Podróże po Imperium Liczb

Część 01. Liczby Wymierne

Rozdział 9

9. Liczby postaci $x_1/x_2 + x_2/x_3 + \cdots + x_s/x_1$

Andrzej Nowicki 7 grudnia 2011, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

9 Liczby postaci $x_1/x_2 + x_2/x_3 + \cdots + x_s/x_1$

Niech $s \in \mathbb{N}$. Interesować nas będą dodatnie liczby wymierne postaci

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1},$$

gdzie $x_1, x_2, \ldots, x_s$ są liczbami naturalnymi. Zbiór wszystkich takich dodatnich liczb wymiernych oznaczać będziemy przez B_s. W szczególności interesować nas będą liczby naturalne tej postaci. Zbiór wszystkich takich liczb naturalnych oznaczać będziemy przez A_s. Mamy więc $A_s = B_s \cap \mathbb{N}$, $A_1 = B_1 = \{1\}$ oraz

$$B_s = \left\{ q \in \mathbb{Q}^+; \underset{x_1,\ldots,x_s \in \mathbb{N}}{\exists} q = \tfrac{x_1}{x_2} + \tfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \tfrac{x_s}{x_1} \right\},$$

$$A_s = \left\{ n \in \mathbb{N}; \underset{x_1,\ldots,x_s \in \mathbb{N}}{\exists} n = \tfrac{x_1}{x_2} + \tfrac{x_2}{x_3} + \cdots + \tfrac{x_s}{x_1} \right\},$$

dla $s \geqslant 2$. Przez $\mathbb{Q}^+$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb wymiernych większych od zera.

9.1 Podstawowe własności zbiorów $\mathbf{B}_s$ i $\mathbf{A}_s$

9.1.1. *Niech $s \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Q}^+$. Jeśli $q \in B_s$, to $q \geqslant s$. W szczególności, jeśli liczba naturalna n należy do zbioru A_s, to $n \geqslant s$.*

D. Niech $q \in B_s$. Wtedy $q = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, dla pewnych $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{N}$. Z nierówności pomiędzy średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_s}{x_1}$ otrzymujemy:

$$q = s \cdot \tfrac{1}{s}\left(\tfrac{x_1}{x_2} + \tfrac{x_2}{x_3} \cdots + \tfrac{x_s}{x_1}\right) \geqslant s \cdot \sqrt[s]{\tfrac{x_1}{x_2}\tfrac{x_2}{x_3} \cdots \tfrac{x_s}{x_1}} = s \cdot \sqrt[s]{1} = s.$$

Zatem $q \geqslant s$. Stąd oraz z faktu, że $A_s = B_s \cap \mathbb{N}$ wynika, że jeśli $n \in A_s$, to $n \geqslant s$. ⊠

9.1.2. *Niech $s \in \mathbb{N}$. Wtedy $s \in A_s$. Jeśli $x_1, \ldots, x_s$ są liczbami naturalnymi takimi, że $s = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, to $x_1 = x_2 = \cdots = x_s$.*

D. Liczba s należy do A_s, gdyż $s = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, dla $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 1$. Załóżmy teraz, że $s = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, gdzie $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{N}$. Wtedy średnia arytmetyczna liczb $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_3}, \ldots, \frac{x_s}{x_1}$, jest równa średniej geometrycznej tych liczb. Wszystkie więc te liczby są jednakowe. Niech $a = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_s}{x_1}$. Wtedy $s = sa$, więc $a = 1$ i stąd $x_1 = x_2 = \cdots = x_s$. ⊠

9.1.3. *Niech $s \in \mathbb{N}$. Jeśli $x_1, \ldots, x_s$ są liczbami naturalnymi takimi, że $s = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$ oraz* $\operatorname{nwd}(x_1, \ldots, x_s) = 1$, *to $x_1 = x_2 = \cdots = x_s = 1$.* (Wynika z 9.1.2).

9.1.4 (Bondarenko 2000)**.** *Każda liczba naturalna $n \geqslant 12$ należy do zbioru A_{12}.* ([Bond]).

9.1.5. *Niech $s \geqslant 2$. Jeśli q jest dodatnią liczbą wymierną, to następujące warunki są równoważne.*

(1) $q \in B_s$.

(2) $q = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, *dla pewnych $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N}$ takich, że* $\mathrm{nwd}(x_1, \dots, x_s) = 1$.

(3) $q = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1}$, *dla pewnych $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^+$.*

(4) $q = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$, *dla pewnych $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{Q}^+$ takich, że $u_1 u_2 \cdots u_s = 1$.*

D. (1) $\iff$ (2). Załóżmy, że $q \in B_s$. Niech $q = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_s}{a_1}$, gdzie $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{N}$. Niech $d = \mathrm{nwd}(a_1, \dots, a_s)$. Istnieją wtedy liczby naturalne $x_1, \dots, x_s$ takie, że $a_1 = x_1 d, a_2 = x_2 d, \dots, a_s = x_s d$. Wtedy $\mathrm{nwd}(x_1, \dots, x_n) = 1$ oraz $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1} = \frac{x_1 d}{x_2 d} + \frac{x_2 d}{x_3 d} + \cdots + \frac{x_s d}{x_1 d} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_s}{a_1} = q$. Wykazaliśmy więc implikację (1) $\Rightarrow$ (2). Implikacja (2) $\Rightarrow$ (1) jest oczywista.

(1) $\iff$ (3). Jest oczywiste, że zachodzi implikacja (1) $\Rightarrow$ (3). Wykażemy implikację (3) $\Rightarrow$ (1). Niech $q = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1}$, gdzie $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^+$. Niech d będzie wspólnym mianownikiem wszystkich liczb wymiernych $y_1, \dots, y_s$. Wtedy $y_1 = \frac{x_1}{d}, y_2 = \frac{x_2}{d}, \dots, y_s = \frac{x_s}{d}$, dla pewnych $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1} = \frac{x_1/d}{x_2/d} + \frac{x_2/d}{x_3/d} + \cdots + \frac{x_s/d}{x_1/d} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1} = q$. Zatem $q \in B_s$.

(3) $\iff$ (4). Załóżmy, że $q = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1}$, gdzie $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^+$. Niech $u_1 = \frac{y_1}{y_2}$, $u_2 = \frac{y_2}{y_3}, \dots,$ $u_s = \frac{y_s}{y_1}$. Wtedy $u_1, \dots, u_s$ są dodatnimi liczbami wymiernymi, $u_1 \cdots u_s = 1$ oraz $q = u_1 + \cdots + u_s$. Wykazaliśmy więc implikację (1) $\Rightarrow$ (4).

Niech teraz $q = u_1 + \cdots + u_s$, gdzie $u_1, \dots, u_s$ są dodatnimi liczbami wymiernymi takimi, że $u_1 \cdots u_s = 1$. Niech

$$y_1 = 1,\ y_2 = \tfrac{1}{u_1},\ y_3 = \tfrac{1}{u_1 u_2},\ \dots,\ y_{s-1} = \tfrac{1}{u_1 u_2 \cdots u_{s-2}},\ y_s = \tfrac{1}{u_1 u_2 \cdots u_{s-1}}.$$

Wtedy $\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_s = q$. ⊠

Jeśli w 9.1.5 założymy dodatkowo, że q jest liczbą naturalną, to otrzymamy następujące twierdzenie.

9.1.6. *Niech $s \geqslant 2$. Jeśli n jest liczbą naturalną, to następujące warunki są równoważne.*

(1) $n \in A_s$.

(2) $n = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_s}{x_1}$, *dla pewnych $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{N}$ takich, że* $\mathrm{nwd}(x_1, \dots, x_s) = 1$.

(3) $n = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1}$, *dla pewnych $y_1, \dots, y_s \in \mathbb{Q}^+$.*

(4) $n = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$, *dla pewnych $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{Q}^+$ takich, że $u_1 u_2 \cdots u_s = 1$.*

Następne fakty są wnioskami z twierdzeń 9.1.5 i 9.1.6.

9.1.7. *Każda liczba postaci $\frac{x_1^s + x_2^s + \cdots + x_s^s}{x_1 x_2 \cdots x_s}$, gdzie $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{Q}^+$, należy do zbioru B_s.*

D. Oznaczmy: $q = \frac{x_1^s + x_2^s + \cdots + x_s^s}{x_1 x_2 \cdots x_s}$, gdzie $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{Q}^+$. Pokażemy, że $q \in B_s$.

(Sposób I). Niech $u_i = \frac{x_i^s}{x_1 x_2 \cdots x_s}$, dla $i = 1, \dots, s$. Wtedy $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{Q}^+$, $u_1 u_2 \cdots u_s = 1$ oraz $q = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$. Teza wynika zatem z twierdzenia 9.1.5.

(Sposób II). Oznaczmy $w = x_1 x_2 \cdots x_s$ i niech $y_i = \frac{1}{w}\left(x_i^s x_{i+1}^{s-1} x_{i+2}^{s-2} \cdots x_{i+s-2}^2 x_{i+s-1}^1\right)$, dla $i = 1, 2, \dots, s$ przy czym $x_{s+j} = x_j$ dla $j \in \mathbb{N}$. Wtedy $y_1, \dots, y_s$ są liczbami naturalnymi oraz $\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \cdots + \frac{y_s}{y_1} = \frac{x_1^s + x_2^s + \cdots + x_s^s}{x_1 x_2 \cdots x_s} = q$. Zatem $q \in B_s$. ⊠

9.1.8. *Niech $s \geqslant 2$. Każda liczba postaci $\frac{x_1^{s-1}x_2+x_2^{s-1}x_3+\cdots+x_{s-1}^{s-1}x_s+x_s^{s-1}x_1}{x_1x_2\cdots x_s}$, gdzie $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{Q}^+$, należy do zbioru B_s.*

D. Oznaczmy: $q = \frac{x_1^{s-1}x_2+x_2^{s-1}x_3+\cdots+x_{s-1}^{s-1}x_s+x_s^{s-1}x_1}{x_1x_2\cdots x_s}$, gdzie $x_1, \ldots, x_s \in \mathbb{Q}^+$. Niech $u_i = \frac{x_i^{s-1}x_{i+1}}{x_1x_2\cdots x_s}$, dla $i = 1, \ldots, s$, przy czym $x_{s+1} = x_1$. Wtedy $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{Q}^+$, $u_1u_2\cdots u_s = 1$ oraz $q = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$. Teza wynika zatem z twierdzenia 9.1.5. ⊠

9.1.9. *$B_n + B_m \subseteq B_{n+m}$, dla $n, m \in \mathbb{N}$.*

D. Niech $a \in B_n$, $b \in B_m$. Pokażemy, że $a + b \in B_{n+m}$.

(Sposób I). Z twierdzenia 9.1.5 wynika, że istnieją dodatnie liczby wymierne $u_1, \ldots, u_n$ oraz $v_1, \ldots, v_m$ takie, że $u_1 \cdots u_n = 1$, $v_1 \cdots v_m = 1$, $a = u_1 + \cdots u_n$ i $b = v_1 + \cdots + v_m$. Wtedy $u_1u_2\cdots u_nv_1v_2\cdots v_m = 1$ oraz $a + b = u_1 + \cdots + u_n + v_1 + \cdots v_m$. Teza wynika więc z twierdzenia 9.1.5.

