
Olsztyn, Toruń, 2011

Podróże po Imperium Liczb

15. Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria

Andrzej Nowicki

<http://www.mat.uni.torun.pl/~anow>

16 kwietnia 2013

Wstęp	1
1 Ciągi, funkcje i działania	5
1.1 Ciągi Langforda	5
1.2 Zadania o skończonych ciągach liczb naturalnych	6
1.3 Zadania z nieskończonymi ciągami liczb naturalnych	8
1.4 Liczby 6174 oraz 495 i inne	10
1.5 (A,B,n)-ciągi	16
1.6 Funkcje z \mathbb{N} do \mathbb{N} oraz z \mathbb{N}_0 do \mathbb{N}_0	25
1.7 Funkcje z \mathbb{N}_0 do \mathbb{N}_0 spełniające równość $f(f(n)) = n + a$	25
1.8 Funkcje z \mathbb{Z} do \mathbb{Z}	27
1.9 Funkcje z \mathbb{Z} do \mathbb{Z} spełniające równość $f(f(n)) = n + a$	28
1.10 Działania	29
2 Ciągi komplementarne	31
2.1 Ciąg f^*	33
2.2 Przykłady ciągów postaci f^*	39
2.3 Ciągi komplementarne	43
2.4 Twierdzenia Lambeka i Mosera	44
2.5 Zastosowania twierdzeń Lambeka i Mosera	46
2.6 Zastosowania dla liczb postaci $[xn]$	50
3 Zbiory i rodziny ich podzbiorów	53
3.1 Podzbiory zbioru liczb naturalnych	53
3.2 Podzbiory zbioru liczb całkowitych	54
3.3 Rodziny podzbiorów skończonych zbiorów	55
3.4 Rozbicie zbioru na podzbiory	56
3.5 Różne fakty i zadania o zbiorach	58

4	Zasada szufladkowa Dirichleta	59
4.1	Początkowe zadania	59
4.2	Zadania o znanych	61
4.3	Zadania o liczbach z sumami, różnicami i iloczynami	62
4.4	Zadania o liczbach i podzielności	64
4.5	Nierówności i zasada szufladkowa	69
4.6	Zadania różne	70
5	Tablice liczbowe	71
5.1	Prostokątne tablice z liczbami	71
5.2	Kwadraty magiczne stopnia 3	72
5.3	Kwadraty magiczne stopnia 4	74
5.4	Kwadraty magiczne z liczbami pierwszymi	79
5.5	Dodatkowe informacje o kwadratach magicznych	80
5.6	Trójkątne tablice liczbowe	81
5.7	Konikówka i szachownica	81
5.8	Liczby na tablicy	85
5.9	Liczby na okręgu	86
5.10	Żetony	87
5.11	Piątek trzynastego	87
6	Sumy i iloczyny	89
6.1	Suma równa iloczynowi; przykłady	89
6.2	Suma równa iloczynowi; własności	93
6.3	Suma równa iloczynowi; liczby całkowite	96
6.4	Suma równa iloczynowi; liczby wymierne	97
6.5	Suma równa iloczynowi; liczby rzeczywiste	99
6.6	Iloczyn minus suma	99
6.7	Iloczyn równy podwojonej sumie	100
6.8	Iloczyn równy m-krotnej sumie	102
6.9	Różne fakty i zadania	105
7	Partycje	107
7.1	Nieuporządkowane sumy ustalonej długości	107
7.2	Uporządkowane sumy ustalonej długości	112
7.3	Partycje i liczby $p(n)$	114
7.4	Partycje, granice i szeregi generujące	117
7.5	Grafy Ferrersa i operacja sprzężenia	119
7.6	Liczby partycji szczególnej postaci	121
7.7	Liczby $p(n)$ i relacja podzielności	123
8	Skończone ciągi i bezwzględna wartość	125
8.1	Początkowe informacje o funkcjach D i L	126
8.2	Cztery liczby i funkcje D , L	127
8.3	Czteroelementowe ciągi dowolnej rangi	129
8.4	Czteroelementowe ciągi nieskończonej rangi	133

8.5	Ciągi n -elementowe	134
9	Punkty kratowe	139
9.1	Punkty kratowe na prostych i odcinkach	139
9.2	Wielokąty i punkty kratowe (bez pól)	140
9.3	Pola wielokątów i punkty kratowe	141
9.4	Koło i punkty kratowe	142
9.5	Punkty wymierne na okręgu	143
9.6	Różne fakty i zadania o punktach kratowych	144
10	Trójkąt	145
10.1	Boki trójkąta	146
10.2	Liczby $u_a = p - a$, $u_b = p - b$ i $u_c = p - c$	148
10.3	Środkowe, dwusieczne i wysokości	149
10.4	Promienie okręgów dopisanych	151
10.5	Kąty i funkcje trygonometryczne	151
10.6	Odległości punktu od wierzchołków	156
10.7	Pole trójkąta	157
10.8	Trójkąty Herona	158
10.9	Różne fakty i zadania o trójkątach	162
11	Zagadnienia geometryczne	163
11.1	Punkty i proste na płaszczyźnie	163
11.2	Podział płaszczyzny i przestrzeni	165
11.3	Konstrukcje geometryczne	166
11.4	Prostokąty i kwadraty	166
11.5	Czworokąty	167
11.6	Wielokąty wypukłe	168
11.7	Różne wielokąty	169
11.8	Wielościany wypukłe	170
11.9	Okręgi	174
11.10	Różne fakty i zadania geometryczne	174
12	Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych	175
12.1	Podzbiory gęste	175
12.2	Podzbiory brzegowe	176
12.3	Podzbiory nigdziegęste	176
12.4	Podzbiory gęste w przestrzeniach metrycznych	177
12.5	Gęstość podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych	178
12.6	Lematy	180
12.7	Twierdzenie Kroneckera	182
12.8	Naturalna gęstość	187
12.9	Gęste zbiory ułamków	192
12.10	Ułamkowa gęstość zbioru liczb pierwszych	198
12.11	Zbiory gęste i ciągi liczb naturalnych	200
12.12	Inne przykłady zbiorów gęstych	202

