Podróże po Imperium Liczb

Część 01. Liczby Wymierne

Rozdział 1

1. Równości i wstępne informacje o liczbach wymiernych

Andrzej Nowicki 7 grudnia 2011, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

1 Równości i wstępne informacje o liczbach wymiernych

Każdą liczbę postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi oraz $b \neq 0$, nazywamy *liczbą wymierną*. Zbiór wszystkich liczb wymiernych oznaczamy przez $\mathbb{Q}$.

1.1 Równości z liczbami wymiernymi i dopisywanie cyfr

1.1.1. *Zachodzą równości:*

(1) $\frac{1}{5} = \frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \cdots, \quad \frac{2}{5} = \frac{26}{65} = \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \cdots.$

(2) $\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \cdots, \quad \frac{4}{8} = \frac{49}{98} = \frac{499}{998} = \frac{4999}{9998} = \cdots.$

Równości te są konsekwencjami następującego stwierdzenia. Przez $\overline{a_1a_2\dots a_s}$ oznaczamy liczbę naturalną, której kolejnymi cyframi są odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_s$.

1.1.2. *Jeśli a, b, c są takimi cyframi, że $\overline{ab}/\overline{bc} = a/c$, to*

$$\frac{a}{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{\overline{abbb}}{\overline{bbbc}} = \frac{\overline{abbbb}}{\overline{bbbbc}} = \cdots.$$

([Fom] 14/64, [Kw] 9/72 21).

D. Załóżmy, że $\overline{ab}/\overline{bc} = a/c$. Wtedy $\frac{10a+b}{10b+c} = \frac{a}{c}$ i stąd $9ac + bc - 10ab = 0$. Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy:

$$u_n = \overline{a\underbrace{bb\dots b}_{n}}, \quad v_n = \overline{\underbrace{bb\dots b}_{n}c}, \quad e_n = \overline{\underbrace{11\dots 1}_{n}}.$$

Należy udowodnić, że $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{c}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $u_n = 10^n a + be_n$ oraz $v_n = 10be_n + c$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} cu_n - av_n &= c(10^n a + be_n) - a(10be_n + c) = (10^n - 1)ac + bce_n - 10abe_n \\ &= 9e_n ac + bce_n - 10abe_n = e_n(9ac + bc - 10ab) = e_n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

a zatem $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{c}$. ⊠

1.1.3. *Jeśli a, b, c są takimi niezerowymi cyframi, że $\overline{ab}/\overline{bc} = a/c$, to (a, b, c) jest jedną z czterech trójek:* $(1, 6, 4)$, $(1, 9, 5)$, $(2, 6, 5)$, $(4, 9, 8)$.

W stwierdzeniu 1.1.2 liczby naturalne występujące w licznikach i mianownikach zapisane były w dziesiętnym systemie numeracji. Wykażemy teraz, że w systemie numeracji o podstawie $q \geqslant 2$ również zachodzi podobne stwierdzenie.

Przez $(a_1a_2\dots a_s)_q$ oznaczamy liczbę naturalną, której kolejnymi cyframi w systemie numeracji o podstawie $q \geqslant 2$ są odpowiednio $a_1, a_2, \dots, a_s$, tzn.

$$(a_1a_2\dots a_s)_q = a_1q^{s-1} + a_2q^{s-2} + \cdots + a_{s-1}q + a_s$$

i przy tym liczby $a_1, \dots, a_s$ należą do zbioru $\{0, 1, \dots, (q-1)\}$. W szczególnym przypadku, gdy $q = 10$, mamy:

$$(a_1 a_2 \dots a_s)_{10} = a_1 10^{s-1} + a_2 10^{s-2} + \dots + a_{s-1} 10 + a_s = \overline{a_1 a_2 \dots a_s}.$$

1.1.4. *Jeśli a, b, c są takimi cyframi w systemie numeracji o podstawie $q \geqslant 2$, że $\frac{(ab)_q}{(bc)_q} = \frac{a}{c}$, to*

$$\frac{a}{c} = \frac{(ab)_q}{(bc)_q} = \frac{(abb)_q}{(bbc)_q} = \frac{(abbb)_q}{(bbbc)_q} = \frac{(abbbb)_q}{(bbbbc)_q} = \cdots .$$

D. Załóżmy, że $\frac{(ab)_q}{(bc)_q} = \frac{a}{c}$. Wtedy $\frac{qa+b}{qb+c} = \frac{a}{c}$ i stąd $(q-1)ac + bc - qab = 0$. Dla każdej liczby naturalnej n oznaczmy:

$$u_n = (a\underbrace{bb\dots b}_{n})_q, \quad v_n = (\underbrace{bb\dots b}_{n}c)_q, \quad e_n = (\underbrace{11\dots 1}_{n})_q.$$

Należy udowodnić, że $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{c}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $u_n = q^n a + be_n$ oraz $v_n = qbe_n + c$. Mamy więc:

$$\begin{aligned} cu_n - av_n &= c(q^n a + be_n) - a(qbe_n + c) = (q^n - 1)ac + bce_n - qabe_n \\ &= (q-1)e_n ac + bce_n - qabe_n = e_n((q-1)ac + bc - qab) = e_n \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

a zatem $\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{c}$. ⊠

Zanotujmy kilka konsekwencji stwierdzenia 1.1.4.

1.1.5. *W czwórkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{1}{2} = \frac{(13)_4}{(32)_4} = \frac{(133)_4}{(332)_4} = \frac{(1333)_4}{(3332)_4} = \cdots .$$

1.1.6. *W szóstkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{1}{3} = \frac{(15)_6}{(53)_6} = \frac{(155)_6}{(553)_6} = \frac{(1555)_6}{(5553)_6} = \cdots , \quad \frac{2}{4} = \frac{(25)_6}{(54)_6} = \frac{(255)_6}{(554)_6} = \frac{(2555)_6}{(5554)_6} = \cdots .$$

1.1.7. *W ósemkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{1}{4} = \frac{(17)_8}{(74)_8} = \frac{(177)_8}{(774)_8} = \frac{(1777)_8}{(7774)_8} = \cdots , \quad \frac{3}{6} = \frac{(37)_8}{(76)_8} = \frac{(377)_8}{(776)_8} = \frac{(3777)_8}{(7776)_8} = \cdots .$$

1.1.8. *W dziewiątkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{1}{3} = \frac{(14)_9}{(43)_9} = \frac{(144)_9}{(443)_9} = \frac{(1444)_9}{(4443)_9} = \cdots , \quad \frac{2}{6} = \frac{(28)_9}{(86)_9} = \frac{(288)_9}{(886)_9} = \frac{(2888)_9}{(8886)_9} = \cdots .$$

Stosując stwierdzenie 1.1.4 dla systemów numeracji o podstawach q będących potęgami dziesiątki, otrzymujemy nowe serie przykładów w systemie dziesiętnym.

1.1.9.

$$\frac{1}{34} = \frac{151}{5134} = \frac{15151}{515134} = \frac{1515151}{51515134} = \cdots , \quad \frac{2}{24} = \frac{227}{2724} = \frac{22727}{272724} = \frac{2272727}{27272724} = \cdots ,$$

$$\frac{7}{40} = \frac{742}{4240} = \frac{74242}{424240} = \frac{7424242}{42424240} = \cdots , \quad \frac{36}{80} = \frac{3681}{8180} = \frac{368181}{818180} = \frac{36818181}{81818180} = \cdots .$$

1.1.10.