(Sposób II). Istnieją liczby naturalne $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ takie, że $a = \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_1}$, $b = \frac{y_1}{y_2} + \cdots \frac{y_m}{y_1}$. Mamy wtedy

$$a + b = \frac{x_1y_1}{x_2y_1} + \frac{x_2y_1}{x_3y_1} + \cdots + \frac{x_ny_1}{x_1y_1} + \frac{y_1x_1}{y_2x_1} + \frac{y_2x_1}{y_3x_1} + \cdots \frac{y_mx_1}{y_1x_1}.$$

Zatem $a + b \in B_{n+m}$. ⊠

9.1.10. *$B_mB_n \subseteq B_{mn}$, dla $n, m \in \mathbb{N}$.*

D. Niech $a \in B_m$, $b \in B_n$. Pokażemy, że $ab \in B_{nm}$.

(Sposób I). Z twierdzenia 9.1.5 wynika, że istnieją dodatnie liczby wymierne $u_1, \ldots, u_m$ oraz $v_1, \ldots, v_n$ takie, że $u_1 \cdots u_m = 1$, $v_1 \cdots v_n = 1$, $a = u_1 + \cdots u_m$ i $b = v_1 + \cdots + v_n$. Niech $w_{ij} = u_iv_j$, dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Iloczyn wszystkich liczb postaci w_{ij} jest równy 1 i ich suma wynosi ab. Teza wynika więc z twierdzenia 9.1.5.

(Sposób II). Istnieją liczby naturalne $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ takie, że $a = \frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_m}{x_1}$, $b = \frac{y_1}{y_2} + \cdots \frac{y_n}{y_1}$. Przyjmijmy:

$$z_{(p-1)n+i} = \left(x_p^{n-i+1}x_{p+1}^{i-1}\right)y_i,$$

dla $p = 1, 2, \ldots, m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, przy czym $x_{m+1} = x_1$. Mamy wtedy mn liczb naturalnych $z_1, z_2, \ldots, z_{mn}$. Zauważmy, że $\frac{z_{(p-1)n+i}}{z_{(p-1)n+i+1}} = \frac{x_p}{x_{p+1}}\frac{y_i}{y_{i+1}}$, dla $p = 1, 2, \ldots, m$ oraz $i < n$. Ponadto, $\frac{z_{(p-1)n+n}}{z_{pn+1}} = \frac{x_p}{x_{p+1}}\frac{y_n}{y_1}$, dla $p = 1, 2, \ldots, m$. Stąd wynika, że

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \cdots + \frac{z_{mn}}{z_1} = \left(\frac{x_1}{x_2} + \cdots + \frac{x_m}{x_1}\right)\left(\frac{y_1}{y_2} + \cdots + \frac{y_n}{y_1}\right) = ab.$$

Zatem $ab \in B_{mn}$. ⊠

Z powyższych faktów wynika:

9.1.11. *$A_m + A_n \subseteq A_{m+n}$, $A_mA_n \subseteq A_{mn}$, dla $m, n \in \mathbb{N}$.*

9.1.12. *Jeśli $q \in B_s$, to $q + 1 \in B_{s+1}$. Jeśli $n \in A_s$, to $n + 1 \in A_{s+1}$.*

★ Klaudia Kubiak, *Twierdzenia Bondarenki i Rusina o sumach liczb wymiernych*, [Pmgr] 2009.

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2 Zbiór B_2

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.2.1. *Jedyną liczbą naturalną n należącą do zbioru B_2 jest $n = 2$. Innymi słowy: $A_2 = \{2\}$.*

D. Niech $n \in A_2 = B_2 \cap \mathbb{N}$. Niech $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, gdzie $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Wtedy $x^2 + y^2 = nxy$. Przypuśćmy, że $x \geqslant 2$. Istnieje wtedy liczba pierwsza p taka, że $p \mid x$. Wtedy prawa strona równości $x^2 + y^2 = nxy$ jest podzielna przez p, więc (ponieważ $p \mid x^2$ i $p \mid x^2 + y^2$) liczba y również jest podzielna przez p. To jest jednak sprzecznością, gdyż $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Zatem $x = 1$ i analogicznie $y = 1$. Stąd $n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$. ⊠

9.2.2. *Niech p będzie liczbą pierwszą i n liczbą naturalną. Liczba $\frac{n}{p}$ należy do zbioru B_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 2p$ lub $n = p^2 + 1$.*

D. Oczywiście liczby $\frac{2p}{p} = 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$ i $\frac{p^2+1}{p} = \frac{p}{1} + \frac{1}{p}$ należą do B_2. Pokażemy, że innych tego typu liczb w zbiorze B_2 nie ma.

Załóżmy, że $\frac{n}{p} \in B_2$. Niech $\frac{n}{p} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy}$, gdzie $x, y \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Wtedy

$$p(x^2 + y^2) = nxy.$$

Załóżmy najpierw, że $p \mid n$. Niech $n = pa$, $a \in \mathbb{N}$. Wtedy $x^2 + y^2 = axy$, więc $a = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \in A_2$. Ale $A_2 = \{2\}$, więc $a = 2$. Jeśli więc $p \mid n$, to $n = 2p$.

Załóżmy teraz, że $p \nmid n$. Wtedy $p \mid xy$, więc $p \mid x$ lub $p \mid y$. Dla ustalenia uwagi niech $p \mid x$. Wtedy $p \nmid y$, gdyż $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Niech $x = p^\alpha a$, $a \in \mathbb{N}$, $p \nmid a$, $\alpha \geqslant 1$. Wtedy $p^{2\alpha+1}a^2 + py^2 = np^\alpha ay$. Stąd wynika, że $\alpha = 1$ (bowiem gdy $\alpha \geqslant 2$, to mamy sprzeczność z tym, że $p \nmid y$). Zatem $(pa)^2 + y^2 = nay$ Przypuśćmy, że $a \geqslant 2$. Niech q będzie liczbą pierwszą dzielącą a. Wtedy z równości $(pa)^2 + y^2 = nay$ wynika, że $q \mid y$; wbrew temu, że $\mathrm{nwd}(x, y) = 1$. Zatem $a = 1$, tzn. $x = p$. Mamy więc $p^2 + y^2 = ny$, $p \nmid n$, $p \nmid y$. Jeśli $y \geqslant 2$, to mamy oczywistą sprzeczność. Zatem $y = 1$ i stąd $n = p^2 + 1$. ⊠

9.2.3. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczba $\frac{n}{2}$ należy do zbioru B_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 4$ lub $n = 5$.*
(Wynika z 9.2.2 dla $p = 2$).

9.2.4. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Liczba $\frac{n}{3}$ należy do zbioru B_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 6$ lub $n = 10$.*
(Wynika z 9.2.2 dla $p = 3$).

9.2.5. *Niech p będzie liczbą pierwszą oraz $s, n \in \mathbb{N}$, $p \nmid n$. Liczba $\frac{n}{p^s}$ należy do zbioru B_2 wtedy i tylko wtedy, gdy $n = p^{2s} + 1$.*

D. Jeśli $n = p^{2s} + 1$, to $\frac{n}{p^s} \in B_2$, gdyż wtedy $\frac{n}{p^s} = \frac{p^{2s}+1}{p^s} = \frac{p^s}{1} + \frac{1}{p^s}$. Załóżmy teraz, że $\frac{n}{p^s} \in B_2$ i niech x, y będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi takimi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{n}{p^s}$. Wtedy

$$p^s(x^2 + y^2) = nxy. \tag{1}$$

Ponieważ $p \nmid n$, więc $p \mid x$ lub $p \mid y$. Zmieniając ewentualnie kolejność występowania liczb x, y, możemy założyć, że $p \mid x$. Wtedy $p^s \mid x$ oraz $p \nmid y$. Niech $x = p^t u$, $u \in \mathbb{N}$, $p \nmid u$, $t \geqslant s$. Jeśli $t > s$, to prawa strona równości (1) jest podzielna przez p i lewa strona tej równości nie jest podzielna przez p. Zatem $t = s$ i mamy $p^{2s}u^2 + y^2 = nuy$. Jeśli $u \geqslant 2$, to istnieje liczba pierwsza q dzieląca u i wtedy z równości

$p^{2s}u^2 + y^2 = nuy$ wynika, że $q \mid y$ wbrew temu, że $\text{nwd}(x, y) = 1$. Zatem $u = 1$, czyli $x = p^s$. Mamy więc równość $p^{2s} + y^2 = ny$. Jeśli $y \geqslant 2$, to mamy oczywistą sprzeczność z tym, że $\text{nwd}(x, y) = 1$. Zatem $y = 1$. Ostatecznie $n = p^{2s} + 1$. ⊠

9.2.6. *Niech a, b, c, d będą liczbami naturalnymi takimi, że $a \leqslant b$, $c \leqslant d$, $\text{nwd}(a, b) = 1$ oraz $\text{nwd}(c, d) = 1$. Jeśli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}$, to $a = c$ i $b = d$.*

D. Załóżmy, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{c}{d} + \frac{d}{c}$. Wtedy $cd(a^2 + b^2) = ab(c^2 + d^2)$. Ponieważ $\text{nwd}(a, b) = 1$ i $\text{nwd}(c, d) = 1$, więc $\text{nwd}(ab, a^2 + b^2) = 1$ i $\text{nwd}(cd, c^2 + d^2) = 1$. Zatem $ab \mid cd$ i $cd \mid ab$, czyli $ab = cd$ i stąd $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Stąd dalej mamy: $(b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2 = d^2 - 2cd + c^2 = (d - c)^2$, czyli $b - a = d - c = u$, gdzie $u \geqslant 0$. Zatem $b = a + u$, $d = c + u$. Ale $ab = cd$, więc $a^2 + ua = c^2 + cu$ i stąd $(a - c)(a + c + u) = 0$. Ponieważ $a + c + u > 0$, więc $a = c$ i stąd wynika, że $b = d$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.3 Zbiór B$_3$ i liczby $(a^3 + b^3 + c^3)/abc$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że B_3 jest zbiorem wszystkich dodatnich liczb wymiernych $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{N}$, natomiast A_3 jest zbiorem wszystkich naturalnych liczb tej postaci. Wiemy już, że $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$. Oczywiście $3 \in A_3$. Do zbioru A_3 należą również inne liczby naturalne, na przykład $5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{1}$ lub $6 = \frac{2}{12} + \frac{12}{9} + \frac{9}{2}$. Wykażemy w następnym podrozdziale, że zbiór A_3 jest nieskończony. W tym podrozdziale wykażemy, że dodatnia liczba wymierna q należy do zbioru B_3 wtedy i tylko wtedy, gdy $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ dla pewnych liczb naturalnych a, b, c.

