
Olsztyn, Toruń. Wydawnictwo OWSliZ,

Wydanie Pierwsze, 2008

Wydanie Drugie, 2012

Podróże po Imperium Liczb

01 Liczby Wymierne

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

Wersja poprawiona i uzupełniona

7 grudnia 2011

| | |
|--|-----------|
| Wstęp | 1 |
| 1 Równości i wstępne informacje o liczbach wymiernych | 5 |
| 1.1 Równości z liczbami wymiernymi i dopisywanie cyfr | 5 |
| 1.2 Równości wynikające z twierdzenia Abela | 9 |
| 1.3 Następne równości z liczbami wymiernymi | 11 |
| 1.4 Całkowitość pewnych liczb wymiernych | 13 |
| 1.5 Wymierność pewnych liczb rzeczywistych | 17 |
| 1.6 Przedstawianie liczb wymiernych w szczególnej postaci | 18 |
| 1.7 Podzbiory zbioru liczb wymiernych | 19 |
| 1.8 Dodatkowe fakty i zadania z liczbami wymiernymi | 21 |
| 2 Rozkłady jedynki na sumę ułamków prostych | 23 |
| 2.1 Ogólne fakty o rozkładach jedynki | 23 |
| 2.2 Rozkłady jedynki na sumę $s \leq 7$ ułamków prostych | 25 |
| 2.3 Rozkłady jedynki na sumę $s \geq 8$ ułamków prostych | 26 |
| 2.4 Dodatkowe fakty o rozkładach jedynki | 28 |
| 3 Rozkłady liczb wymiernych na ułamki proste | 29 |
| 3.1 Rozkłady liczb wymiernych | 29 |
| 3.2 Rozkłady liczb naturalnych | 32 |
| 3.3 Sumy dwóch ułamków prostych | 33 |
| 3.4 Równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ | 37 |
| 3.5 Równanie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ | 40 |
| 3.6 Sumy trzech ułamków prostych | 40 |
| 3.7 Hipotezy o sumach trzech ułamków prostych | 44 |
| 3.8 Sumy czterech ułamków prostych | 48 |
| 4 Odwrotności wyrazów pewnych ciągów | 50 |
| 4.1 Niecałkowitość sumy odwrotności wyrazów ciągu | 50 |
| 4.2 Odwrotności wyrazów ciągu arytmetycznego | 51 |
| 4.3 Odwrotności kolejnych liczb naturalnych | 51 |
| 4.4 Naprzemienne sumy ułamków prostych | 54 |
| 4.5 Odwrotności liczb pierwszych | 54 |
| 4.6 Odwrotności liczb potęgowych | 55 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 4.7 | Odwrotności liczb kwadratowych | 55 |
| 4.8 | Odwrotności liczb trójkątnych | 57 |
| 4.9 | Odwrotności sześciątów | 58 |
| 4.10 | Granice | 59 |
| 5 | Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych | 61 |
| 5.1 | Tablice rozwinięć dziesiętnych pewnych liczb wymiernych | 61 |
| 5.2 | Okresy rozwinięć dziesiętnych liczb wymiernych | 63 |
| 5.3 | Różne zadania o rozwinięciach dziesiętnych liczb wymiernych | 64 |
| 6 | Przystawanie modulo m dla liczb wymiernych | 65 |
| 6.1 | Definicje | 65 |
| 6.2 | Przystawanie i mianowniki | 66 |
| 6.3 | Przystawanie i dodawanie | 67 |
| 6.4 | Przystawanie jako relacja równoważności | 67 |
| 6.5 | Przystawanie i mnożenie | 68 |
| 6.6 | Przystawanie modulo 2 | 68 |
| 6.7 | Przystawanie modulo p^k | 69 |
| 7 | Podzielność dla liczb wymiernych | 71 |
| 7.1 | Rozkład kanoniczny liczb wymiernych | 71 |
| 7.2 | Relacja podzielności w \mathbb{Q}^* | 71 |
| 7.3 | Nwd i nww dla liczb wymiernych. Definicje i przykłady | 72 |
| 7.4 | Nwd i nww dla liczb wymiernych. Własności | 73 |
| 7.5 | Względnie pierwsze liczby wymierne | 74 |
| 8 | Twierdzenie Wolstenholme i jego uogólnienia | 75 |
| 8.1 | Współczynniki A_i | 75 |
| 8.2 | Współczynniki A_i dla liczb pierwszych | 76 |
| 8.3 | Zastosowania dla liczb pierwszych i iloczynów | 77 |
| 8.4 | Sumy odwrotności iloczynów | 78 |
| 8.5 | Odwrotności liczb względnie pierwszych: podstawowe fakty | 79 |
| 8.6 | Odwrotności liczb względnie pierwszych: Twierdzenia Gessela | 81 |
| 8.7 | Twierdzenie Wolstenholme i inne twierdzenia | 82 |
| 8.8 | Dodatkowe fakty i zadania | 85 |
| 9 | Liczby postaci $x_1/x_2 + x_2/x_3 + \dots + x_s/x_1$ | 87 |
| 9.1 | Podstawowe własności zbiorów B_s i A_s | 87 |
| 9.2 | Zbiór B_2 | 90 |
| 9.3 | Zbiór B_3 i liczby $(a^3 + b^3 + c^3)/abc$ | 91 |
| 9.4 | Nieskończoność zbioru A_3 | 93 |
| 9.5 | Przykłady liczb naturalnych należących do A_3 | 94 |
| 9.6 | Występowanie danej liczby w rozkładach liczb ze zbioru A_3 | 98 |
| 9.7 | Zbiór B_3 | 100 |
| 9.8 | Liczby postaci $x/y + y/z + z/x$, gdzie x, y, z są liczbami całkowitymi | 103 |
| 9.9 | Zbiór A_4 | 106 |
| 10 | Dodatkowe informacje o liczbach wymiernych | 108 |
| 10.1 | Kwadraty liczb wymiernych | 108 |
| 10.2 | Sześciąty, bikwadraty i wyższe potęgi | 110 |
| 10.3 | Równania diofantyczne i rozwiązania wymierne | 111 |
| 10.4 | Pewne nierówności wymierne | 114 |
| 10.5 | Liczby Fibonacciego, Lucasa i liczby wymierne | 114 |