(1) $\dfrac{1}{250} = \dfrac{1333}{333250} = \dfrac{1333333}{333333250} = \dfrac{1333333333}{333333333250} = \dfrac{1333333333333}{333333333333250} = \cdots,$

(2) $\dfrac{7}{250} = \dfrac{7259}{259250} = \dfrac{7259259}{259259250} = \dfrac{7259259259}{259259259250} = \dfrac{7259259259259}{259259259259250} = \cdots,$

(3) $\dfrac{13}{494} = \dfrac{13513}{513494} = \dfrac{13513513}{513513494} = \dfrac{13513513513}{513513513494} = \dfrac{13513513513513}{513513513513494} = \cdots,$

(4) $\dfrac{115}{736} = \dfrac{115740}{740736} = \dfrac{115740740}{740740736} = \dfrac{115740740740}{740740740736} = \dfrac{115740740740740}{740740740740736} = \cdots.$

W powyższych ułamkach dopisywaliśmy do licznika i mianownika pewne liczby; do licznika z prawej strony, a do mianownika z lewej. Teraz będziemy dopisywać pewne liczby w środkowe miejsca liczników i mianowników. Spójrzmy na następujący przykład.

1.1.11. $\dfrac{26}{53} = \dfrac{286}{583} = \dfrac{2886}{5883} = \dfrac{28886}{58883} = \cdots.$ ([KoM] Gy1959).

Pokażemy, że tego rodzaju równości istnieje znacznie więcej. W tym celu udowodnimy najpierw następujące stwierdzenie.

1.1.12. *Niech* a, b, c, d *będą cyframi takimi, że* $10a + b \neq 10c + d$ *i niech* $u = \frac{9(bc-ad)}{10(c-a)+(d-b)}$. *Jeśli* $u \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, *to*

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{aub}}{\overline{cud}} = \frac{\overline{auub}}{\overline{cuud}} = \frac{\overline{auuub}}{\overline{cuuud}} = \frac{\overline{auuuub}}{\overline{cuuuud}} = \cdots.$$

D. Załóżmy, że u jest jedną z cyfr $0, 1, \dots, 9$ oraz oznaczmy:

$$u_n = \overline{a\underbrace{uu\dots u}_{n}b}, \quad v_n = \overline{c\underbrace{uu\dots u}_{n}d}, \quad e_n = \overline{\underbrace{11\dots 1}_{n}}.$$

Należy udowodnić, że $\frac{u_n}{v_n} = \frac{10a+b}{10c+d}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $u_n = 10^{n+1}a + 10ue_n + b$ oraz $v_n = 10^{n+1}c + 10ue_n + d$. Mamy więc:

$$\begin{aligned}
(10a+b)v_n - (10c+d)u_n &= (10a+b)\big(10^{n+1}c + 10ue_n + d\big) - (10c+d)\big(10^{n+1}a + 10ue_n + b\big) \\
&= +10^{n+2}ac + 10^2aue_n + 10ad + 10^{n+1}bc + 10ube_n + bd \\
&\quad\ -10^{n+2}ac - 10^2uce_n - 10bc - 10^{n+1}ad - 10ude_n - bd \\
&= \big(10^{n+1} - 10\big)\,bc - \big(10^{n+1} - 10\big)\,ad \\
&\quad\ +10^2aue_n + 10ube_n - 10^2uce_n - 10ude_n \\
&= 90e_nbc - 90e_nad + 100aue_n + 10ube_n - 100uce_n - 10ude_n \\
&= 10e_n\Big(9(bc-ad) - u\,(10(c-a) + (d-b))\Big) \\
&= 10e_n\Big(9(bc-ad) - 9(bc-ad)\Big) = 0,
\end{aligned}$$

a zatem $\frac{u_n}{v_n} = \frac{10a+b}{10c+d}$. ⊠

Z tego stwierdzenia wynikają następujące serie równości.

1.1.13.

$$\frac{14}{23}=\frac{154}{253}=\frac{1554}{2553}=\frac{15554}{25553}=\cdots, \qquad \frac{14}{56}=\frac{134}{536}=\frac{1334}{5336}=\frac{13334}{53336}=\cdots,$$

$$\frac{15}{51}=\frac{165}{561}=\frac{1665}{5661}=\frac{16665}{56661}=\cdots, \qquad \frac{16}{25}=\frac{176}{275}=\frac{1776}{2775}=\frac{17776}{27775}=\cdots,$$

$$\frac{17}{34}=\frac{197}{394}=\frac{1997}{3994}=\frac{19997}{39994}=\cdots, \qquad \frac{22}{31}=\frac{242}{341}=\frac{2442}{3441}=\frac{24442}{34441}=\cdots,$$

$$\frac{26}{71}=\frac{286}{781}=\frac{2886}{7881}=\frac{28886}{78881}=\cdots, \qquad \frac{34}{61}=\frac{374}{671}=\frac{3774}{6771}=\frac{37774}{67771}=\cdots.$$

Tego rodzaju równości istnieje znacznie więcej. Drobne zmiany w dowodzie stwierdzenia 1.1.12 pozwalają udowodnić analogiczne stwierdzenie dla dowolnych systemów numeracji.

1.1.14. *Niech a, b, c, d będą cyframi w systemie numeracji o podstawie $q \geqslant 2$ takimi, że $qa + b \neq qc + d$ i niech $u = \frac{(q-1)(bc-ad)}{q(c-a)+(d-b)}$. Jeśli $u \in \{0, 1, 2, \dots, (q-1)\}$, to*

$$\frac{(ab)_q}{(cd)_q}=\frac{(aub)_q}{(cud)_q}=\frac{(auub)_q}{(cuud)_q}=\frac{(auuub)_q}{(cuuud)_q}=\cdots.$$

D. Załóżmy, że $u \in \{0, 1, \dots, (q-1)\}$ i oznaczmy:

$$u_n=(a\underbrace{uu\dots u}_{n}b)_q, \quad v_n=(c\underbrace{uu\dots u}_{n}d)_q, \quad e_n=(\underbrace{11\dots 1}_{n})_q.$$

Należy udowodnić, że $\frac{u_n}{v_n}=\frac{qa+b}{qc+d}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że $u_n = q^{n+1}a + que_n + b$ oraz $v_n = q^{n+1}c + que_n + d$. Mamy więc:

$$\begin{aligned}
(qa+b)v_n-(qc+d)u_n &= (qa+b)\left(q^{n+1}c+que_n+d\right)-(qc+d)\left(q^{n+1}a+que_n+b\right)\\
&= +q^{n+2}ac+q^2aue_n+qad+q^{n+1}bc+qube_n+bd\\
&\quad -q^{n+2}ac-q^2uce_n-qbc-q^{n+1}ad-qude_n-bd\\
&= \left(q^{n+1}-q\right)bc-\left(q^{n+1}-q\right)ad+q^2aue_n+qube_n-q^2uce_n-qude_n\\
&= qe_n\Big((q-1)(bc-ad)-u\left(q(c-a)+(d-b)\right)\Big)\\
&= qe_n\Big((q-1)(bc-ad)-(q-1)(bc-ad)\Big)=0,
\end{aligned}$$

a zatem $\frac{u_n}{v_n}=\frac{qa+b}{qc+d}$. ⊠

Zanotujmy kilka równości wynikających ze stwierdzenia 1.1.14.