9.3.1. *Niech q będzie liczbą wymierną taką, że $x^2z + y^2x + z^2y = qxyz$, dla pewnych liczb całkowitych x, y, z. Niech*

$$\begin{aligned}
a &= xyz(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz - xy), \\
b &= (xz + yz + xy)(x^2y^2 + z^2x^2 + y^2z^2 - y^2zx - yzx^2 - z^2yx), \\
c &= (x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4) - xyz(x^2y + y^2z + z^2x).
\end{aligned}$$

Wtedy a, b, c są liczbami całkowitymi takimi, że $a^3 + b^3 + c^3 = qabc$. ([BrG], [Rus1]).

D. Standardowy rachunek; sprawdziłem to za pomocą Maple. ⊠

9.3.2. *Zachodzi równość zbiorów:*

$$B_3 = \left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x};\ x, y, z \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{a^3+b^3+c^3}{abc};\ a, b, c \in \mathbb{N} \right\}.$$

([BrG], [Rus1]).

D. Oznaczmy zbiór po prawej stronie przez C_3. Inkluzja $C_3 \subseteq B_3$ wynika z 9.1.7. Niech $q \in B_3$, niech $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, gdzie $x, y, z \in \mathbb{N}$. Możemy założyć, że $\text{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli $x = y = z = 1$, to $q = 3$ i wtedy $3 = \frac{1^3+1^3+1^3}{1\cdot 1\cdot 1}$. Dalej możemy więc założyć, że $(x, y, z) \neq (1, 1, 1)$. Z równości $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ wynika, że $x^2z + y^2x + z^2y = qxyz$. Zatem $a^3 + b^3 + c^3 = qabc$, gdzie liczby a, b, c są zdefiniowane w twierdzeniu 9.3.1. Korzystając z klasycznych nierówności łatwo stwierdzamy, że $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zatem $q \in C_3$ i tym samym wykazaliśmy, że $B_3 \subseteq C_3$. Ostatecznie $B_3 = C_3$. ⊠

Z powyższych faktów otrzymujemy:

9.3.3 (Erdös, Niven 1946). *Niech q będzie dodatnią liczbą wymierną. Następujące warunki są równoważne.*

(1) $q \in B_3$ *tzn. istnieją liczby naturalne x, y, z takie, że* $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

(2) *Istnieją liczby naturalne x, y, z takie, że* $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *oraz* $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$.

(3) *Istnieją dodatnie liczby wymierne x, y, z takie, że* $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

(4) *Istnieją dodatnie liczby wymierne a, b, c takie, że* $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

(5) *Istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że* $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

(6) *Istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że* $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ *oraz* $\mathrm{nwd}(a, b, c) = 1$.

([BrG], [Rus1]).

9.3.4. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) $n \in A_3$ *tzn. istnieją liczby naturalne x, y, z takie, że* $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

(2) *Istnieją liczby naturalne x, y, z takie, że* $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *oraz* $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$.

(3) *Istnieją dodatnie liczby wymierne x, y, z takie, że* $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

(4) *Istnieją dodatnie liczby wymierne a, b, c takie, że* $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

(5) *Istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że* $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

(6) *Istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że* $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ *oraz* $\mathrm{nwd}(a, b, c) = 1$.

(7) *Istnieją parami względnie pierwsze liczby naturalne a, b, c takie, że* $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$.

([Mon] 53(4)(1946) 223-224, [BrG], [Bond], [Rus1]).

9.3.5 (Erdös, Niven 1946). *Niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że liczba* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *jest naturalna oraz* $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$. *Niech* $a = \mathrm{nwd}(x, y)$, $b = \mathrm{nwd}(y, z)$, $c = \mathrm{nwd}(z, x)$. *Wtedy liczby a, b, c są parami względnie pierwsze oraz* $x = c^2a$, $y = a^2b$ *i* $z = b^2c$.

([Mon] 53(4)(1946) 223-224).

D. (Erdös, Niven [Mon] 1946). Ponieważ $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$, więc jest oczywiste, że liczby a, b, c są parami względnie pierwsze. Niech $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = m \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy równość

$$x^2z + y^2x + z^2y = mxyz. \tag{1}$$

Część I. Pokażemy najpierw, że $a^2 \mid y$. Jeśli $a = 1$, to nie ma czego wykazywać. Załóżmy, że $a \geqslant 2$. Niech $a = p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}$ będzie rozkładem kanonicznym liczby a. Niech $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ i oznaczmy $p = p_i$, $r = r_i$. Wówczas $p \mid x$ oraz $p \mid y$ (gdyż $p \mid a = \mathrm{nwd}(x, y)$). Stąd $p \nmid z$ (bo $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$). Niech $x = p^\alpha u$, $y = p^\beta v$, gdzie $u, v \in \mathbb{N}$, $p \nmid u$, $p \nmid v$, $\alpha \geqslant r \geqslant 1$, $\beta \geqslant r \geqslant 1$. Wstawiając to do równości (1) otrzymujemy równość

$$p^{2\alpha}u^2z + p^{2\beta+\alpha}v^2u + p^\beta z^2v = mp^{\alpha+\beta}uvz,$$

z której jasno wynika, że $\beta = 2\alpha$. Zatem $a = \mathrm{nwd}(x, y) = \mathrm{nwd}(p^\alpha u, p^\beta v) = \mathrm{nwd}(p^\alpha u, p^{2\alpha}v) = p^\alpha \mathrm{nwd}(u, p^\alpha v) = p^\alpha w$, gdzie $p \nmid w$. Stąd wnioskujemy, że $\alpha = r$ i stąd, że $\beta = 2\alpha = 2r$. Zatem $(p^r)^2$ dzieli y. Dla każdego więc i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, s\}$ mamy podzielność $(p_i^{r_i})^2 \mid y$. To implikuje, że liczba $a^2 = \prod_{i=1}^s (p_i^{r_i})^2$ dzieli liczbę y. W ten sam sposób pokazujemy, że $b^2 \mid z$, $c^2 \mid x$. Zanotujmy:

$$c^2 \mid x, \quad a^2 \mid y, \quad b^2 \mid z. \tag{2}$$

Część II. Ponieważ $a \mid x$, $c^2 \mid x$ oraz $\mathrm{nwd}(a, c^2) = 1$, więc $ac^2 \mid x$. Analogicznie $ba^2 \mid y$, $cb^2 \mid z$. Zatem $x = iac^2$, $y = jba^2$, $z = kcb^2$, dla pewnych $i, j, k \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że $i = j = k = 1$.

Przypuśćmy, że $i \geqslant 2$. Istnieje wtedy liczba pierwsza p taka, że $p \mid i$. Wtedy $p \mid x$ (bo $x = iac^2$). Z równości (1) wynika więc, że $p \mid z^2y$ czyli, że $p \mid y$ lub $p \mid z$.

Przypuśćmy, że $p \mid y$. Wtedy $p \nmid z$ (bo $p \mid x$, $p \mid y$ oraz $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$). Ponadto, $p \mid a = \mathrm{nwd}(x, y)$. Ale $a = \mathrm{nwd}(x, y) = \mathrm{nwd}(iac^2, jba^2) = \mathrm{nwd}(ic^2, jba)a$, więc $\mathrm{nwd}(ic^2, jba) = 1$. Tymczasem liczba $\mathrm{nwd}(ic^2, jba)$ jest podzielna przez p (bo $p \mid i$ oraz $p \mid a$). Sprzeczność ta implikuje, że $p \nmid y$.

Zatem $p \mid z$, $p \mid x$ oraz $p \nmid y$. Stąd wynika, że $p \mid c = \mathrm{nwd}(z, x)$. Niech $x = p^\alpha u$, $z = p\gamma w$, gdzie $u, w \in \mathbb{N}$, $p \nmid u$, $p \nmid w$, $\alpha \geqslant 1$, $\gamma \geqslant 1$. Wstawiając to do równości (1) otrzymujemy równość

$$p^{2\alpha+\gamma}u^2w + p^\alpha uy^2 + p^{2\gamma}w^2y = mp^{\alpha+\gamma}uyw,$$

z której wynika, że $\alpha = 2\gamma$. Stąd dalej mamy: $p^{2\gamma}u = p^\alpha u = x = iac^2 = iap^{2\gamma}w^2 = p^{2\gamma+1}r$, dla pewnego $r \in \mathbb{N}$. Zatem $p \mid u$ wbrew temu, że $p \nmid u$.

Otrzymana sprzeczność implikuje, że $i = 1$. Analogicznie dowodzimy, że $j = 1$ oraz $k = 1$. Zatem $x = ac^2$, $y = ba^2$, $z = cb^2$ i to kończy dowód. ⊠

9.3.6. *Niech $x, y, z \in \mathbb{N}$. Jeśli $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ jest liczbą naturalną, to xyz jest sześcianem.* ([OM] Serbia-Czarnogóra 2004).