| | |
|---|------------|
| 10.6 Liczby wymierne i ciągi szczególnej postaci | 115 |
| 10.7 Liczby wymierne i klasyczne funkcje arytmetyczne | 117 |
| Spis cytowanej literatury | 119 |
| Skorowidz nazwisk | 125 |
| Skorowidz | 127 |

Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn

Skorowidz

- Abel N.H., 9
Alfutova N.B., 119
Andreescu T., 119
Andrica D., 119
Anning N., 9
Apéry, 59
Arkin J., 110, 119
- Balfour A., 64
Baranowa I.W., 119
Bednarek W., 119
Bernik V.I., 119
Bibiloni L., 60
Boas R.P. Jr., 53
Boltianski W.G., 119
Bondarenko A.V., 3, 87, 94, 119
Bonning A., 31
Bremner A., 119
Browkin J., 119
Bryński M., 119
- Cassels J.W.S., 104
Chentzov N.N., 123
Clifton-Everest C.L., 43
Cohen H., 119
Cohen R., 31
Czakyrjan K., 120
- Derksen H., 22
Detemple D.W., 50
Dickson L.E., 40, 86, 119
Diofantos, 109
Djukić D., 120
Doduniekow S., 120
Dofs E., 94, 120
Dujardin, 31
Dujella A., 110, 120
- Erdős P., 44, 92, 93, 118
Euler, 109, 110, 112, 113
- Farkas, 117
Feng Z., 119
Fomin D.W., 120
Frost P., 84
- Galpierin G.A., 120
Gardiner A., 120
Gelfand S.I., 120
Genkin S.A., 120
- Gerwer M.L., 120
Gessel I.M., 3, 120
Gibbs P., 110, 120
Glaisher, 84, 86
Golovanov A., 116
Griffiths P.A., 11
Grigorjan A.A., 122
Guy R.K., 31, 44, 45, 119, 120
- Hagedorn T.R., 43
Hardy G.H., 120
Hasse H., 120
Hoggatt V.E., 110, 119
Hoke O.H., 27
Hou Sh-H., 11
Hsia C., 63
Husemöller D., 120
- Isaacs I.M., 120
Itenberg I.W., 120
Izboldin O., 28
- Jadrenko M.I., 124
Jajte R., 120
Janković V., 120
Jędrzejewicz P., 121
Jegorow A.A., 123
- Kaniel-Bielow A.J., 121
Kartaszow I.W., 124
Kato K., 121
Kiryłow A.A., 120
Klamkin M., 103
Kline M., 60
Kluempfen F.L., 21
Koninck De J.-M., 121
Konjagin S.W., 122
Kowaldźy A.K., 121
Krysicki W., 120
Kubiak K., 89
Kurlandczyk L., 28, 121
Kurokawa N., 121
Kurschak J., 121
- Lapin C.E., 119
Lee H., 121
Leibniz, 59
LeLionnais F., 121
Leman W.G., 119