1.1.15. *W trójkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{(11)_3}{(20)_3}=\frac{(121)_3}{(220)_3}=\frac{(1221)_3}{(2220)_3}=\frac{(12221)_3}{(22220)_3}=\frac{(122221)_3}{(222220)_3}=\cdots.$$

1.1.16. *W czwórkowym systemie numeracji zachodzą równości:*

$$\frac{(11)_4}{(20)_4} = \frac{(121)_4}{(220)_4} = \frac{(1221)_4}{(2220)_4} = \cdots, \qquad \frac{(12)_4}{(21)_4} = \frac{(132)_4}{(231)_4} = \frac{(1332)_4}{(2331)_4} = \frac{(13332)_4}{(23331)_4} = \cdots,$$

$$\frac{(12)_4}{(30)_4} = \frac{(132)_4}{(330)_4} = \frac{(1332)_4}{(3330)_4} = \cdots, \qquad \frac{(12)_4}{(33)_4} = \frac{(112)_4}{(313)_4} = \frac{(1112)_4}{(3113)_4} = \frac{(11112)_4}{(31113)_4} = \cdots,$$

$$\frac{(13)_4}{(32)_4} = \frac{(133)_4}{(332)_4} = \frac{(1333)_4}{(3332)_4} = \cdots, \qquad \frac{(21)_4}{(30)_4} = \frac{(231)_4}{(330)_4} = \frac{(2331)_4}{(3330)_4} = \frac{(23331)_4}{(33330)_4} = \cdots.$$

1.1.17. *Pewne równości w piątkowym systemie numeracji.*

$$\frac{(11)_5}{(20)_5} = \frac{(121)_5}{(220)_5} = \frac{(1221)_5}{(2220)_5} = \cdots, \qquad \frac{(12)_5}{(21)_5} = \frac{(132)_5}{(231)_5} = \frac{(1332)_5}{(2331)_5} = \frac{(13332)_5}{(23331)_5} = \cdots,$$

$$\frac{(12)_5}{(30)_5} = \frac{(132)_5}{(330)_5} = \frac{(1332)_5}{(3330)_5} = \cdots, \qquad \frac{(12)_5}{(41)_5} = \frac{(122)_5}{(421)_5} = \frac{(1222)_5}{(4221)_5} = \frac{(12222)_5}{(42221)_5} = \cdots,$$

$$\frac{(13)_5}{(31)_5} = \frac{(143)_5}{(341)_5} = \frac{(1443)_5}{(3441)_5} = \cdots, \qquad \frac{(22)_5}{(31)_5} = \frac{(242)_5}{(341)_5} = \frac{(2442)_5}{(3441)_5} = \frac{(24442)_5}{(34441)_5} = \cdots.$$

Stosując stwierdzenie 1.1.14 dla systemów numeracji o podstawach q będących potęgami dziesiątki, otrzymujemy nowe serie przykładów w systemie dziesiętnym.

1.1.18.

(1) $$\frac{144}{1035} = \frac{14544}{104535} = \frac{1454544}{10454535} = \frac{145454544}{1045454535} = \frac{14545454544}{104545454535} = \cdots,$$

(2) $$\frac{147}{224} = \frac{19047}{29024} = \frac{1909047}{2909024} = \frac{190909047}{290909024} = \frac{19090909047}{29090909024} = \cdots,$$

(3) $$\frac{3712}{3910} = \frac{374912}{394910} = \frac{37494912}{39494910} = \frac{3749494912}{3949494910} = \frac{374949494912}{394949494910} = \cdots.$$

1.1.19. *Dany jest ułamek* $\frac{1010\,1\,0101}{1100\,1\,0011}$ *zapisany w dowolnym systemie numeracji. Jeśli w liczniku i mianowniku środkową cyfrę* 1 *zastąpimy dowolną nieparzystą liczbą następujących po sobie jedynek, to ułamek ten nie zmieni wartości.* (N. Anning, [S64] 159).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2 Równości wynikające z twierdzenia Abela

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.2.1 (Twierdzenie Abela)**.** *Niech* $f(x)$ *i* $g(x)$ *będą niezerowymi wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Załóżmy, że* $\deg g(x) = n \geqslant 2$, $\deg f(x) \leqslant n-2$ *oraz, że wielomian* $g(x)$ *ma* n *parami różnych pierwiastków rzeczywistych* $a_1, \ldots, a_n$. *Wtedy*

$$\frac{f(a_1)}{g'(a_1)} + \frac{f(a_2)}{g'(a_2)} + \cdots + \frac{f(a_n)}{g'(a_n)} = 0,$$

gdzie $g'(x)$ *jest pochodną wielomianu* $g(x)$. ([InvM] 35(1976) 321-390, [Mon] 116(2009) 629-630).

Pewne dowody tego twierdzenia podane będą w [N12] (w rozdziale o funkcjach wymiernych). Teraz podamy tylko wnioski wynikające z tego twierdzenia.

1.2.2. *Jeśli a, b, c są parami różnymi liczbami rzeczywistymi (lub ogólniej, zespolonymi), to:*

(1) $$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0,$$

(2) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

D. Niech $f(x) = 1$, $h(x) = x$, $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. Wtedy $g'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$, $g'(a) = (a-b)(a-c)$, $g'(b) = (b-a)(b-c)$, $g'(c) = (c-a)(c-b)$. Na mocy twierdzenia Abela mamy:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \tfrac{1}{(b-a)(b-c)} + \tfrac{1}{(c-a)(c-b)} &= \tfrac{f(a)}{g'(a)} + \tfrac{f(b)}{g'(b)} + \tfrac{f(c)}{g'(c)} = 0 \\ \tfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \tfrac{b}{(b-a)(b-c)} + \tfrac{c}{(c-a)(c-b)} &= \tfrac{h(a)}{g'(a)} + \tfrac{h(b)}{g'(b)} + \tfrac{h(c)}{g'(c)} = 0 \end{aligned}$$

i to kończy dowód. ⊠

W podobny sposób wykazujemy następne równości.

1.2.3. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi liczbami to:*

(1) $$\tfrac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \tfrac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \tfrac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \tfrac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

(2) $$\tfrac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \tfrac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \tfrac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \tfrac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

(3) $$\tfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \tfrac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \tfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \tfrac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

1.2.4. $\sum\limits_{i=1}^{n} \left(a_i \prod\limits_{j \neq i} \frac{1}{a_i - a_j} \right) = 0$, *dla $n \geqslant 3$ i parami różnych liczb $a_1, \dots, a_n$.* ([Crux] 2000 s.486).

Można również udowodnić:

1.2.5. *Jeśli x, y, z są parami różnymi liczbami całkowitymi i n jest liczbą naturalną, to liczba*

$$\frac{x^n}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^n}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^n}{(z-x)(z-y)}$$

jest całkowita. ([Kurs] 175(1959), [Bryn] 1.1).

1.2.6. *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną oraz $a_1, \dots, a_n$ parami różnymi liczbami rzeczywistymi (lub zespolonymi), i niech $g(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Wtedy*

$$\frac{a_1^{n-1}}{g'(a_1)} + \frac{a_2^{n-1}}{g'(a_2)} + \cdots + \frac{a_n^{n-1}}{g'(a_n)} = 1, \qquad \frac{a_1^{n}}{g'(a_1)} + \frac{a_2^{n}}{g'(a_2)} + \cdots + \frac{a_n^{n}}{g'(a_n)} = a_1 + \cdots + a_n,$$

gdzie $g'(x)$ jest pochodną wielomianu $g(x)$.

Zanotujmy szczególne przypadki tego stwierdzenia.

1.2.7. *Jeśli a, b, c są parami różnymi liczbami, to:*

(1) $$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1,$$

(2) $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

1.2.8. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi liczbami, to:*

(1) $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 1,$$

(2) $$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d.$$

1.2.9. *Jeśli a, b, c, d są parami różnymi liczbami, to*

(1) $$\frac{a^4+1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4+1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4+1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4+1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = a+b+c+d,$$

([Crux] 2000 s.511 z.2487, wynika to z poprzednich równości).

(2) $$\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$ ([BaL] 145).