D. Niech $d = \mathrm{nwd}(x, y, z)$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, $z = dz_1$, gdzie $x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(x_1, y_1, z_1) = 1$. Ponieważ $\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1} = \frac{x_1 d}{y_1 d} + \frac{y_1 d}{z_1 d} + \frac{z_1 d}{x_1 d} = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, więc $\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1}$ jest liczbą naturalną. Z twierdzenia 9.3.5 wynika więc, że istnieją liczby naturalne a, b, c takie, że $x_1 = ac^2$, $y_1 = ba^2$, $z_1 = cb^2$. Mamy zatem $xyz = (dx_1)(dy_1)(dz_1) = d^3(ac^2)(ba^2)(cb^2) = (abcd)^3$, czyli xyz jest sześcianem liczby naturalnej. ⊠

9.3.7. *Niech $x, y, z \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Jeśli $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ i $\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$ są liczbami całkowitymi, to $|x| = |y| = |z|$.* ([OM] Moskwa 1995).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.4 Nieskończoność zbioru $\mathbf{A}_3$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy (patrz 9.3.4), że zbiór A_3 pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych postaci $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{N}$. Możemy nawet założyć, że liczby a, b, c są parami względnie pierwsze. Wykażemy teraz, że liczb naturalnych postaci $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ jest nieskończenie wiele. Wykażemy to nawet przy dodatkowym założeniu, że $c = 1$. Przedstawione tu fakty i ich dowody pochodzą z rozwiązania zadania E682 z czasopisma [Mon] 53(4)(1946) 223-224, podanego przez Erdösa i Nivena.

9.4.1 (Erdös, Niven 1946). *Niech a, b będą liczbami naturalnymi takimi, że:*

(*a*) $\mathrm{nwd}(a, b) = 1$;

(*b*) $a < b$;

(*c*) $ab \mid a^3 + b^3 + 1$.

Wtedy $a \mid b^3 + 1$. Oznaczmy $u = \frac{b^3+1}{a}$, $m_1 = \frac{a^3+b^3+1}{ab}$, $m_2 = \frac{b^3+u^3+1}{bu}$. Wtedy u i m_1 są liczbami naturalnymi oraz:

(1) $\mathrm{nwd}(b, u) = 1$;

(2) $b < u$;

(3) $bu \mid b^3 + u^3 + 1$, *tzn.* m_2 *jest liczbą naturalną;*

(4) $m_1 < m_2$. ([Mon] 53(4)(1946) 223-224).

D. (1). Ponieważ $au = b^3 + 1$, więc $1 = au + (-b^2)b$, czyli $\mathrm{nwd}(b, u) = 1$.

(2). Przypuśćmy, że $b \geqslant u$. Wtedy: $b^3 > ab^2 \geqslant ab \geqslant au = b^3 + 1$ i mamy sprzeczność: $b^3 > b^3 + 1$.

(3). Ponieważ $u \mid b^3 + 1$, więc $u \mid b^3 + u^3 + 1$. Należy więc tylko pokazać, że $b \mid b^3 + u^3 + 1$ czyli, że $b \mid u^3 + 1$. Z założenia b dzieli $a^3 + 1$. Niech $a^3 + 1 = vb$, gdzie $v \in \mathbb{N}$. Mamy wtedy: $u^3 + 1 = u^3 + (ua)^3 + 1 - (ua)^3 = u^3(1 + a^3) + 1 - (b^3 + 1)^3 = u^3vb - b^9 + 3b^6 - 3b^3$, a zatem $b \mid u^3 + 1$ i ostatecznie $bu \mid b^3 + u^3 + 1$.

(4). Zauważmy, że $m_1 = \frac{a^3+b^3+1}{ab} = \frac{a^3+ua}{ab} = \frac{a^2+u}{b}$, $m_2 = \frac{b^3+u^3+1}{bu} = \frac{ua+u^3}{bu} = \frac{a+u^2}{b}$. Należy więc pokazać, że $a^2 + u < a + u^2$ czyli, że $a(a-1) < u(u-1)$. Ale to jest oczywiste, gdyż $1 \leqslant a < u$. ⊠

9.4.2. *Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych postaci* $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$, *gdzie* $a, b, c \in \mathbb{N}$. *Istnieje nawet nieskończenie wiele liczb naturalnych tej postaci spełniających warunek* $c = 1$. (Wynika to z twierdzenia 9.4.1).

9.4.3. *Zbiór* A_3 *jest nieskończony. Innymi słowy, istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych postaci* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, *gdzie* $x, y, z \in \mathbb{N}$. (Jest to konsekwencja faktów 9.4.2 i 9.3.4).

9.4.4 (Dofs 1995). *Niech* t *będzie dowolną liczbą naturalną i niech* $x = a^2b$, $y = b^2c$, $z = c^2a$, *gdzie* $a = 2$, $b = t^2 - t + 1$, $c = t^2 + t + 1$. *Wtedy*

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = t^2 + 5.$$

Oznacza to, że każda liczba naturalna postaci $t^2 + 5$, *gdzie* $t \in \mathbb{N}$, *należy do zbioru* A_3. *Stąd w szczególności wynika, że zbiór* A_3 *jest nieskończony.* ([Dofs], [Bond]).

9.4.5. *Jeśli* $s \geqslant 3$, *to zbiór* A_s *jest nieskończony.*

D. Wiemy (na mocy 9.4.3), że zbiór A_3 jest nieskończony. Udowodniliśmy (patrz 9.1.12), że jeśli $n \in A_s$, to $n + 1 \in A_{s+1}$. Stąd wynika, że zbiór A_4 jest nieskończony. Stąd dalej wynika, że zbiór A_5 jest nieskończony, itd. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.5 Przykłady liczb naturalnych należących do A$_3$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W 1964 roku Wacław Sierpiński ([S64] 136-138) napisał, że nie wiadomo czy czy liczba 4 należy do A_3. Dzisiaj już wiadomo, że nie należy. Udowodnił to w 2000 roku A.V. Bondarenko ([Bond]). On udowodnił nawet więcej:

9.5.1 (Bondarenko 2000). *Każda liczba naturalna postaci* $4m^2$, *gdzie* $3 \nmid m$, *nie należy do zbioru* A_3. ([Bond], patrz 9.8.7).

W tym podrozdziale stosować będziemy następującą terminologię. Załóżmy, że liczba naturalna n należy do zbioru A_3. Istnieje wtedy trójka (x,y,z) liczb naturalnych takich, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\text{nwd}(x, y, z) = 1$. Trójki (y, z, x) i (z, x, y) mają wówczas te same własności. Z tych trzech trójek wybierzmy tę, która na pierwszym miejscu ma liczbę równą $\min\{x, y, z\}$. Taką trójkę nazywać będziemy *α-trójką liczby n.*

Wiemy, że jeśli $n \in A_3$, to istnieje trójka (a, b, c) liczb naturalnych takich, że $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. W tym przypadku możemy zakładać, że $a \leqslant b \leqslant c$ oraz, że liczby a, b, c są parami względnie pierwsze. Każdą trójkę o tych własnościach nazywać będziemy *β-trójką liczby n.* α-Trójki oznaczać będziemy za pomocą zwykłych nawiasów. Natomiast β-trójki przy pomocy nawiasów kwadratowych. Liczba naturalna może posiadać więcej niż jedną α-trójkę. Podobnie jest z β-trójkami.

9.5.2. *Jśli $[a, b, c]$ jest β-trójką liczby naturalnej n, to trójki (ac^2, ba^2, cb^2) i (ab^2, ca^2, bc^2), po cyklicznym przestawieniu najmniejszej liczby na pierwsze miejsce, tworzą α-trójki liczby n. Dla przykładu, z β-trójki $[1, 2, 9]$ liczby 41 otrzymujemy dwie różne α-trójki liczby 41; mianowicie $(2, 36, 81)$ i $(4, 9, 162)$.*

9.5.3 (Rusin 2003)**.** *Istnieje dokładnie 57 liczb naturalnych n mniejszych od 200, dla których równanie $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = n$ ma rozwiązanie naturalne. Są to następujące liczby:*

$$\begin{array}{l} 3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 26, 29, 30, 38, \\ 41, 51, 53, 54, 57, 66, 67, 69, 73, 74, 77, \\ 83, 86, 94, 101, 102, 105, 106, 110, 113, 117, \\ 122, 126, 129, 130, 133, 142, 145, 147, 149, 154, 158, \\ 161, 162, 166, 174, 177, 178, 181, 186, 195, 197. \end{array}$$

Dla każdej z tych liczb, oprócz liczb 3 i 5, rozważane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y, z) takich, że $\text{nwd}(x, y, z) = 1$. To samo dotyczy równania $\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = n$. ([Rus1]).