- Marghidanu D., 114
Marzantowicz W., 121
Matić I., 120
Melnikow O.W., 119
Mendes M., 64
Mercier A., 121
Michailowski W.I., 124
Miksa F.L., 27
Mollin R.A., 121
Mordell L.J., 45, 121
Moreau C., 37
Moser L., 57
- Nagara P.N., 27
Narkiewicz W., 31, 122
Niven I., 92, 93
Nowicki A., 121, 122
- Ossowski P., 82–84
- Palström A., 37
Paradis J., 60
Pawłowski H., 122
Petrović N., 120
Prasolov V.V., 122
- Rademacher H., 63, 122
Rao K.S., 63
Reboli D.M., 21
Rempała J., 119
Ribenoim P., 122
Rusin D., 95, 96, 103–105, 122
- Sadier J., 37
Sadowicz W.A., 122
Saito S., 121
Sandor J., 40, 43, 57, 123
Santos D.A., 123
Sato N., 63
Schiller J.K., 63
Schinzel A., 33, 108, 117
Semionowa L., 63
Shiu P., 24
Shklarsky D.O., 123
Sierpiński W., 31, 41, 45–47, 57, 94, 122, 123
Silverman J.H., 123
Simmons H.A., 31
Siwaszinski I.H., 123
Słomska A., 31
Smart N.P., 123
Śmieszek I., 85
Śniady P.W., 22
Straszewicz S., 119, 123
- Straus E.G., 44
Strauss E.G., 110, 119
Strzelecki P., 60
Swett A., 44
Szneperman L.B., 123
Szurek M., 123
- Tao T., 123
Tate J., 123
Tołpygo A.K., 120
Toeplitz O., 63, 122
Trigg Ch., 123
- Ustinov A.W., 119
- Viader P., 60
- Wadhwa A.D., 60
Wagutien W.N., 22
Wasilev J.B., 121
Wasilev N.B., 123
Wilenskin N.J., 22
Winogradow I., 123
Wolstenholme J., 3, 82
Worobjow N.N., 123
Wróblewski J., 22
Wrench J.W. Jr., 53
Wright E.M., 120
Wyszenski W.A., 124
- Yaglom I.M., 123
- Zarzycki P., 60, 121
Żuk I.K., 119