★ P. A. Griffiths, *Variations on a theorem of Abel*, [InvM] 35(1976) 321-390.
Shui-Hung Hou, *On a theorem of Abel*, [Mon] 116(2009) 629-630.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3 Następne równości z liczbami wymiernymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.3.1. $\frac{25-9}{10+6} = \frac{25}{10} - \frac{9}{6}$, $\frac{121-64}{55+40} = \frac{121}{55} - \frac{64}{40}$, $\frac{50-8}{5+2} = \frac{50}{5} - \frac{8}{2}$. ([Kw] 9/72 21).

1.3.2. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ *dla* $n \geqslant 2$. ([KoMe]).

1.3.3. $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ *dla* $n \geqslant 2$. ([GeG] 15, [KoMe]).

1.3.4. *Jeśli* $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) = 2$, *gdzie* $a \leqslant b \leqslant c$ *są liczbami naturalnymi, to* $(a,b,c) = (3,4,5)$, $(3,3,8)$, $(2,6,7)$, $(2,5,9)$ *lub* $(2,4,15)$. ([OM] W.Brytania 1995).

1.3.5. $\frac{1^4}{1\cdot 3} + \frac{2^4}{3\cdot 5} + \frac{3^4}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6(2n+1)}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. ([Mat] 3/52 49).

1.3.6. *Jeśli x, y, z, a, b, c są niezerowymi liczbami takimi, że $x+y+z = a+b+c = 0$, to*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{x^3+y^3+z^3} = \frac{abc}{xyz}.$$ ([Dlt] 4/1999).

D. Równość ta jest natychmiastową konsekwencją następującej implikacji:

$$u + v + w = 0 \Longrightarrow u^3 + v^3 + w^3 = 3uvw.$$

Jeśli bowiem $u+v+w = 0$, to $w = -(u+v)$ i wtedy: $u^3+v^3+w^3 = u^3+v^3-(u+v)^3 = -3uv^2-3u^2 = 3uv(-u-v) = 3uvw$. Wynika to również ze znanej równości

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu),$$

zachodzącej dla dowolnych liczb u, v, w. ⊠

1.3.7. *Jeśli* $x = \frac{b-c}{1+ab}$, $y = \frac{c-a}{1+ca}$, $z = \frac{a-b}{1+ab}$, *to* $x + y + z = xyz$. ([BaL] 146).

1.3.8. *Jeśli* $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$, $z = \frac{c-a}{c+a}$, *to* $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$. ([BaL] 154).

1.3.9. *Niech* $x = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $y = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $x + y + z = 1$, *to dwie z liczb* x, y, z *są równe* 1, *a pozostała* -1. ([OM] Leningrad 1982).

1.3.10. *Jeśli* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, *to* $\frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} = \frac{1}{(a+b+c)^{2n+1}}$. ([Oss] G75.2-5).

1.3.11. *Jeśli* $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ *oraz* $(p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, 0)$, *to*

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n = \frac{p_1a_1^n + p_2a_2^n + p_3a_3^n}{p_1b_1^n + p_2b_2^n + p_3b_3^n}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([OM] Kanada 1969).

1.3.12. $\dfrac{3^4 + 25^4 + 38^4}{7^4 + 20^4 + 39^4} = \dfrac{3 + 25 + 38}{7 + 20 + 39}$. ([Mat] 5-6/1955 64).

Istnieją różne inne równości podobnej postaci.

1.3.13 (Maple).

$\frac{1^2+4^2+13^2}{2^2+10^2+12^2} = \frac{1+4+13}{2+10+12}$, $\frac{3^2+7^2+8^2}{4^2+5^2+9^2} = \frac{3+7+8}{4+5+9}$, $\frac{5^2+11^2+20^2}{4^2+13^2+19^2} = \frac{5+11+20}{4+13+19}$;

$\frac{1^3+6^3+14^3}{7^3+8^3+15^3} = \frac{1+6+14}{7+8+15}$, $\frac{3^3+14^3+17^3}{9^3+10^3+19^3} = \frac{3+14+17}{9+10+19}$, $\frac{10^3+12^3+18^3}{11^3+14^3+17^3} = \frac{10+12+18}{11+14+17}$;

$\frac{2^3+4^3+16^3}{2^3+11^3+17^3} = \frac{2^2+4^2+16^2}{2^2+11^2+17^2}$, $\frac{5^3+14^3+15^3}{7^3+13^3+16^3} = \frac{5^2+14^2+15^2}{7^2+13^2+16^2}$,

$\frac{1^4+5^4+25^4}{1^4+10^4+26^4} = \frac{1+5+25}{1+10+26}$; $\frac{3^4+6^4+18^4}{5^4+16^4+17^4} = \frac{3+6+18}{5+16+17}$;

$\frac{1^4+9^4+10^4}{5^4+6^4+11^4} = \frac{1^2+9^2+10^2}{5^2+6^2+11^2}$; $\frac{2^4+15^4+17^4}{5^4+13^4+18^4} = \frac{2^2+15^2+17^2}{5^2+13^2+18^2}$; $\frac{3^4+13^4+16^4}{8^4+9^4+17^4} = \frac{3^2+13^2+15^2}{8^2+9^2+17^2}$;

$\frac{1^5+2^5+12^5}{4^5+9^5+13^5} = \frac{1+2+12}{4+9+13}$, $\frac{1^5+7^5+20^5}{1^5+18^5+19^5} = \frac{1+7+20}{1+18+19}$, $\frac{1^5+10^5+55^5}{14^5+45^5+59^5} = \frac{1+10+55}{14+45+59}$.

1.3.14. $\dfrac{8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2}{5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2} = 2$, $\dfrac{1968^2 + 1969^2 + 1970^2 + 1971^2 + 1972^2}{1391^2 + 1392^2 + 1393^2 + 1394^2 + 1395^2} = 2$.
([Szu87] 63).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.4 Całkowitość pewnych liczb wymiernych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Liczby $a = \sqrt{2}$ oraz $b = -\sqrt{2}$ nie są całkowite, a ich suma $a + b = 0$ i iloczyn $ab = -2$ są liczbami całkowitymi. Podobną własność mają liczby zespolone $a = i$ oraz $b = -i$. Wykażemy, że w zbiorze liczb wymiernych takich dwóch niecałkowitych liczb nie znajdziemy. W dowodzie tego faktu wykorzystamy następujące znane twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych.

1.4.1. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem monicznym (tzn. współczynnik wiodący jest równy 1) o współczynnikach całkowitych i niech u będzie liczbą wymierną. Jeśli u jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, to u jest liczbą całkowitą*

Teraz możemy udowodnić:

1.4.2. *Niech $a, b \in \mathbb{Q}$. Jeśli $a + b \in \mathbb{Z}$ i $ab \in \mathbb{Z}$, to $a, b \in \mathbb{Z}$.*

D. Rozpatrzmy wielomian $f(x) = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$. Jest to wielomian moniczny o współczynnikach całkowitych i jego pierwiastkami są liczby wymierne a i b. Z twierdzenia 1.4.1 wynika, że liczby a, b są całkowite. ⊠

1.4.3. *Niech $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Jeśli $a + b + c \in \mathbb{Z}$, $ab + bc + ca \in \mathbb{Z}$ i $abc \in \mathbb{Z}$, to $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

D. Rozpatrzmy wielomian $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$. Jest to wielomian moniczny o współczynnikach całkowitych i jego pierwiastkami są liczby wymierne a, b, c. Z twierdzenia 1.4.1 wynika, że liczby a, b, c są całkowite. ⊠

1.4.4. *Znaleźć takie trójki dodatnich liczb wymiernych (x, y, z), dla których wszystkie liczby*

$$x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad xyz$$

są naturalne. ([OM] Polska 1993/1994).