9.5.4. *Pewne liczby naturalne $n \leqslant 200$ należące do A_3 wraz z ich pewnymi α-trójkami.*

$$\begin{array}{rl} 3: & (1, 1, 1); \\ 5: & (1, 2, 4); \\ 6: & (2, 12, 9), (3, 18, 4); \\ 9: & (12, 63, 98), (18, 28, 147); \\ 10: & (175, 882, 1620); \\ 14: & (28, 637, 338), (52, 1183, 98); \\ 19: & (5, 225, 81), (9, 405, 25); \\ 41: & (2, 36, 81), (4, 9, 162), (5, 350, 196), (14, 980, 25); \\ 53: & (28, 1323, 1458); \\ 66: & (3, 126, 196), (9, 14, 588); \\ 106: & (35, 66150, 2916), (64, 102060, 1225); \\ 149: & (14, 8820, 2025), (45, 28350, 196); \\ 154: & (52, 10647, 7938) \text{ (Maple)}. \end{array}$$

9.5.5 (Rusin 2003, [Rus2]). *Wszystkie liczby naturalne $n \leqslant 200$ należące do A_3 wraz z ich pewnymi β-trójkami.*

(3) $[1, 1, 1]$;

(5) $[1, 1, 2]$;

(6) $[1, 2, 3]$, $[1817, 3258, 5275]$, $[4904676969, 10840875082, 15051171563]$;

(9) $[2, 3, 7]$, $[970703, 2982043, 4461282]$;

(10) $[5, 7, 18]$, $[4192875343, 11021882957, 19765145610]$;

(13) $[9, 13, 38]$, $[2197345737653, 6384056084353, 12689495542854]$;

(14) $[2, 7, 13]$, $[279025573, 759054842, 1638591583]$;

(17) $[5, 18, 37]$, $[1932849997397, 7649960172210, 14857581287413]$;

(18) $[13, 42, 95]$, $[5902844861231317, 35013190193908290, 54059017558123943]$;

(19) $[1, 5, 9]$, $[728051, 1279935, 4135819]$;

(21) $[2, 13, 21]$, $[38304582498, 44899033717, 187979061005]$;

(26) $[9, 38, 91]$, $[2592527851712161, 16461714780091854, 31072284713059955]$;

(29) $[27, 43, 182]$, $[725188306504448123, 2863730199603918763, 7554216031389795222]$;

(30) $[2, 21, 31]$, $[907576024698, 2555537666039, 8213238158509]$;

(38) $[70, 151, 629]$;

(41) $[1, 2, 9]$, $[1, 5, 14]$, $[2, 31, 43]$, $[61, 1133, 1314]$, $[1541, 10690, 25029]$, $[13547, 17314, 97663]$, $[11441, 86425, 192834]$, $[240322, 681959, 2567203]$, $[193669, 2829857, 4119086]$;

(51) $[9, 13, 77]$, $[9496944543173, 28497283786885, 116604793962657]$;

(53) $[2, 7, 27]$, $[210121627, 5309015927, 5755076082]$;

(54) $[2, 43, 57]$, $[370030298454, 3412808117911, 7948993687541]$;

(57) $[19, 91, 310]$, $[278307036741995371, 5726573130751998070, 8251115886938879299]$;

(66) $[1, 3, 14]$, $[55075, 1201649, 1852326]$;

(67) $[1133, 7525, 23517]$;

(69) $[2, 57, 73]$, $[42, 95, 523]$, $[38808119, 45866266, 349822755]$, $[907290117, 16844207218, 29911475693]$, $[11708394650, 69802887831, 234380785219]$;

(73) $[89200900157319, 1391526622949983, 2848691279889518]$;

(74) $[133, 2502, 4607]$;

(77) $[67, 630, 1763]$, $[133, 1382, 3665]$, $[40225, 221062, 819413]$, $[401247, 1986038, 7768135]$, $[8123011655, 138755312182, 277792875423]$, $[321489851593, 5998665668870, 11380945916077]$;

(83) $[5, 9, 61]$, $[406164641531, 2343744686659, 8805786469335]$;

(86) $[2, 73, 91]$, $[5660399432462138, 114038591571428467, 220904967896959585]$;

(94) $[27, 182, 673]$, $[19, 746, 945]$, $[20400692347, 64738300490, 351211722633]$, $[180053104598, 478460823507, 2838538679977]$;

(101) $[79, 1271, 3078]$;

(102) $[459338480695732254, 3816006884967068935, 13212742329826830581]$;

(105) $[2, 91, 111]$, $[35, 1171, 1854]$, $[4934775, 86738143, 204325982]$, $[22107891903, 239901074434, 733520068619]$;

(106) $[1, 35, 54]$, $[1342, 15929, 46683]$, $[100054843, 4555645497, 5608864334]$, $[327256085169, 710839851638, 4957711976947]$;

(110) $[1147, 2745, 18578]$;

(113) $[345842, 6313383, 15170275]$;

(117) $[545, 1677, 10318]$;

(122) *najmniejsza β-trójka jest bardzo długa;*

(126) $[2, 111, 133]$, $[1093, 4199, 23982]$, $[843543, 6610037, 26297374]$, $[1437546238546, 8374810124997, 38751798984143]$;

(129) $[31, 774, 1679]$, $[70, 629, 2361]$, $[11970393, 28883125, 210898982]$, $[11235206, 80300179, 338895771]$;

(130) *najmniejsza β-trójka jest bardzo długa;*

(133) *najmniejsza β-trójka jest bardzo długa;*

(142) *najmniejsza β-trójka jest bardzo długa;*

(145) $[44634584148027469, 157591646586434781, 1007950541819512850]$;

(147) $[21, 925, 1529]$;

(149) $[1, 14, 45]$, $[2, 133, 157]$, $[45257, 87913, 769298]$, $[1261745, 32670622, 75361293]$, $[3617906033, 3624015553, 44175121682]$, $[155269296833, 1140528906910, 5108338064637]$;

(154) $[2, 13, 63]$, $[62, 1183, 3285]$, $[94550101, 2427158214, 5731153295]$, $[394133054, 847190695, 7164362061]$, $[689430032438, 33597986722807, 53457471559053]$;

(158) $[5642215349875, 7336556299898, 80828288788977]$;

(161) $[11, 38, 259]$, $[109, 3933, 7826]$, $[146, 6517, 11349]$, $[39927179, 179799907, 1072531846]$, $[124939654, 330937307, 2577222931]$, $[8233174563067629, 444973594136388818, 678169113751189021]$;

(162) $[35, 1854, 2881]$;

(166) $[9, 611, 790]$;

(174) $[5, 7, 78]$, $[2, 157, 183]$, $[608242, 46497117, 55872983]$, $[65441098, 3473800847, 5671311957]$, $[455934805, 600648279, 6899701406]$, $[28379531231, 73248432669, 600842282950]$;

(177) *istnieje przypuszczenie, że najmniejsza β-trójka jest bardzo długa;*

(178) $[2, 27, 97]$, $[14392834313297, 170840056879242, 655798399654747]$;

(181) $[10672860536839861, 21088064331923949, 201705586625136962]$;

(186) $[2269, 15938, 81711]$, $[11403, 22774, 219641]$, $[5246451, 376524257, 513247054]$, $[145592437, 3886992711, 9968391914]$, $[2334061450181786, 54431784269157829, 150189528932685207]$;

(195) $[7, 15, 143]$, $[39, 703, 2279]$, $[12303811, 814494411, 1230936587]$, $[2114540363, 8501821579, 59118924099]$, $[109899928179, 4982656556915, 9696551744971]$;

(197) $[127, 6278, 11655]$.

9.5.6. *Pewne liczby naturalne $200 < n \leqslant 500$ należące do A_3 wraz z ich pewnymi α i β-trójkami.*

201 : $[2, 183, 211]$;
209 : $[5, 254, 481]$;
230 : $[2, 211, 241]$;
237 : $(65, 481650, 12996); [1, 65, 114]$;
243 : $[9, 77, 409]$;
250 : $(36, 5427, 8978); [2, 9, 67]$;
261 : $(63, 3626, 16428); [2, 241, 273], [3, 7, 74], [18, 637, 1685]$;
269 : $(14, 11956, 3721), (61, 52094, 196); [1, 14, 61]$;
294 : $[2, 273, 307]$;
323 : $[9, 49, 377], [13, 869, 1813]$;
326 : $[5, 14, 151]$;
329 : $[2, 307, 343]$;
339 : $[7, 543, 1067]$;
366 : $[2, 343, 381]$;
405 : $[2, 381, 421]$;
413 : $[62, 3285, 8953]$;
446 : $[2, 421, 463]$;
451 : $[23, 31, 567]$;
478 : $[13, 23, 378]$;
489 : $[2, 463, 507]$ (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6 Występowanie danej liczby w rozkładach liczb ze zbioru $\mathbf{A}_3$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.6.1. *Jeśli r jest liczbą naturalną, to istnieje tylko skończenie wiele par $(y, z) \in \mathbb{N}^2$ takich, że $\frac{r}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{r}$ jest liczbą naturalną.*

D. Niech r będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że y, z są liczbami naturalnymi takimi, że $\frac{r}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{r} = n$, gdzie n jest pewną liczbą naturalną. Mamy wtedy równość

$$r^2z + y^2r + z^2y = nryz, \tag{1}$$

z której wynika, że $y \mid r^2z$ oraz $z \mid ry^2$. Niech $r^2z = ay$, $ry^2 = bz$, gdzie $a, b \in N$. Wtedy $r^3y^2 = r^2(ry^2) = r^2bz = bay$, czyli $r^3y = ab$. Stąd $r^5z = r^3(r^2z) = r^3(ay) = a^2b$. Zatem y, z są liczbami naturalnymi postaci

$$y = \frac{ab}{r^3}, \quad z = \frac{a^2b}{r^5}. \tag{2}$$

Wstawiając to do (1) i mnożąc stronami przez $\frac{r^{13}}{a^2b}$, otrzymujemy równość

$$r^{10} + r^8b + a^3b^2 = nr^6ab. \tag{3}$$

Z tej równości wynika, że b jest podzielnikiem liczby r^{10}. Takich podzielników jest oczywiście tylko skończenie wiele. Niech $r^{10} = ub$. Mamy wtedy $u + r^8 + a^3b = nr^6a$. Liczba a jest więc podzielnikiem liczby $u + r^8$. Takich liczb a jest więc też tylko skończenie wiele. Z równości (2) wynika zatem, że rozważanych par (y, z) jest tylko skończenie wiele. ⊠

U. Z powyższego dowodu otrzymujemy algorytm na znajdowanie, dla danej liczby naturalnej r, wszystkich trójek $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, w których występuje liczba r i liczba $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ jest naturalna.

Możemy przyjąć, że $x = r$. Wtedy liczby y, z otrzymujemy w następujący sposób. Niech a będzie dowolnym podzielnikiem liczby r^{10}. Wtedy $r^{10} = ua$, gdzie $u \in \mathbb{N}$. Niech b będzie dowolnym podzielnikiem liczby $r^8 + u$. Mamy wtedy skończenie wiele liczb wymiernych $y = \frac{ab}{r^3}$, $z = \frac{a^2b}{r^5}$. Wybieramy tylko te, które są liczbami naturalnymi i spełniają warunek $\frac{r}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{r} \in \mathbb{N}$. ⊠

9.6.2. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$. Jeśli $\min\{x, y, z\} = 1$, to $n = 3$ lub 5. W tych przypadkach mamy: $3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$, $5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{1}$.*

D. Załóżmy, że $x = 1$.

(Sposób I). Niech $a = \operatorname{nwd}(x, y)$, $b = \operatorname{nwd}(y, z)$, $c = \operatorname{nwd}(z, x)$. Wtedy $a = 1$, $b \in \mathbb{N}$ oraz $c = 1$. Z twierdzenia 9.3.5 wiemy, że wtedy $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{2+b^3}{b} = \frac{2}{b} + b^2$. Stąd wynika, że $b = 1$ lub $b = 2$. Jeśli $b = 1$, to $n = 3$. Jeśli $b = 2$, to $n = 5$.