Skorowidz

- bezwzględna wartość, 14, 49, 69, 70, 73, 74, 93, 105
- bikwadrat liczby całkowitej, 11, 12, 16, 59, 81, 84, 91, 107, 111–113
- boki trójkąta, 103
- ciąg
 - arytmetyczny, 50, 51, 53, 60, 109, 115
 - Fibonacciego, 52, 114, 115
 - geometryczny, 115
 - Lucasa, 114
 - nieograniczony, 116
 - nieskończony, 53
 - ograniczony, 116
 - rekurencyjny, 16, 23, 24, 114, 116
 - rosnący, 29
 - $w(x)$, 116
- ciało, 19, 20
- cosinus, 17, 18, 21
- cyfry, 5, 7–9, 60, 63, 64, 82, 84, 105, 116
- część całkowita, 2, 52, 114, 116
- część ułamkowa, 18, 114
- czwórka liczb naturalnych, 55, 58, 106, 107
- długość $D(m)$ -zbioru, 109
- dwójkowy system numeracji, 115
- elipsa, 63
- funkcja
 - φ , 2, 52, 63, 117
 - μ Möbiusa, 117
 - σ , 24, 117, 118
 - τ , 14, 38, 39, 117
 - arytmetyczna, 117
 - okresowa, 21
 - trygonometryczna, 18, 21
 - z \mathbb{Q} do \mathbb{Q} , 21
 - z $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ do \mathbb{Q} , 22
 - zeta Riemanna, 59
- granica ciągu, 29, 59, 60, 115, 118
- harmoniczny trójkąt Leibniza, 37
- hipoteza, 80
 - Erdösa, 60
 - Erdösa-Strausa, 44, 45
 - Schinzla, 47
 - Sierpińskiego, 45, 46
- iloczyn kartezjański, 22
- IMO, 1, 15, 16, 28, 50, 52, 59
 - Longlist, 117
 - Shortlist, 19, 114, 115, 117, 118
- indukcja matematyczna, 19, 23, 28–30, 51, 53, 76
- kanoniczne przedstawienie, 71
- kolejne liczby naturalne, 11, 13, 16, 50–54, 56, 59, 60, 75, 79, 82–86
- kongruencja, 65–70, 76, 81, 86, 107
- krzywa eliptyczna, 104, 109, 112, 113
- liczba
 - π , 18, 59, 60
 - m -przedstawialna, 66
 - bezkwadratowa, 32
 - doskonała, 24
 - dzielników naturalnych, 14, 38, 39, 117
 - Fibonacciego, 114, 115
 - jedynkowa e_n , 5–8
 - kwadratowa, 11, 17, 28, 36, 39, 40, 55–57, 59, 83, 108–110, 112, 115, 117
 - Lucasa, 114, 115
 - nieparzysta, 9, 15, 18, 27, 38, 43, 48, 68, 69, 79, 81, 82, 84–86
 - niewymierna, 17, 18, 59, 64, 111
 - parzysta, 26, 27, 50, 54, 63, 68, 80
 - pierwsza, 3, 16, 17, 38–40, 44, 45, 54, 62, 63, 71, 76–78, 82–84, 86, 90, 115
 - Pitagorasa, 109
 - rzeczywista, 10, 17, 24, 64, 115
 - trójkątna, 57, 58
 - wymierna, 3, 5
 - zero-jedynkowa, 9
 - zespolona, 10, 13, 17
- liczby względnie pierwsze, 18, 19, 31, 36, 39, 42, 43, 50, 52, 53, 55, 66, 68–70, 74, 79, 81–86, 90, 92, 93, 95, 100
- logarytm, 51, 59, 60, 117
- maksymalny element, 31
- Maple, 1, 12, 23, 25, 26, 34, 36, 38, 40–42, 48, 58, 82–84, 86, 91, 95, 98–103, 106, 107, 116
- nierówność, 23–25, 32, 51, 52, 56, 58–60, 87, 114, 116–118
- nwd, 2, 37, 58, 66, 72–74, 92, 117
- nww, 2, 52, 53, 63, 72–74
- odległość, 112
- okrąg, 111, 112