R. Jeśli (x, y, z) jest taką trójką, to x, y, z są liczbami naturalnymi. Wszystkie trójki (x, y, z) takie, że $x \geqslant y \geqslant z$: $(1,1,1)$, $(3,3,3)$, $(2,2,1)$, $(6,3,2)$, $(4,4,2)$. ⊠

1.4.5. *Niech $x = \dfrac{a^2-1}{b+1}$, $y = \dfrac{b^2-1}{a+1}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$. Jeśli $x + y$ jest liczbą całkowitą, to liczby x i y też są całkowite.* ([OM] St Petersburg 1993, [Fom] 17/93).

1.4.6. *Każda liczba $\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest całkowita.* ([OM] Australia 1994).

1.4.7. *Dla każdej liczby naturalnej n liczba*

$$\left(4 - \frac{2}{1}\right)\left(4 - \frac{2}{2}\right)\left(4 - \frac{2}{3}\right)\cdots\left(4 - \frac{2}{n}\right)$$

jest całkowita. ([OM] Czechy-Słowacja 1998/1999).

1.4.8. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczby* $\dfrac{21n-3}{4}$ *oraz* $\dfrac{15n+2}{6}$ *nie mogą być jednocześnie całkowite.* ([M-sj] 463).

1.4.9. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci $\frac{ab+1}{a+b}$, gdzie a, b są liczbami naturalnymi.* ([OM] Moskwa 1996/1997, [OM] Mołdawia 2001).

D. Niech $(a,b) = (2n-1, 2n+1)$ lub $(n+1, n^2+n-1)$. Wtedy $\frac{ab+1}{a+b} = n$. ⊠

1.4.10. *Każdą liczbę naturalną większą od 1 i nie będącą postaci $2^n + 2$ można przedstawić w postaci $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.* ([OM] Moskwa 2000/2001).

1.4.11. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć liczbę wszystkich par (x,y) , liczb naturalnych takich, że*

$$n = \frac{xy}{x+y}.$$

Przykłady: $1 = \frac{2\cdot 2}{2+2}$, $2 = \frac{3\cdot 6}{3+6} = \frac{4\cdot 4}{4+4} = \frac{6\cdot 3}{6+3}$. ([Putn] 1960).

R. Problem sprowadza się do opisu liczby rozwiązań naturalnych równania $(x-n)(y-n) = n^2$. Zachodzi jeden z przypadków: $(x-n<0, y-n<0)$ lub $(x-n>0, y-n>0)$.

Jeśli $x-n<0$ i $y-n<0$, to $1 \leqslant x < n$ i $1 \leqslant y < n$, stąd $-n < x-n < n$ i $-n < y-n < n$, czyli $|x-n| < n$ i $|y-n| < n$. W tym przypadku mamy sprzeczność: $n^2 = |x-n||y-n| < n^2$.

Niech $x-n>0$ i $y-n>0$. Niech (a,b) będzie dowolną parą liczb naturalnych takich, że $ab = n^2$. Przyjmijmy: $x := a+n$, $y := b+n$. Wtedy $(x-n)(y-n) = ab = n^2$. Każda więc taka para (a,b) wyznacza rozwiązanie naturalne rozpatrywanego równania. Takich par jest oczywiście tyle ile jest naturalnych dzielników liczby n^2.

Odpowiedź. Liczba wszystkich takich naturalnych par jest równa $\tau(n^2)$, gdzie $\tau(n^2)$ jest liczbą wszystkich dzielników naturalnych liczby n^2. Jeśli a jest dzielnikiem naturalnym liczby n^2, to $(x,y) = (n+a, n+n^2/a)$ jest rozwiązaniem naturalnym. Każde rozwiązanie jest tej postaci. ⊠

1.4.12. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci $\frac{a^2+b}{ab+1}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.*

D. Niech $n \in \mathbb{N}$, $a = n^2$, $b = n$. Wtedy $\frac{a^2+b}{ab+1} = \frac{n^4+n}{n^3+1} = n$. Liczba $n = 1$ ma nieskończenie wiele takich przedstawień: $1 = \frac{1^2+b}{1\cdot b+1}$ dla dowolnego b. ⊠

1.4.13. *Każdą liczbę naturalną większą od 1 można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$\frac{a^2+b}{ab+1},$$

gdzie a, b są liczbami naturalnymi. ([OM] Moskwa 2000/2001).

1.4.14. *Każdą liczbę naturalną można przedstawić w postaci $\frac{a^2+b}{ab+2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$.*

1.4.15. *Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $(a, n) \neq (1, 1)$. Równanie*

$$\frac{x^2 + y^2}{axy + 1} = n^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań naturalnych. ([Crux] 1990 s.172 z.1556).

1.4.16. *Jeśli $a \neq b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, to liczba*

$$\frac{2^{2n-1}(a^{2n} + b^{2n}) - (a+b)^{2n}}{(a-b)^2}$$

jest całkowita. ([OMm] 1997/1998).

1.4.17. *Liczba postaci $\frac{2a^2 - 1}{b^2 + 2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Z}$, nie jest całkowita.* ([IMO] Longlist 1992).

1.4.18. *Liczba postaci $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq b$, nie jest całkowita.* ([KoM] Gy1959).

1.4.19. *Niech $x, y \in \mathbb{C}$, $x \neq y$ oraz $a_n = \frac{x^n - y^n}{x - y}$. Jeśli jakieś cztery kolejne wyrazy ciągu (a_n) są liczbami całkowitymi, to wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.* ([OM] Rumunia 2002).

1.4.20. *Niech a, b będą liczbami naturalnymi i niech*

$$x_n = \left(a + \frac{1}{2}\right)^n + \left(b + \frac{1}{2}\right)^n.$$

W ciągu (x_n) jest tylko skończenie wiele liczb całkowitych. (Newman problem 30).

1.4.21. *Jeśli liczba $\frac{(m+3)^n + 1}{3m}$ jest całkowita, to jest nieparzysta.* ([IMO] 1967).

1.4.22. *Jeśli liczba $\frac{m^2 + n^2 + 1}{mn}$ jest całkowita, to jest równa 3.* ([LeH] A5).

1.4.23. *Jeśli liczba $\frac{m^2 + n^2 + 6}{mn}$ jest całkowita, to jest sześcianem liczby całkowitej.* ([OM] Estonia 1995/1996, [Crux] 2002 s.74).

1.4.24. *Istnieje nieskończenie wiele par (n, m) liczb naturalnych takich, że $1 < n < m$ i liczba $\frac{m^2 + n^2 - 1}{mn}$ jest całkowita.* ([Crux] z.1746).

1.4.25 ([Crux] 2001 z.2534 s.276-279)**.** *Oznaczmy:*

$$z_a(x,y) = \frac{x^2+y^2+a}{xy}.$$

Niech A będzie zbiorem tych wszystkich liczba całkowitych a, dla których liczba $z_a(x,y)$ jest całkowita dla nieskończenie wielu par (x,y) liczb naturalnych. Jeśli $a \in A$, to przez $E(a)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich liczb całkowitych postaci $z_a(x,y)$, $x,y \in \mathbb{N}$.