(Sposób II). Z równości $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ wynika równość $x^2z + y^2x + z^2y = nxyz$, która w naszym przypadku ma postać

$$z + y^2 + z^2y = nyz.$$

Stąd wynika, że $y \mid z$ oraz $z \mid y^2$. Niech $z = uy$, $y^2 = vz$, gdzie $u, v \in \mathbb{N}$. Wtedy $y^2 = vz = vuy$ i stąd $y = uv$, $z = u^2v$. Zatem $u^2v + u^2v^2 + u^5v^3 = nu^3v^3$ i po podzieleniu stronami przez u^2v mamy: $1 + v + u^3v^2 = nuv$ i stąd $v = 1$. Zatem $z = u^2 = y^2$. Podstawiając to do równości $z + y^2 + z^2y = nyz$, otrzymujemy równość $2 + y^3 = ny$ z której wynika, że $y \mid 2$, Jeśli $y = 1$, to $n = 3$. Jeśli $y = 2$, to $n = 5$. ⊠

9.6.3. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 2, to $n = 5, 6$ lub 41. W tych przypadkach mamy: $5 = \frac{2}{4} + \frac{4}{1} + \frac{1}{2}$, $6 = \frac{2}{12} + \frac{12}{9} + \frac{9}{2}$, $41 = \frac{2}{36} + \frac{36}{81} + \frac{81}{2}$.*

D. Załóżmy, że $x = 2$. Niech $a = \operatorname{nwd}(x, y)$, $b = \operatorname{nwd}(y, z)$, $c = \operatorname{nwd}(z, x)$. Wtedy $a = 1$ lub 2 oraz $c = 1$ lub 2. Przypadek $a = c = 2$ odpada, gdyż $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Z twierdzenia 9.3.5 wiemy, że wtedy $n = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. Możliwe są więc tylko przypadki: $n = \frac{2+b^3}{b} = \frac{2}{b} + b^2$ lub $n = \frac{9+b^3}{2b}$. W pierwszym przypadku $2 \mid b$, więc $b = 1$ lub $b = 2$. Jeśli $b = 1$, to $x = y = z = 1$ wbrew temu, że $x = 2$. Jeśli $b = 2$, to $n = 5 = \frac{2}{4} + \frac{4}{1} + \frac{1}{2}$. W drugim przypadku $b = 1, 3$ lub 9 i wtedy odpowiednio $n = 5, 6$ lub 41. ⊠

Następne fakty otrzymano za pomocą komputera i algorytmu opisanego w uwadze po dowodzie twierdzenia 9.6.1.

9.6.4. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 3, to $n = 6$ lub 66. W tych przypadkach mamy: $6 = \frac{3}{18} + \frac{18}{4} + \frac{4}{6}$, $66 = \frac{3}{126} + \frac{126}{9} + \frac{126}{196}$.* (Maple).

9.6.5. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 4, to $n = 5, 6$ lub 41. W tych przypadkach mamy: $5 = \frac{4}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$, $6 = \frac{4}{3} + \frac{3}{18} + \frac{18}{4}$, $41 = \frac{4}{9} + \frac{9}{162} + \frac{162}{4}$.* (Maple).

9.6.6. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 5, to $n = 19$ lub 41. W tych przypadkach mamy: $19 = \frac{5}{225} + \frac{225}{81} + \frac{81}{5}$, $41 = \frac{5}{350} + \frac{350}{196} + \frac{196}{5}$.* (Maple).

9.6.7. *Niech n będzie liczbą naturalną i niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ oraz $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Jeśli co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa 9, to $n = 6, 19, 41, 66, 2369$ lub 14 803. W tych przypadkach mamy: $6 = \frac{9}{2} + \frac{2}{12} + \frac{12}{9}$, $19 = \frac{9}{405} + \frac{405}{25} + \frac{25}{9}$, $41 = \frac{9}{162} + \frac{162}{4} + \frac{4}{9}$, $66 = \frac{9}{14} + \frac{14}{588} + \frac{588}{9}$, $2369 = \frac{9}{11826} + \frac{11826}{21316} + \frac{21316}{9}$, $14\,803 = \frac{9}{29565} + \frac{29565}{133225} + \frac{133225}{9}$.* (Maple).

9.6.8. *Niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ jest liczbą naturalną i $\operatorname{nwd}(x, y, z) = 1$. Wtedy każda z liczb x, y, z jest różna od 6, 7 i 9.* (Maple).

9.6.9. *Niech x, y, z będą liczbami naturalnymi takimi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ jest liczbą naturalną i* $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$*. Jeśli któraś z liczb x, y, z jest mniejsza od 77, to może ona być jedynie jedną z liczb:* $1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14, 18, 20, 25, 28, 35, 36, 45, 50, 52, 54, 61, 63, 65$. (Maple).

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.7 Zbiór B_3

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że

$$B_3 = \left\{ \tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{z} + \tfrac{z}{x};\ x, y, z \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{z} + \tfrac{z}{x};\ x, y, z \in \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Oznaczmy:

$$C_3 = \left\{ \tfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz};\ x, y, z \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \tfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz};\ x, y, z \in \mathbb{Q}^+ \right\}.$$

Wiemy (patrz 9.3.2), że $C_3 = B_3$.

Niech $q \in \mathbb{Q}^+$. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale mówić będziemy, że (x, y, z) jest α-trójką liczby q, jeśli: $x, y, z \in \mathbb{N}$, $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$, $x = \min\{x, y, z\}$ oraz $q = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$. Każda dodatnia liczba wymierna należąca do B_3 ma oczywiście co najmniej jedną α-trójkę.

Mówić będziemy, że $[a, b, c]$ jest β-trójką liczby q jeśli: a, b, c są liczbami naturalnymi, $a \leqslant b \leqslant c$, $\mathrm{nwd}(a, b, c) = 1$ oraz $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$. Jeśli q ma β-trójkę, to oczywiście ma α-trójkę i odwrotnie.

Niech $[a, b, c]$ będzie β-trójką liczby wymiernej q. Wówczas $\mathrm{nwd}(a, b, c) = 1$. W przypadku, gdy q jest liczbą naturalną, to stąd wynika, że liczby a, b, c są parami względnie pierwsze. Tak nie musi być jednak, gdy q nie jest liczbą naturalną. Dla przykładu $[1, 2, 2]$ jest β-trójką liczby $\frac{17}{4}$ i liczby $1, 2, 2$ nie są parami względnie pierwsze. Nie znam odpowiedzi na następujące pytanie.

9.7.1. *Załóżmy, że liczba wymierna q ma β-trójkę. Czy wtedy istnieje taka β-trójka $[a, b, c]$ liczby q, że liczby a, b, c są parami względnie pierwsze?* (03.04.2007).

Podamy teraz przykłady pewnych liczb wymiernych należących do B_3 wraz z ich α i β-trójkami. Wszystkie te przykłady znaleziono za pomocą Maple.

9.7.2. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{2}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $2 \nmid n$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

(7) $(1, 1, 2), (1, 2, 2)$; $[5, 7, 8]$;

(11) $(2, 3, 9), (2, 6, 9)$, $[629, 1204, 1737]$;

(19) $(4, 80, 25), (5, 100, 16)$; $[1, 4, 5]$;

(33) $(1, 4, 16)$; $[1, 1, 4]$;

(37) $(1, 3, 18), (1, 6, 18), (3, 90, 50), (5, 150, 9)$; $[13, 72, 119], [63, 551, 604]$;

(41) $[27, 155, 268]$;

(45) $(3, 72, 64), (8, 192, 9)$; $[1, 3, 8], [4, 5, 21], [63, 412, 695]$;

(49) $(22, 1815, 450), (30, 2475, 121)$; $[20, 37, 133]$;

(51) $(1, 10, 25), (2, 5, 50)$;

(57) $[7, 93, 104]$;

(61) $[7, 104, 109]$;

(73) $[7, 8, 45]$;

(85) $[8, 117, 175]$;

(87) $(4, 208, 169), (13, 676, 16)$; $[1, 4, 13]$;

(97) $(8, 1216, 361), (9, 1620, 400), (19, 2888, 64), (20, 3600, 81)$; $[1, 8, 19], [1, 9, 20]$ (Maple).

9.7.3. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{3}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $3 \nmid n$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

10 : $(2, 4, 3), (3, 6, 4); [62, 81, 91]$;
13 : $(1, 1, 3), (1, 3, 3); [7, 13, 15]$;
16 : $(12, 45, 50), (18, 20, 75); [2, 3, 5]$;
17 : $(1, 6, 4), (1, 15, 25), (2, 12, 3); [627, 818, 1547]$;
19 : $(3, 4, 16), (3, 12, 16)$;
20 : $(5, 50, 12), (6, 60, 25)$;
23 : $(3, 36, 16), (4, 48, 9); [1, 3, 4]$;
29 : $(1, 3, 9); [1, 1, 3]$;
38 : $(1, 2, 12), (1, 6, 12)$;
40 : $(6, 252, 49), (7, 294, 36); [1, 6, 7]$;
41 : $(8, 320, 75), (15, 600, 64)$;
44 : $(36, 208, 507); [3, 4, 13]$;
53 : $(3, 63, 49), (7, 147, 9), [1, 3, 7]$;
56 : $(15, 400, 256)$;
62 : $(6, 44, 121), (12, 33, 242)$;
65 : $[31, 37, 156]$;
70 : $[14, 61, 135]$;
74 : $(7, 588, 144), (12, 1008, 49); [1, 7, 12]$;
77 : $(3, 5, 75)$;
79 : $[57, 527, 776]$;
85 : $[5, 11, 39]$;
89 : $(33, 3509, 841)$;
92 : $[28, 67, 237]$ (Maple).

