Podróże po Imperium Liczb

Andrzej Nowicki

Wstęp

Głównym tematem prezentowanej serii książek są liczby i ich przeróżne własności. Autor od najmłodszych lat zbierał wszelkie fakty i ciekawostki dotyczące najpierw liczb całkowitych i wielomianów o współczynnikach całkowitych, a następnie dotyczące również liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych oraz wielomianów nad tymi zbiorami liczbowymi. Nazbierało się sporo interesującego materiału, którego wybrane fragmenty będą tu przedstawione.

Materiał pochodzi z wielu różnych źródeł. Są tu zadania i problemy, które znajdziemy w popularnych czasopismach matematycznych. Wśród tych czasopism jest wychodzące od 1894 roku (przeważnie 10 numerów w roku) *The American Mathematical Monthly*. Są wśród tych czasopism również: angielskie czasopismo *Mathematical Gazette*, , kanadyjskie *Crux Mathematicorum*, rosyjskie *Kwant*, chińskie *Mathematical Excalibur*, itp. Godnymi uwagi są również polskie czasopisma popularnonaukowe: *Delta*, czasopismo dla nauczycieli *Matematyka* oraz inne.

Istotną rolę w prezentowanym materiale odegrały zadania z olimpiad i konkursów matematycznych całego świata. Każdego roku pojawiają się opracowania, książki oraz artykuły dotyczące zadań z różnych zawodów matematycznych. Wspomnijmy tylko o prestiżowych seriach książek z zawodów *International Mathematical Olympiad* (IMO) oraz *Putnam Mathematical Competition*. Sporo oryginalnych zadań znajduje się w opracowaniach dotyczących olimpiad matematycznych w Rosji lub w państwach byłego Związku Radzieckiego. Polska również ma wartościowe serie tego rodzaju książek.

Zebrany materiał pochodzi również z różnych starych oraz współczesnych podręczników i książek z teorii liczb. Wykorzystano liczne książki popularnonaukowe oraz prace naukowe publikowane w różnych czasopismach specjalistycznych. Są tu też pewne teksty pochodzące z internetu.

Większość prezentowanych faktów ma swoje odnośniki do odpowiedniej literatury. Odnośniki te wskazują tylko wybrane miejsca, w których można znaleźć albo informacje o danym zagadnieniu, albo rozwiązanie zadania, albo odpowiedni dowód. Bardzo często omawiany temat jest powtarzany w różnych pozycjach literatury i często trudno jest wskazać oryginalne źródła. Jeśli przy danym zagadnieniu nie ma żadnego odnośnika do literatury, to oznacza to, że albo omawiany fakt jest oczywisty i powszechnie znany, albo jest to własny wymysł autora.

Elementarna teoria liczb jest wspaniałym źródłem tematów zachęcających do pisania własnych programów komputerowych, dzięki którym można dokładniej poznać badane problemy. Można wykorzystać znane komputerowe pakiety matematyczne: MuPad, Mathematica, CoCoA, Derive, Maple i inne. W prezentowanej serii książek znajdziemy sporo wyników i tabel uzyskanych głównie dzięki pakietowi Maple.

We wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb" stosować będziemy jednolite oznaczenia. Zakładamy, że zero nie jest liczbą naturalną i zbiór $\{1, 2, 3, \dots\}$, wszystkich liczb naturalnych, oznaczamy przez $\mathbb{N}$. Przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych, czyli zbiór $\mathbb{N}$ wzbogacony o zero. Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych oznaczamy odpowiednio przez $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{C}$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych oznaczamy przez $\mathbb{P}$.

Największy wspólny dzielnik liczb całkowitych $a_1, \dots, a_n$ oznaczamy przez $\mathrm{nwd}(a_1, \dots, a_n)$ lub, w przypadkach gdy to nie prowadzi do nieporozumienia, przez $(a_1, \dots, a_n)$. Natomiast najmniejszą wspólną wielokrotność tych liczb oznaczamy przez $\mathrm{nww}(a_1, \dots, a_n)$ lub $[a_1, \dots, a_n]$. Zapis $a \mid b$ oznacza, że liczba a dzieli liczbę b. Piszemy $a \nmid b$ w przypadku, gdy a nie dzieli b. Część całkowitą liczby rzeczywistej x oznaczamy przez $[x]$. Mówimy, że

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$$

jest rozkładem kanonicznym liczby naturalnej $n \geqslant 2$, jeśli $p_1, \dots, p_s$ są parami różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ są liczbami naturalnymi. Jeśli m jest liczbą naturalną, to $\varphi(m)$ jest liczbą wszystkich liczb naturalnych mniejszych lub równych m i względnie pierwszych z liczbą m. Liczbę elementów skończonego zbioru A oznaczamy przez $|A|$.

Pewne zamieszczone tutaj fakty przedstawione są wraz z ich dowodami. Początek dowodu oznaczono przez **D.**. Pojawiają się również symbole **R.**, **U.**, **W.** oraz **O.** informujące odpowiednio o początku rozwiązania, uwagi, wskazówki i odpowiedzi. Wszystkie tego rodzaju teksty zakończone są symbolem $\boxtimes$. Skrót "Odp." również oznacza odpowiedź.

Spis cytowanej literatury znajduje się na końcu tej książki (przed skorowidzami). Liczby pomiędzy nawiasami $\langle$ oraz $\rangle$, występujące w tym spisie, oznaczają strony, na których dana pozycja jest cytowana. W pewnych podrozdziałach podano również literaturę dodatkową lub uzupełniającą. Informuje o tym symbol $\bigstar$.

Seria "Podróże po Imperium Liczb" składa się z piętnastu nastpujących książek.

01. Liczby wymierne;
02. Cyfry liczb naturalnych;
03. Liczby kwadratowe;
04. Liczby pierwsze;
05. Funkcje arytmetyczne;
06. Podzielność w zbiorze liczb całkowitych;
07. Ciągi rekurencyjne;
08. Liczby Mersenne'a, Fermata i inne liczby;
09. Sześciany, bikwadraty i wyższe potęgi;
10. Liczby i funkcje rzeczywiste;
11. Silnie i symbole Newtona;
12. Wielomiany;
13. Nierówności;
14. Równanie Pella;
15. Liczby, funkcje, zbiory, geometria.

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn
e-mail: anow@mat.uni.torun.pl