(1) *Niech $a \in \mathbb{Z}$. Jeśli istnieją liczby naturalne x, y takie, że liczba $z_a(x,y)$ jest całkowita, to takich par $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ jest nieskończenie wiele.*

(2) *Zbór A jest nieskończony. Każda liczba postaci $-d^2$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, należy do A. Mamy bowiem $z_{-d^2}(\lambda d, d) = \lambda$ dla wszystkich $\lambda \in \mathbb{N}$.*

(3) *Liczba* 0 *należy do A i $E(0) = \{2\}$.*

(4) *Jeśli $a = -d^2$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, to $a \in A$ i zbiór $E(a)$ jest nieskończony; jest nawet równy $\mathbb{N}$. Wynika to z* (2)*.*

(5) *Jeśli $a \in A$ i a nie jest postaci $-d^2$, gdzie $d \in \mathbb{N}$, to zbiór $E(a)$ jest skończony.*

(6) *Niech $a \in \mathbb{N}_0$. Niech $z_a(x,y) = \beta$, gdzie $x, y, \beta \in \mathbb{N}$. Wtedy $\beta \leqslant a + 2$.*

1.4.26. *Znaleźć wszystkie pary (m,n) liczb naturalnych, dla których $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ jest liczbą całkowitą.* Odp. $(2,2), (2,1), (1,2)$, $(3,1), (1,3)$, $(5,2), (2,5)$, $(5,3), (3,5)$. ([IMO] 1994).

1.4.27. *Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Jeśli $\frac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ jest liczbą całkowitą, to $(a,b) = (2n,1)$ lub $(n,2n)$ lub $(8n^4-n,2n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.* ([IMO] Shortlist 2003).

1.4.28. *Znaleźć wszystkie pary (x,y) liczb naturalnych, dla których liczby*

$$\frac{x+1}{y}, \quad \frac{y+1}{x}$$

są naturalne. Odp. $(3,2)$, $(2,3)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$. ([OM] Polska 1994/1995).

1.4.29. *Niech $a = \dfrac{(x+y+z)^2}{xyz}$, gdzie $x,y,z \in \mathbb{N}$. Jeśli a jest liczbą całkowitą, to $a = 1$, 2, $3, 4, 5, 6, 8$ lub 9 (a nie może być siódemką).* ([OM] Mongolia 2000).

1.4.30. *Jeśli p jest liczbą pierwszą i $n \in \mathbb{N}$, to liczba*

$$\frac{1}{1+1(p-1)} + \frac{2}{1+2(p-1)} + \cdots + \frac{n}{1+n(p-1)}$$

nie jest całkowita. ([Mon] 96(8)(1989) E3249).

★ Zagadnienia dotyczące całkowitości pewnych liczb wymiernych znajdziemy również w innych książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb". Przykłady:

Liczby postaci $(a^2+b^2)/(ab\pm 1)$ i ich uogólnienia, podrozdział w [N-3];
Jednorodne ciągi rekurencyjne, rozdział w [N-7];
Ciągi Somosa i ich uogólnienia, rozdział w [N-7];
Całkowitość wyrazów pewnych ciągów rekurencyjnych, rozdział w [N-7];
Liczby $\frac{n!+a}{n+a}$, podrozdział w [N11];
Całkowitość pewnych liczb wymiernych, podrozdział w [N11];
Symbole Newtona względem danego ciągu, rozdział w [N11].

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5 Wymierność pewnych liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.5.1. *Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = 1$. Jeśli liczby a^3 i b^3 są wymierne, to a i b też są liczbami wymiernymi.* ([OM] Polska 1994/1995).

1.5.2. *Jeśli a, b są różnymi liczbami zespolonymi takimi, że liczby $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^5 - b^5$ są wymierne, to a, b, c są liczbami wymiernymi.* ([MM] 73(4)(2000) 328).

1.5.3. *Istnieje nieskończenie wiele par (x, y) liczb wymiernych takich, że $x \neq y$ oraz $\sqrt{x^2 + y^3}$ i $\sqrt{x^3 + y^2}$ są liczbami wymiernymi.* ([OM] Niemcy 2003/2004).

1.5.4. *Niech $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Załóżmy, że $xy, yz, zx \in \mathbb{Q}$. Wtedy:*

(1) $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$;

(2) *jeśli $x^3 + y^3 + z^3 \in \mathbb{Q}$, to $x, y, z \in \mathbb{Q}$.* ([OM] Rumunia 2001).

1.5.5. *Dla każdej niewymiernej liczby a istnieją niewymierne liczby b, c takie, że liczby $a + b$, ac są wymierne i liczby ab, $a + c$ są niewymierne.* ([A-P] 2005).

1.5.6. *Niech x będzie taką liczbą rzeczywistą, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest wymierna. Wtedy każda liczba postaci $x^n + \frac{1}{x^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest wymierna.* ([G-if] 103, [N10]).

1.5.7. *Niech $0 < x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Jeśli liczby $x^k + \frac{1}{x^k}$ i $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ są wymierne, to $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą wymierną.* ([KoM] 2000(4) A238).

1.5.8. *Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, $ad \neq bc$. Istnieje nieskończenie wiele liczb wymiernych x takich, że $\sqrt{(a + bx)(c + dx)}$ jest liczbą wymierną.* ([MOc] 2002 z.144).

1.5.9. *Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to liczba $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ jest niewymierna.* ([Bedn] 178).

1.5.10. *Czy istnieje liczba naturalna n taka, że $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ jest liczbą wymierną ?* Odp. *Nie istnieje.* ([Balt] 1995).

1.5.11. *Niech p będzie liczbą pierwszą. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których liczba $\sqrt{n+p} + \sqrt{n}$ jest wymierna.* ([Bedn] 179).

O. Jeśli $p = 2$, to takiej liczby naturalnej n nie ma. Jeśli $p > 2$, to $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. ⊠

1.5.12. *Niech $x_1, \dots, x_n$ będą nieujemnymi liczbami wymiernymi. Jeśli liczba*

$$\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n}$$

jest wymierna, to liczby $\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}$ też są wymierne. ([Str1] s.98).

1.5.13. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli liczby $\cos(k\alpha)$ i $\cos((k+1)\alpha)$ są wymierne, to $\cos\alpha$ jest również liczbą wymierną.* ([N10]).

1.5.14. *Jeśli* $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, *to* $\cos n\alpha = \frac{a_n}{3^n}$, *gdzie* a_n *jest liczbą całkowitą niepodzielną przez* 3. ([Br83] 38).

1.5.15. *Jeśli* $\cos(\pi x) = \frac{1}{3}$, *to* x *jest liczbą niewymierną.* ([Br83] 15).

1.5.16. *Jeśli* $\cos(\pi x)$ *jest liczbą wymierną różną od* 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, *to* x *jest liczbą niewymierną.* ([Br83] 38).

1.5.17. *Niech* $r_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{5\pi}{7}$. *Wtedy:*

(1) $r_0 = 3$, $r_1 = 1/2$, $r_2 = 5/4$, $r_3 = 1/2$, $r_4 = 13/16$;

(2) $r_{n+3} = \frac{1}{2}r_{n+2} + \frac{1}{2}r_{n+1} - \frac{1}{8}r_n$;

(3) r_n *jest liczbą wymierną.* ([Kw] 8/1982 36).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6 Przedstawianie liczb wymiernych w szczególnej postaci

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.6.1. *Dowolny ułamek nieskracalny* p/q, *gdzie* p, q *są liczbami naturalnymi, przy czym* q *jest nieparzyste, można przedstawić w postaci*

$$\frac{n}{2^k - 1},$$

dla pewnych liczb naturalnych n *i* k. ([Balt] 1995).

1.6.2. *Każda liczba wymierna z odcinka* $(0,1)$ *o nieparzystym mianowniku jest postaci*

$$\left\{\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right\},$$

dla pewnych liczb naturalnych x, y, z, *gdzie* $\{a\}$ *oznacza część ułamkową liczby* a. ([KoM] 1997(7) N 146).