- okres rozwinięcia dziesiętnego, 51, 61–63
- Olimpiada Matematyczna
- Armenia, 116
 - Australia, 13
 - Bośnia-Hercegowina, 105
 - Bułgaria, 86, 113
 - Czechy-Słowacja, 13
 - Estonia, 15
 - Grecja, 59
 - Irlandia, 59
 - Izrael, 51
 - Kanada, 12, 52, 57, 114
 - Leningrad, 12
 - Litwa, 52, 56
 - Moldawia, 52, 114
 - Mongolia, 16
 - Moskwa, 14, 93
 - Niemcy, 17
 - Norwegia, 32, 55
 - Polska, 13, 16, 17, 39
 - Rosja, 49, 86
 - Rumunia, 15, 17
 - Serbia-Czarnogóra, 93
 - Słowenia, 53
 - St Petersburg, 13, 63
 - Szwecja, 31, 108
 - USA, 28
 - W. Brytania, 11, 19, 39, 40, 64, 108
 - Węgry-Izrael, 31
 - Wietnam, 114
 - ZSRR, 108
- otwarty problem, 44, 110
- para liczb
- całkowitych, 25, 113
 - naturalnych, 14–16, 25, 34, 38, 39, 42, 43, 50, 55, 60, 80, 81, 98
 - wymiernych, 17, 110, 112
- permutacja, 114
- pochodna, 9, 10, 76
- podpierścień, 19–21
- podzbiór, 19, 20, 60
- podzielność, 23, 54, 65–68, 79–82, 92, 94, 98, 99
- liczb wymiernych, 71, 74
 - przez 3, 18, 33, 34, 86, 117
 - przez 5, 86, 107
 - przez 8, 86
 - przez 13, 85
 - przez 19, 115
 - przez liczbę pierwszą, 54, 55, 69, 70, 76–78, 84, 86, 90, 93
- przez potęgę liczby pierwszej, 66, 69, 70, 77–79, 82–86
- potęga
- dwójki, 14, 18, 20, 24, 37, 51, 54, 55, 58, 68, 69, 82, 86, 114–117
 - dziesiątki, 6, 9
 - liczby pierwszej, 33, 37, 39, 69, 86, 117
 - liczby wymiernej, 110
 - piątki, 116
 - siódemki, 33
 - trójki, 18, 80, 114, 115
- promień, 112
- przedstawienie liczby naturalnej, 14, 31, 32
- przedstawienie liczby wymiernej, 18, 29, 30, 33
- przekrój zbiorów, 21, 87, 90
- punkt wymierny, 109, 111–113
- pytanie, 3, 46, 47, 58, 100, 107
- relacja typu równoważności, 67
- reszta, 54, 69, 70, 85
- równanie diofantyczne,
- n zmiennych, 23, 30, 31, 55–57, 59
 - czterech zmiennych, 25, 36, 55, 58, 107, 113
 - dwóch zmiennych, 14, 15, 25, 34–36, 38–40, 110, 112, 113
- Fermata, 113
- pięciu zmiennych, 26
 - sześciu zmiennych, 26
 - trzech zmiennych, 26, 37, 39–47, 55, 56, 58, 95, 103–105, 113
- rozkład kanoniczny, 39, 71–73, 92
- rozwiązanie
- całkowite, 25, 103–105, 107, 113
 - naturalne, 14, 15, 23, 25, 26, 30, 34–43, 55–59, 95, 107, 113, 117
 - wymierne, 110–113
- rozwinięcie dziesiętne, 3, 51, 60–64
- silnia, 19, 24, 54, 76–79, 82, 83, 85, 118
- suma
- bikwadratów, 12
 - cyfr, 116
 - kwadratów, 12, 108, 109
 - sześcianów, 19, 110, 111
 - szeregu, 59, 60, 115
 - ułamków prostych, 23, 24, 29–36, 42–44, 47, 48, 52, 54, 57, 60
- superabundant numbers, 118
- symbol Newtona, 37, 76, 86
- system numeracji, 5, 6, 8, 9, 115
- czwórkowy, 6, 9
 - dziewiątkowy, 6

- ósemkowy, 6
- piątkowy, 9
- szóstkowy, 6
- trójkowy, 8
- sześcian liczby całkowitej, 4, 11, 15, 16, 19, 58, 59, 83, 84, 91–95, 99, 100, 103–105, 107, 110, 117
- sześcian liczby wymiernej, 17, 110, 111
- szereg, 59, 60, 115
- trójka liczb
 - naturalnych, 5, 11, 25, 32, 41, 55, 58, 73, 95–98, 100–102
 - wymiernych, 13, 25, 74, 109
- twierdzenie
 - Abela, 9
 - Bezouta, 76
 - Bondarenko, 87, 94
 - Erdösa-Nivena, 92, 93
 - Gessela, 81–85
 - małe Fermata, 76, 107
 - o pierwiastkach wymiernych, 13
 - Rusina, 104, 105
 - Wilsona, 76, 85
 - Wolstenholme, 3, 82
- ułamek egipski, 3
- ułamek prosty, 3, 21, 23, 25–27, 29–32, 36, 40, 42, 45, 50, 54
- warunki równoważne, 21, 33, 38, 39, 60, 65, 66, 88, 90–92, 104, 108, 109, 115, 117
- wielomian, 13, 75, 76
- zbiór, 31, 91
 - \mathbb{N}_0 , 1
 - \mathbb{Z}_S , 20
 - $D(m)$, 109
 - gęsty, 53, 109, 115, 117, 118
 - liczb całkowitych, 1, 16
 - liczb naturalnych, 1, 20, 28, 32
 - liczb pierwszych, 1, 71
 - liczb rzeczywistych, 1, 118
 - liczb wymiernych, 1, 5, 19, 53, 87, 108, 112
 - liczb zespolonych, 1, 15, 22
 - multiplikatywny, 20
 - nieskończony, 15–19, 23, 30, 55–60, 86, 91, 93–95, 104–113
 - skończony, 15, 16, 30, 47, 57, 72, 98