9.7.4. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{4}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{nwd}(n, 4) = 1$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

(17) $(1, 4, 2)$; $[1, 2, 2]$;

(21) $(1, 1, 4), (1, 4, 4)$; $[3, 7, 8]$;

(27) $(12, 126, 49), (14, 147, 36)$;

(29) $(2, 24, 9), (3, 36, 8), (4, 5, 25), (4, 20, 25)$; $[7, 8, 19]$;

(35) $(1, 2, 8), (1, 4, 8)$;

(45) $[8, 19, 39]$;

(69) $(6, 45, 100), (8, 576, 81), (9, 20, 150), (9, 648, 64)$; $[1, 8, 9], [8, 39, 67]$;

(75) $(1, 12, 18), (2, 3, 36)$ (Maple).

9.7.5. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{5}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $5 \nmid n$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

(18) $(36, 80, 75)$; $[3, 4, 5]$;

(19) $(2, 4, 5), (3, 9, 5), (4, 5, 10), (5, 15, 9)$; $[4, 5, 7], [5, 7, 9], [333, 551, 595], [385, 589, 698]$;

(28) $(4, 15, 18), (10, 12, 45), (15, 72, 64)$; $[13, 35, 36], [54, 133, 155]$;

(29) $[9, 25, 26]$;

(31) $(1, 1, 5), (1, 5, 5), (9, 20, 48), (15, 36, 80)$; $[11, 31, 35], [14, 37, 45], [95, 189, 292]$;

(32) $[14, 43, 45]$;

(33) $(1,10,4),(2,20,5)$; $[86,175,279]$;

(34) $(20,175,98),(28,245,50)$; $[2,5,7]$;

(36) $[7,9,20]$;

(39) $[7,15,26]$;

(41) $(5,6,36),(5,30,36)$; $[35,36,97]$;

(44) $[37,140,171]$;

(51) $(3,45,25),(5,75,9)$; $[1,3,5]$;

(54) $[40,147,221]$;

(56) $(2,60,9),(3,90,20)$;

(57) $(5,150,36),(6,180,25)$; $[1,5,6],[9,20,43]$;

(59) $(30,612,289)$;

(62) $(4,48,45),(15,180,16)$;

(67) $(2,20,25),(4,5,50),(5,175,49),(7,245,25)$; $[1,5,7],[37,55,161],[40,221,283]$;

(72) $[8,19,45],[15,26,73]$;

(83) $(3,180,16),(4,240,45)$; $[37,209,315]$;

(87) $(10,52,169),(20,65,338)$;

(88) $[7,54,65]$;

(89) $[50,91,279]$;

(96) $(7,490,100),(10,700,49)$; $[1,7,10],[5,11,28]$ (Maple).

9.7.6. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{6}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{nwd}(n,6)=1$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

(19) $(2,2,3),(2,3,3)$; $[16,19,21]$;

(23) $(1,3,2),(2,6,3)$; $[79,108,143]$;

(25) $(1,2,3),(2,3,6)$; $[108,143,211]$;

(31) $(1,6,2),(1,6,3),(6,10,25),(6,15,25),(36,112,147)$; $[3,4,7],[11,27,28],[223,380,567]$;

(41) $(1,2,6),(1,3,6)$; $[380,567,1123]$;

(43) $(1,1,6),(1,6,6)$; $[13,43,48]$;

(47) $(5,75,18),(6,90,25)$;

(55) $(6,7,49),(6,42,49)$;

(59) $(1,6,9),(2,3,18)$ (Maple).

9.7.7. *Przykłady liczb wymiernych postaci $\frac{n}{7}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $7 \nmid n$, wraz z ich α lub β-trójkami.*

(22) $(9,14,12),(18,28,21)$; $[7,8,9]$;

(23) $(14,20,25),(28,35,50)$;

(30) $(4,16,7),(7,28,16)$; $[388,629,819]$;

(32) $(2,4,7),(4,7,14)$;

(33) $[3,5,7]$;

(38) $(35, 150, 36)$;
(40) $[19, 45, 56]$;
(41) $(4, 21, 18), (12, 63, 14), (35, 275, 121)$; $[5, 7, 13], [26, 31, 63]$;
(52) $[26, 63, 97]$;
(53) $(1, 14, 4), (2, 28, 7)$;
(57) $(1, 1, 7), (1, 7, 7)$; $[5, 19, 21]$;
(59) $[45, 56, 139]$;
(60) $(28, 441, 162), (36, 567, 98)$; $[2, 7, 9], [12, 13, 35]$;
(71) $(3, 18, 28), (7, 8, 64), (7, 56, 64), (9, 14, 84)$;
(72) $[19, 21, 62]$;
(73) $[7, 27, 38]$;
(83) $[9, 26, 49]$;
(97) $(2, 84, 9), (3, 126, 28), (5, 75, 63), (21, 315, 25)$; $[99, 533, 721]$;
(99) $[12, 35, 73]$ (Maple).

9.7.8. *Niech $q = \frac{n^2+n+1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $(1, 1, n)$ jest α-trójką liczby q oraz $q = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$, gdzie $a = 2n + 1$, $b = n^2 + n + 1$, $c = n^2 + 2n$.*

9.7.9 (M. Klamkin, [Crux] 2001 s.78)**.** *Jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to*

$$3 \min \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a},\ \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \right\} \geqslant (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.8 Liczby postaci $x/y + y/z + z/x$, gdzie x, y, z są liczbami całkowitymi

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przedstawione tu fakty pochodzą głównie z pracy [Rus1].

Niech n będzie liczbą naturalną. Interesować nas będzie problem istnienia rozwiązań równania

$$(I) \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = n$$

w zbiorze niezerowych liczb całkowitych. Po pomnożeniu obu stron przez xyz, równanie to przyjmuje postać

$$(II) \qquad x^2z + y^2x + z^2y = nxyz.$$

Wiemy (patrz 9.3.1), że problem istnienia rozwiązań równania (II) w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych sprowadza się do analogicznego problemu dla równania

$$(III) \qquad x^3 + y^3 + z^3 = nxyz.$$

Zajmiemy się więc problemem istnienia rozwiązań równania (III) w zbiorze niezerowych liczb całkowitych. Ponieważ równanie (III) jest jednorodne, więc wystarczy zbadać problem istnienia rozwiązań równania

$$(IV) \qquad x^3 + y^3 + 1 = nxy$$

w zbiorze niezerowych liczb wymiernych.

9.8.1 (Rusin 2003). *Niech* $x = \dfrac{-nX - 36 + Y}{2(3X + 4n^2)}$, $y = \dfrac{-(nX + 36 + Y)}{2(3X + 4n^2)}$. *Wtedy równanie* (IV) *przyjmuje postać*

$$(V) \qquad Y^2 = X^3 + n^2X^2 - 72nX - 16(4n^3 + 27).$$

Jeśli $n \neq 3$, *to dane przekształcenie jest odwracalne. Przekształcenie odwrotne ma postać*

$$X = \frac{-4(n^2(x+y)+9)}{(3(x+y)+n)}, \quad Y = \frac{4(n^3-27)(x-y)}{(3(x+y)+n)}.$$ ([Rus1]).

Za pomocą powyższego faktu D. Rusin ([Rus1]) sprowadził problem istnienia rozwiązań równia (I) w zbiorze niezerowych liczb całkowitych do badania struktury grupy krzywej eliptycznej zadanej równaniem (V). Dzięki temu Rusin otrzymał następujące wyniki.

9.8.2 (Rusin 2003). *Niech* n *będzie liczbą naturalną różną od* 5. *Jeśli równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = n$ *ma rozwiązanie w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych, to ma nieskończenie wiele prymitywnych takich rozwiązań tzn. z warunkiem* $\mathrm{nwd}(x, y, z) = 1$. ([Rus1]).

9.8.3 (J.W.S. Cassels 1960). *Równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ *nie ma rozwiązań całkowitych.* ([Mat] 2/61 68, [Rus1]).

Zanotujmy przy okazji:

9.8.4. *Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ *ma rozwiązanie całkowite.*

(2) *Istnieją liczby wymierne* u, v, w *takie, że* $u + v + w = uvw = 1$.

(3) *Istnieją liczby całkowite* a, b, c *takie, że* $a^3 + b^3 + c^3 = abc \neq 0$.

(4) *Istnieją liczby całkowite* a, b, c *takie, że* $(a + b + c)^3 = abc \neq 0$.

(5) *Istnieje liczba wymierna* a *taka, że równanie* $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ *ma trzy pierwiastki wymierne.* ([Mat] 3/57 11-13, 1/58 57).

9.8.5. *Równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 2$ *nie ma rozwiązań całkowitych.* ([Rus1]).

9.8.6. *Równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$ *ma nieskończenie wiele prymitywnych rozwiązań w zbiorze niezerowych liczb całkowitych. Wśród tych rozwiązań tylko jedno jest w zbiorze liczb naturalnych, mianowicie* $x = y = z = 1$. ([Rus1]).

9.8.7 (Rusin 2003). *Równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 4$ *nie ma rozwiązań całkowitych.* ([Rus1], porównaj 9.5.1).

9.8.8 (Rusin 2003)**.** *Istnieje dokładnie* 111 *liczb naturalnych n mniejszych od* 200*, dla których równanie $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = n$ ma rozwiązanie w zbiorze niezerowych liczb całkowitych. Są to następujące liczby:*

$$\begin{gathered}3, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 29, 30, 31, 35, 36, 38, 40,\\ 41, 44, 47, 51, 53, 54, 57, 62, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 77,\\ 83, 84, 86, 87, 92, 94, 96, 98, 99,\\ 101, 102, 103, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 112, 113, 116, 117, 119, 120,\\ 122, 123, 124, 126, 127, 128, 129, 130, 132, 133, 136,\\ 142, 143, 145, 147, 148, 149, 151, 154, 155, 156, 158, 159, 160,\\ 161, 162, 164, 166, 167, 172, 174, 175, 177, 178,\\ 181, 185, 186, 187, 189, 190, 191, 192, 195, 196, 197.\end{gathered}$$

Dla każdej z tych liczb, oprócz liczby 5*, rozważane równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań prymitywnych. To samo dotyczy równania $\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz} = n$.* ([Rus1]).