1.6.3. *Niech* $a \in \mathbb{N}$. *Każda liczba wymierna z odcinka* $(0,1)$ *jest skończonym iloczynem liczb postaci*

$$\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)},$$

gdzie $n > a$. ([Mon] 98(2)(1991) E3347).

1.6.4. *Każda liczba wymierna* $w \neq 1$ *ma nieskończenie wiele przedstawień w postaci*

$$w = \frac{x+1}{y+1},$$

gdzie x *i* y *są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi.* ([Wm] 7 37).

1.6.5. *Niech* $m \in \mathbb{N}$. *Każdą liczbę wymierną* $w > 1$ *można przedstawić w postaci*

$$w = \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k+s}\right),$$

gdzie k *jest liczbą naturalną* $> m$ *oraz* s *jest nieujemną liczbą całkowitą.* ([Mat] 1/58 60, [S64] 199).

1.6.6. *Każda liczba wymierna dodatnia w ma jednoznaczne przedstawienie w postaci*

$$w = a_1 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_k}{k!},$$

gdzie $a_1, a_2, \dots a_k$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi takimi, że $a_2 < 2$, $a_3 < 3, \dots, a_k < k$ oraz $a_k \neq 0$. ([Mon] 57(4)(1950) 262-264, [Mat] 1/80 62).

1.6.7. *Każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Przykłady:*

$$\frac{1}{2} = \frac{86^3+76^3}{129^3+15^3}, \quad \frac{1}{3} = \frac{34^3+20^3}{51^3+21^3}, \quad \frac{2}{3} = \frac{5^3+1^3}{5^3+4^3}, \quad \frac{3}{4} = \frac{7^3+2^3}{7^3+5^3}.$$

([IMO] Shortlist 1999, [Djmp] 303(646), [N-9]).

1.6.8. *Każda dodatnia liczba wymierna jest postaci $\dfrac{a^3+b^3}{c^3+d^3}$, gdzie a, b, c, d są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Różnych takich rozkładów jest nieskończenie wiele.* ([N-9]).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7 Podzbiory zbioru liczb wymiernych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.7.1. *Znaleźć wszystkie podzbiory $S \subseteq \mathbb{Q}$ spełniające następujące warunki:*

(1) *jeśli $a, b \in S$, to $a + b \in S$;*

(2) *jeśli a jest niezerową liczbą wymierną, to dokładnie jedna z liczb a i $-a$ należy do S.* ([Bryn] 2.1).

O. Są cztery takie podzbiory; zbiory wszystkich liczb wymiernych: dodatnich, nieujemnych, ujemnych, niedodatnich. ⊠

1.7.2. *Niech S będzie podzbiorem zbioru liczb wymiernych zawierającym $\frac{1}{2}$ i spełniającym warunek*

$$x \in S \Longrightarrow \tfrac{1}{x+1} \in S \quad i \quad \tfrac{x}{x+1} \in S.$$

Wtedy każda liczba wymierna z przedziału $(0, 1)$ należy do S. ([OM] W.Brytania 2005).

D. (Indukcja ze względu na mianowniki ułamków). Niech $n \geqslant 3$ i załóżmy, że każdy ułamek $\frac{a}{b}$ taki, że $b < n$ oraz $1 \leqslant a < b$, należy do S. Rozważmy ułamek $\frac{p}{n}$, gdzie $1 \leqslant p < n$. Niech $q = n - p$. Oczywiście $q < n$. Jeśli $p = q$, to $n = 2p$ i wtedy $\frac{p}{n} = \frac{1}{2} \in S$. Jeśli $p < q$, to (na mocy założenia) $x = \frac{p}{q} \in S$ i stąd $\frac{p}{n} = \frac{x}{x+1} \in S$. Jeśli $p > q$, to $x = \frac{q}{p} \in S$ i stąd $\frac{p}{n} = \frac{1}{x+1} \in S$. ⊠

1.7.3. *Podać przykład podpierścienia ciała $\mathbb{Q}$, różnego od $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$.*

R. Niech A będzie zbiorem wszystkich takich liczb wymiernych, których mianowniki są potęgami dwójki o nieujemnych wykładnikach. Ponieważ $a = \frac{a}{2^0}$, więc każda liczba całkowita należy do zbioru A. Ułamek $\frac{1}{2}$ nie jest liczbą całkowitą i jest elementem zbioru A. Zbiór A jest więc różny od zbioru $\mathbb{Z}$. Do zbioru A nie należy na przykład liczba wymierna $\frac{1}{3}$. Zatem $\mathbb{Z} \subsetneq A \subsetneq \mathbb{Q}$. Jest jasne, że jeśli $u, v \in \mathbb{A}$, to $u + v \in A$ oraz $uv \in A$. Zatem A jest podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Z} \subsetneq A \subsetneq \mathbb{Q}$. ⊠

Niech S będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Mówimy, że podzbiór ten jest *multyplikatywny*, jeśli do niego należy jedynka oraz spełniony jest warunek:

$$a, b \in S \Rightarrow ab \in S.$$

Podzbiorem multyplikatywnym jest na przykład zbiór wszystkich potęg dwójki o nieujemnych wykładnikach. Dwójkę można zastąpić dowolną liczbą naturalną a; zbiór wszystkich potęg liczby a o nieujemnych wykładnikach jest podzbiorem multyplikatywnym zbioru liczb naturalnych.

1.7.4. *Następujące zbiory S są multyplikatywnymi podzbiorami zbioru liczb naturalnych:*

(1) $S = \mathbb{N}$,

(2) $S = \{1\}$,

(3) *zbiór wszystkich nieparzystych liczb naturalnych;*

(4) *zbiór wszystkich takich liczb naturalnych, których reszta z dzielenia przez ustaloną liczbę naturalną m jest równa* 1;

(5) *zbiór wszystkich takich liczb naturalnych, które są względnie pierwsze z ustaloną liczbą naturalną m.*

Istnieją jeszcze liczne inne przykłady takich podzbiorów multyplikatywnych. Znajdziemy je na przykład w książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb".

Jeśli S jest dowolnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to przez $\mathbb{Z}_S$ oznaczać będziemy zbiór tych wszystkich liczb wymiernych, które można zapisać w postaci ułamka o mianowniku należącym do zbioru S, tzn.

$$\mathbb{Z}_S = \left\{ x \in \mathbb{Q};\ \underset{a \in \mathbb{Z}}{\exists}\ \underset{s \in S}{\exists}\ x = \frac{a}{s} \right\}.$$

Zanotujmy oczywiste stwierdzenie:

1.7.5. *Jeśli S jest podzbiorem multyplikatywnym zbioru liczb naturalnych, to $\mathbb{Z}_S$ jest podpierścieniem ciała $\mathbb{Q}$.*

Zauważmy, że $\mathbb{Z}_S = \mathbb{Z}$ dla $S = \{1\}$ oraz $\mathbb{Z}_S = \mathbb{Q}$ dla $S = \mathbb{N}$.

1.7.6. *Każdy podpierścień ciała $\mathbb{Q}$ jest postaci $\mathbb{Z}_S$, gdzie S jest pewnym podzbiorem multyplikatywnym zbioru liczb naturalnych.*

D. Niech A będzie dowolnym podpieścieniem ciała $\mathbb{Q}$. Oznaczmy przez S zbiór tych wszystkich takich liczb naturalnych, których odwrotności należą do A. Ponieważ $\frac{1}{1} = 1 \in A$, więc do S należy jedynka. Załóżmy, że a, b są liczbami naturalnymi należącymi do zbioru S. Wtedy $\frac{1}{a}, \frac{1}{b} \in A$ i stąd

$$\tfrac{1}{ab} = \tfrac{1}{a} \cdot \tfrac{1}{b} \in A,$$

a to oznacza, że $ab \in S$. Wykazaliśmy więc, że S jest podzbiorem multyplikatywnym zbioru liczb naturalnych. Teraz udowodnimy, że $\mathbb{Z}_S = A$.

