ⊠

W powyższych dowodach istotną rolę odgrywało twierdzenie Masona 7.6.2. Zanotujmy jeszcze inne zastosowanie tego twierdzenia.

7.6.4. *Równanie $x^4 + y^4 = z^2$ nie ma nietrywialnych rozwiązań w pierścieniu wielomianów $k[t]$, gdzie k jest ciałem charakterystyki zero.*

D. Przypuśćmy, że istnieją niezerowe (i względnie pierwsze) wielomiany $a, b, c \in k[t]$ spełniające równość $a^4 + b^4 = c^2$, z których co najmniej jeden nie należy do k.

Rozpatrzmy najpierw przypadki, w których co najmniej jeden z tych wielomianów należy do k. Jeśli dwa z tych wielomianów należą do k, to trzeci nie należy i wtedy ten trzeci jest algebraiczny nad k, co jest oczywiście sprzecznością. Załóżmy, że dokładnie jeden z wielomianów a, b, c należy do k. Mamy wtedy równość typu $f^n \pm g^m = u$, gdzie $0 \neq u \in k$ $m, n \geqslant 2$ oraz $f, g \in k[t] \smallsetminus \{0\}$. Wtedy wielomiany f i g są względnie pierwsze i po zróżniczkowaniu mamy równość $nf^{n-1}f' = \mp mg^{m-1}g'$, z której wynika, że $g \mid f'$ oraz $f \mid g'$. Wtedy

$$\deg g \leqslant \deg f' = \deg f - 1, \qquad \deg f \leqslant \deg g' = \deg g - 1$$

i mamy sprzeczność: $\deg g \leqslant \deg f - 1 \leqslant \deg g - 2$.

Załóżmy teraz, że $a, b, c \in k[t] \smallsetminus k$, $a^4 + b^4 = c^2$ i oznaczmy przez $|a|, |b|, |c|$ odpowiednio stopnie wielomianów a, b, c. Przypomnijmy, że wielomiany a, b, c są względnie pierwsze. Na mocy Twierdzenia Masona 7.6.2 mamy:

$$\begin{aligned} 4|a| &= \deg(a^4) \leqslant \max\{\deg a^4, \deg b^4, \deg c^2\} \\ &\leqslant \eta(a^4 b^4 c^2) - 1 = \eta(a^2) + \eta(b^4) + \eta(c^2) - 1 = \eta(abc) - 1 \\ &\leqslant \deg(abc) - 1 = |a| + |b| + |c| - 1, \end{aligned}$$

Zatem $4|a| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1$. Analogicznie:

$$4|b| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1 \quad \text{oraz} \quad 2|c| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1.$$

Po dodaniu pierwszych dwóch nierówności stronami mamy $4(|a| + |b|) \leqslant 2(|a| + |b| + |c|) - 2$, czyli $|a| + |b| \leqslant |c| - 1$ i stąd otrzymujemy sprzeczność: $2|c| \leqslant |a| + |b| + |c| - 1 \leqslant |c| - 1 + |c| - 1 = 2|c| - 2 < 2|c|$. ⊠

W powyższym twierdzeniu założenie o zerowej charakterystyce ciała k jest istotne. Jeśli $\mathrm{char}(k) = 2$, to $(t+1)^4 + t^4 = 1^2$. Przepisując dowód twierdzenia 7.6.3 z drobnymi modyfikacjami otrzymujemy:

7.6.5. *Jeśli $n, m, s \geqslant 3$, to nie istnieją niezerowe i względnie pierwsze wielomiany $a, b, c \in k[t]$ (gdzie k jest ciałem charakterystyki zero), z których co najmniej jeden nie należy do k takie,że $a^n + b^m = c^s$.*

Literatura

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[G-gk] A. M. Gleason, R. E. Greenwood, L. M. Kelly, *The William Lowell Putnam Mathem. Competition. Problems and Solutions* 1938 – 1964, The Math. Assoc. America, 1980.

[InvM] Inventiones Mathematicae, (Invent. math.), Journal, Springer.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Laen] E. Laeng, *Fermat's last theorem for polynomials*, Parabola, 35(1)(1999), 3-7.

[MaJ] The MATYC Journal, Mathematics Associations of Two-Years Colleges Journal.

[Mart] B. Martynowa, *Twierdzenie Fermata dla wielomianów* (po rosyjsku), Kwant 8/1976, 12-16.

[MaS] Matematyka w Szkole, popularne czasopismo rosyjskie.

[Maso] R. C. Mason, *Diophantine equations over function fields*, London Mathh. Soc., Lecture Notes 96, Cambridge University Press, 1984.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MC] Mathematics Competitions, popularne czasopismo matematyczne

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[MoS] A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, (wydanie 8), Warszawa 1975.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pa97] H. Pawłowski, *Zadania z Olimpiad Matematycznych z Całego Świata*, Tutor, Toruń, 1997.

[Plo] A. Płoski, *Lectures on polynomial equations: Max Noether's fundamental theorem, the Jacobi formula and Bézout's theorem*, Materiały 31 Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2010, 15-26.

[PoS] G. Pólya, G. Szegö, *Problems and Theorems in Analysis*, Springer–Verlag 11, N.York 1976.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[S-kg] W. A. Sadowniczij, A. A. Grigorjan, S. W. Konjagin, *Zadania Studenckich Olimpiad Matematycznych* (po rosyjsku), Moskwa, 1987.