9.8.9 (Rusin 2003)**.** *Równanie $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 112$ ma rozwiązanie w zbiorze niezerowych liczb całkowitych. Najprostszym rozwiązaniem jest*

$$\begin{aligned}x &= 444882220325179840803472420042062236091767720844845203037\\ &\qquad 340381653808676781078204185344064777425\\ y &= 180001063934056147663194703762128694791524068497132348 1\\ &\qquad 294582383858472523311320365128373281158\\ z &= -1331809157685411330016283859165784168699351995995914 9\\ &\qquad 0705599880265389090819596498612052018 60.\end{aligned}$$

Występują tu liczby mające około 90 *cyfr. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy zamiast liczby* 112 *rozpatrzymy liczby* 122*,* 130*,* 133*,* 142*,* 164*,* 177*,* 187 *i* 190*.* ([Rus1]).

Udowodniliśmy (patrz 9.3.6), że jeśli x, y, z są liczbami naturalnymi takimi, że liczba $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ jest naturalna, to xyz jest sześcianem liczby naturalnej. Co się stanie, gdy rozważymy ten sam problem w przypadku, gdy x, y, z są niezerowymi liczbami całkowitymi? Zanotujmy:

9.8.10. *Niech x, y, z będą niezerowymi liczbami całkowitymi takimi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ jest liczbą całkowitą. Czy wtedy xyz jest sześcianem liczby całkowitej?* (27.03.2007; nie znam odpowiedzi).

9.8.11. *Niech $a, b, c \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Jeśli $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$, to abc jest sześcianem liczby całkowitej.* ([OM] Bośnia-Hercegowina 2005).

9.8.12. *Jeżeli liczby $a, b, c, \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ są całkowite, to $|a| = |b| = |c|$.* ([TTjs] 1995).

9.8.13. *Jeśli x, y, z są niezerowymi liczbami całkowitymi takimi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$, to żadna z liczb $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$ nie jest całkowita.* ([Mat] 4/59 214).

---

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

9.9 Zbiór A_4

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że A_4 jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych postaci $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}$, gdzie $x, y, z, t \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 9.4.5), że zbiór A_4 jest nieskończony.

9.9.1. *Przykłady pewnych liczb naturalnych* $n \leqslant 30$ *postaci* $n = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}$, *gdzie* x, y, z, t *są liczbami naturalnymi. Dla każdej takiej liczby* n *podano jej pewne czwórki* (x, y, z, t) *spełniające warunek* $\mathrm{nwd}(x, y, z, t) = 1$.

(4) $(1, 1, 1, 1)$;

(5) $(1, 2, 1, 2), (1, 2, 4, 2)$;

(6) $(1, 1, 2, 4), (1, 2, 2, 4), (1, 6, 4, 3), (2, 10, 4, 5), (3, 18, 6, 4)$;

(7) $(6, 45, 30, 25), (2, 2, 12, 9), (10, 12, 45, 50), (12, 45, 50, 60), (4, 48, 18, 9)$;

(9) $(1, 3, 18, 4), (1, 6, 18, 4), (2, 6, 36, 9), (4, 40, 32, 5), (3, 18, 4, 12)$;

(10) $(5, 150, 36, 9), (6, 12, 45, 50), (9, 18, 20, 75), (6, 180, 45, 25), (12, 45, 90, 100)$;

(11) $(1, 2, 12, 9), (4, 48, 72, 9), (2, 60, 9, 5), (10, 372, 180, 31), (7, 294, 84, 36)$;

(12) $(1, 35, 25, 7), (3, 45, 15, 25), (5, 175, 25, 7), (9, 63, 245, 75), (5, 75, 9, 15)$;

(13), $(3, 36, 24, 32), (1, 10, 25, 10), (4, 40, 160, 25), (4, 16, 160, 25), (12, 18, 264, 121)$;

(14) $(4, 5, 150, 36), (2, 10, 20, 25), (4, 9, 162, 18), (4, 20, 25, 50), (1, 18, 4, 9)$;

(15) $(2, 105, 50, 21), (1, 10, 25, 2), (10, 145, 50, 116), (6, 468, 54, 13), (8, 160, 175, 98)$;

(17) $(3, 126, 18, 28), (9, 22, 242, 132), (4, 9, 162, 12), (2, 36, 81, 6), (9, 22, 12, 132)$;

(18) $(4, 60, 225, 54), (10, 350, 28, 49), (4, 140, 245, 50), (10, 150, 36, 135), (4, 15, 225, 54)$;

(19) $(10, 42, 180, 175), (4, 240, 72, 5), (9, 14, 245, 150), (2, 396, 121, 18), (3, 180, 144, 10)$;

(20) $(5, 5, 225, 81), (9, 405, 25, 25), (9, 405, 25, 9), (5, 225, 81, 5), (9, 405, 405, 25)$;

(21) $(3, 198, 36, 44), (2, 132, 9, 11), (6, 252, 63, 98), (6, 396, 484, 33), (1, 4, 48, 18)$;

(22) $(4, 39, 169, 78), (2, 60, 9, 30), (12, 20, 75, 250), (1, 30, 100, 15), (5, 450, 500, 36)$;

(23) $(3, 90, 15, 50), (5, 450, 324, 18), (4, 336, 18, 7), (1, 30, 100, 6), (10, 100, 375, 18)$;

(25) $(4, 5, 150, 90), (6, 396, 99, 121), (4, 240, 18, 45), (3, 90, 4, 5), (6, 180, 225, 10)$;

(26) $(5, 450, 150, 108), (4, 35, 294, 90), (5, 75, 18, 108), (5, 75, 450, 108), (3, 495, 450, 44)$;

(27) $(4, 55, 242, 10), (4, 420, 147, 90), (7, 15, 126, 180), (7, 10, 84, 180), (2, 372, 36, 31)$;

(28) $(1, 3, 9, 27), (3, 369, 27, 41)$;

(29) $(1, 18, 12, 27), (3, 114, 36, 76), (2, 36, 81, 3), (4, 9, 162, 6), (4, 9, 162, 108)$;

(30) $(2, 84, 252, 49), (4, 55, 242, 110), (10, 44, 20, 275), (4, 180, 25, 90), (2, 6, 252, 49)$ (Maple).

9.9.2. *Liczby naturalne* $n \leqslant 100$ *należące do zbioru* A_4.

$$4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19,$$
$$20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39,$$
$$41, 42, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 57,$$
$$61, 62, 63, 67, 68, 70, 71, 73, 75, 76, 77,$$
$$82, 84, 90, 91, 93, 97, 98 \text{ (Maple)}.$$

Nie wiem czy to są wszystkie liczby naturalne (*mniejsze od* 100) *o tej własności.*

Z obliczeń za pomocą Maple nasuwają się następujące pytania, na które nie znam odpowiedzi.

9.9.3. *Czy prawdą jest, że jeśli $n \in A_4$, to $8 \nmid n$?* (31.03.2007).

9.9.4. *Wiadomo, że liczby $7, 10, 17, 18, 19, 20, 25, 26, 27, 30$ są postaci $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}$, gdzie $x, y, z, t \in \mathbb{N}$. Czy dla tych liczb istnieją takie czwórki (x, y, z, t), że co najmniej jedna z liczb x, y, z, t jest równa 1?* (31.03.2007).

9.9.5. *Rozpatrzmy równanie $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = m$.*

(1) *Jeśli $m = 1$, to równanie to nie ma rozwiązań naturalnych. Ma natomiast nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze niezerowych liczb całkowitych.*

(2) *Dla $m = 2$ i $m = 3$ nie ma rozwiązań naturalnych.*

(3) *Jeśli $m = 4$, to każde naturalne rozwiązanie jest postaci (n, n, n, n), $n \in \mathbb{N}$.*

([Mat] 3/57 13, [S64] 141-142).

Wiemy (patrz 9.3.4), że zbiór A_3 pokrywa się ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych postaci $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{N}$. Czy coś podobnego zachodzi dla liczb naturalnych należących do zbioru A_4? Wiemy (patrz 9.1.7), że każda liczba naturalna postaci $\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, należy do zbioru A_4. Czy każdą liczbę naturalną ze zbioru A_4 można tak przedstawić? Udowodnimy, że tak nie jest.

9.9.6. *Liczba 5 należy do zbioru A_4 i nie jest postaci $\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.*

D. Ponieważ $5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{2}{1}$, więc $5 \in A_4$. Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne a, b, c, d takie, że $5 = \frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd}$. Skracając ewentualnie przez największy wspólny dzielnik, możemy założyć, że $\text{nwd}(a, b, c, d) = 1$. Mamy więc równość

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 5abcd.$$

Jeśli liczba całkowita u nie jest podzielna przez 5, to (na mocy małego twierdzenia Fermata)

$$u^4 \equiv 1 \pmod 5.$$

W naszym przypadku $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \equiv 0 \pmod 5$. Każda więc z liczb a, b, c, d musi być podzielna przez 5. Jest to jednak sprzeczne z tym, że $\text{nwd}(a, b, c, d) = 1$. ⊠

Literatura

[Bond] A. V. Bondarenko, *Investigation of a class of Diophantine equations*, (po rosyjsku), Ukrain Math. Zh. 52(6)(2000), 831-836.

[BrG] A. Bremner, R. K. Guy, *Two more representation problems*, Proc. Edin. Math. Soc., 40(1997), 1-17.

[Crux] Crux Mathematicorum, Canadian Mathematical Society, popolarne matematyczne czasopismo kanadyjskie.

[Dofs] E. Dofs, *Solutions of $x^3 + y^3 + z^3 = nxyz$*, Acta Mathematica, 73(3)(1995), 201-213.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Rus1] D. Rusin, *For which value of n is $a/b + b/c + c/a = n$ solvable?*, July, August 2003. `http://www.math.niu.edu/~rusin/reserach-math/abcn/`.

[Rus2] D. Rusin, *Small solutions for $a/b + b/c + c/a = n$*, July, August 2003. `http://www.math.niu.edu/~rusin/reserach-math/abcn/smollsols`.

[S64] W. Sierpiński, *200 Zadań z Elementarnej Teorii Liczb*, Biblioteczka Matematyczna 17, PZWS, Warszawa, 1964.

[TTjs] Tournament of the Towns, Junior, Spring.