Inkluzja $\mathbb{Z}_S \subseteq A$ jest oczywista. Dla wykazania inkluzji w przeciwnym kierunku załóżmy, że u jest elementem pierścienia A. Ponieważ $A \subseteq \mathbb{Q}$, więc u jest liczbą wymierną. Niech $u = \frac{a}{s}$, gdzie $a \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{nwd}(a, s) = 1$. Z warunku $\operatorname{nwd}(a, s) = 1$ wynika, że $1 = xa + ys$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Mamy zatem:

$$\frac{1}{s} = \frac{xa + ys}{s} = x\frac{a}{s} + y\frac{s}{s} = xu + y.$$

Ale $u \in A$ oraz $y \in A$ (bo każda liczba całkowita należy oczywiście do A). Zatem $\frac{1}{s} \in A$, a zatem $s \in S$. To implikuje, że $u = \frac{a}{s}$ jest elementem pierścienia $\mathbb{Z}_S$. Wykazaliśmy więc, że $A \subseteq \mathbb{Z}_S$. Zatem, $A = \mathbb{Z}_S$. ⊠

1.7.7. *Znaleźć najmniejszy podpierścień ciała $\mathbb{Q}$ zawierający ułamki $1/2$ i $1/3$.*

1.7.8. *Jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, to przez $\mathbb{Z}[a/b]$ oznaczamy najmniejszy podpierścień ciała $\mathbb{Q}$ zawierający liczbę a/b.*

(1) *Wykazać, że $\mathbb{Z}[2/7] = \mathbb{Z}[3/7]$.*

(2) *Wykazać, że jeśli $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ oraz $\operatorname{nwd}(a, b) = 1$, to $\mathbb{Z}[a/b] = \mathbb{Z}[1/b]$.*

★ F. L. Kluempen, D. M. Reboli, *When are two subgroups ot the rationals isomorphic ?*, [MM] 77(5)(2004) 374-379.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8 Dodatkowe fakty i zadania z liczbmi wymiernymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

1.8.1. *Funkcja $f(x) = \cos(x) + \cos(ax)$ jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy a jest liczbą wymierną.* ([Bedn] 152, [Kw] 5/1978 5).

1.8.2. *Niech a będzie dodatnią liczbą wymierną. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n istnieje dodatnia liczba wymierna b taka, że*

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}\right)^n = \sqrt{b} + \sqrt{b+1}.$$ ([MM] 31(3)(1950) 165-169).

1.8.3. *Dla dowolnych liczb naturalnych m, n istnieje liczba naturalna k taka, że*

$$\left(\sqrt{m} + \sqrt{m-1}\right)^n = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}.$$ ([Crux] 1996 s.142).

1.8.4. *Niech $S = \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $f : S \to S$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Wtedy $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S) = \emptyset$.* ([Putn] 2001).

1.8.5. *Jedyną funkcją $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ taką, że $f(1) = 2$ oraz*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{Q},$$

jest funkcja $f(x) = x + 1$. ([Bryn] 6.1).

1.8.6. *Funkcja* $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *spełnia następujące własności:*

(1) $f(a, b) = f(b, a)$,

(2) $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$,

(3) $f(0, 0) = 0$,

(4) $f(a + c, b + c) = f(a, b) + c$,

dla wszystkich $a, b, c \in \mathbb{Q}$. *Wykazać, że* $f(a, b) = \max(a, b)$ *dla wszystkich* $a, b \in \mathbb{Q}$ *lub* $f(a, b) = \min(a, b)$ *dla wszystkich* $a, b \in \mathbb{Q}$. (H. Derksen 1997).

★ W. N. Wagutien, *O ułamkach Farey'a*, [Kw] 8/75 33-39.
N. J. Wilenkin, *Z historii ułamków*, [Kw] 5/87 34-36.
P. W. Śniady, *Teoria liczb i geometria*, (o ułamkach Farey'a), [Dlt] 4/95 1-3.
J. Wróblewski, *Własności przystawania liczb wymiernych i zespolonych*, [Mat] 2/80 113-116.

Literatura

[A-P] Asian Pacific Mathematical Olympiad.

[BaL] I. W. Baranowa, C. E. Lapin, *Zadania z Algebry* (po rosyjsku), Leningrad, 1954.

[Balt] Zawody Matematyczne Państw Bałtyckich.

[Bedn] W. Bednarek, *Zbiór Zadań dla Uczniów Lubiących Matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk, 1995.

[Br83] J. Browkin, *Zbiór Zadań z Olimpiad Matematycznych*, tom 6, 26-30, 74/75 - 78/79, WSiP, Warszawa, 1983.

[Bryn] M. Bryński, *Olimpiady Matematyczne*, tom 7, 31-35, 79/80 - 83/84, WSiP, Warszawa, 1995.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Djmp] D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović, *The IMO Compendium. A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2006.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Fom] D. W. Fomin, *Sankt-Petersburskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), Politechnika, Sankt-Petersburg, 1994.

[G-if] S. A. Genkin, I. W. Itenberg, D. W. Fomin, *Leningradzkie Kółka Matematyczne* (po rosyjsku), Kirow, ASA, 1994.

[GeG] S. I. Gelfand, M. L.Gerwer, A. A. Kiryłow, N. N. Konstantinow, A. G. Kusznirenko, *Zadania z elementarnej matematyki, Ciągi, Kombinatoryka, Granice* (po rosyjsku), Nauka, Moskwa, 1965.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[InvM] Inventiones Mathematicae, (Invent. math.), Journal, Springer.

[KoM] KöMal, Kozepiskolai Matematikai Lapok, węgierskie czasopismo matematyczne, 1894-2009.

[KoMe] J.-M. De Koninck, A. Mercier, 1001 *Problémes en Théorie Classique des Nombres*, Ellipses, 2004.

[Kurs] J. Kürschak, *Węgierskie Olimpiady Matematyczne* (po rosyjsku), MIR, Moskwa, 1976.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[LeH] H. Lee, *Problems in Elementary Number Theory*, Version 08, Internet 2003.

[M-sj] The Mathematics Student Journal.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[MM] Mathematics Magazine, popularne czasopismo matematyczne.

[MOc] Mathematical Olympiads' Correspondence Program, Canada, 1997-2010.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2009.

[N-7] A. Nowicki, *Ciągi Rekurencyjne*, Podróże po Imperium Liczb, cz.7, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[N-9] A. Nowicki, *Sześciany, Bikwadraty i Wyższe Potęgi*, Podróże po Imperium Liczb, cz.9, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[N10] A. Nowicki, *Liczby i Funkcje Rzeczywiste*, Podróże po Imperium Liczb, cz.10, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[N11] A. Nowicki, *Silnie i Symbole Newtona*, Podróże po Imperium Liczb, cz.11, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[N12] A. Nowicki, *Wielomiany*, Podróże po Imperium Liczb, cz.12, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2011.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[OMm] Mała Olimpiada Matematyczna.

[Oss] Onatari Secondary School Mathematics Bulletin.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[Str1] S. Straszewicz, *Zadania z Olimpiad Matematycznych*, tom II, 6-10, 54/55 - 58/59, PZWS, Warszawa, 1961.

[Szu87] M. Szurek, *Opowieści Matematyczne*, WSiP, Warszawa, 1987.

[Wm] Wiadomości Matematyczne, Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, 1956-2011.