Spis cytowanej literatury	205
Skorowidz nazwisk	212
Skorowidz	216

*Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Wydział Matematyki i Informatyki, Toruń
Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn*

Skorowidz

- Ahlgren S., 124
Alder H.L., 205
Alsina C., 205
Alter R., 80
Andžāns A., 205
Andreescu T., 205, 210
Andrews G.E., 118, 122, 205
Andrica D., 205
Atkin A.O.L., 124
Aubel von., 162
- Bachurska W., 205
Balog A., 24, 205
Bankow K.G., 186
Beardon A.F., 80
Beatta, 50
Bednarek W., 205
Behforooz H., 205
Belov A., 206
Bendukidze A.D., 166
Bennett M., 96
Benyi A., 161
Berent K., 4
Berger E., 166
Berndt B.C., 205
Bernik V.I., 205
Bilchev S.J., 162
Blažerski Zb., 162
Bobiński Z., 70, 142, 163, 205, 208
Boltianski W.G., 70, 173
Bradley C.J., 161
Brokos J., 142, 144, 206
Bronstein J., 56
Browkin J., 205
Brown K., 80
Brown M.L., 96
Brudno A.L., 166
Bryński M., 166, 206
- Ciesielska D., 206
Ciesielski K., 53, 206
Cohen D., 85
Cooper C.N., 192
Coppel W.A., 118, 206
Courant R., 206
Coxeter H.S.M., 173
- Dąbrowski J., 142
Davies R.O., 6
Dianni J., 173
- Dickson L.E., 24, 117, 206
Dimitri Z., 6
Djukić D., 206
Dołbylin N.P., 173
Dorobisz K., 64
Drost J.L., 124
Duda R., 206
Duijvestijn A.J.W., 167
Dumont M., 206
Dunn A., 96
Dynkin E.B., 206
- Eain G., 161
Ecker M.W., 96
Efimow M., 6
Ellis L.E., 161
Emanouilidis E., 80
Engelking R., 206
Erdős P., 55, 58, 65, 124, 189
Erickson M., 113, 118, 166, 206
Eriksson K., 118, 205
Esain A., 85
Euler, 20, 117, 121
- Federico P.J., 167
Fedorov R., 206
Feng Z., 205
Ferrers N., 119
Finan E.J., 80
Fine N.J., 161
Finsler von P., 157
Fomin D.V., 206
Freedman B., 4, 128–130, 136, 137, 206
Fuks D.B., 122, 166, 174
Furstenberg H., 189
- Galpierin G.A., 207
Galpierin W., 142
Gandhi J.M., 122
Garcia S.R., 198
Gary Y.K.K., 45
Gaszkov S.B., 168
Gelca R., 205
Genkin S.A., 206
Gerwer M.L., 72
Gik E.J., 85
Gleason A.M., 206
Gleichgewicht B., 166
Golubiew W.A., 75
Górnicki J., 70, 166

- Gouvea F.Q., 168, 207
 Gowers W.T., 189
 Graham R.L., 118, 164, 207
 Granville A., 24, 79, 207
 Green B., 79, 207
 Greenwood R.E., 206
 Griffin H., 117, 207
 Griffiths M., 52
 Grunbaum B., 142
 Gutenmacher W., 207
 Gutenmacher W.L., 210
 Guy R.K., 85, 96, 122, 161, 207

 Hadamard J., 207
 Hadwiger H., 157
 Halcke P., 18
 Halmos P., 207
 Hardy G.H., 117, 186, 207
 Hedman S., 207
 Hernander J., 85
 Heron, 158
 Hirschorn M.D., 124
 Hobby D., 200
 Hodi E., 85, 207

 Itenberg I.W., 206
 Ivanov O.A., 207

 Jadrenko M.I., 211
 Jagłom I.M., 52
 Jagubjanc A., 174
 Janković V., 206
 Jarek P., 208
 Jarnik V., 204
 Jaworski Ł., 204
 Jegorow A.A., 142, 211
 Jeleński S., 85, 207
 Jordan J.H., 161

 Kalinnikow W., 142
 Kanel-Belov A.J., 206
 Kaniel-Bielow A.J., 207
 Kapelewski M., 28
 Kaprekar D.R., 10, 15
 Kartaszow I.W., 211
 Kato K., 207
 Kedlaya K.S., 207
 Kelly L.M., 206
 Kennedy R.E., 192
 Khrabrov A.I., 207
 Klamkin M., 168
 Knuth D.E., 118, 207
 Kołodziejczyk J., 142

 Kolberg O., 123, 124
 Kordiemski B., 208
 Kostrykin A.I., 207
 Kotlarek M., 166
 Kovaldzhii A., 206
 Kowaldży A.K., 207
 Krajewski R., 72
 Krasieński T., 4
 Kronecker L., 182–185
 Krych M., 150
 Krysicki W., 173, 208
 Kułagin A.G., 118
 Kubit P., 156
 Kung S.H., 148
 Kuratowski K., 208
 Kurlandczyk L., 4, 9, 96, 207
 Kurokawa N., 207
 Kuznirenko A., 142, 168

 Lambek J., 43–45, 192
 Leeuw P., 167
 Lehmer D.H., 50
 Lehmer D.N., 192
 Li K.Y., 70
 Liu R., 97
 Loeffler D., 168
 Lopowok L.M., 170
 Luca F., 161

 MacKinnon N., 118
 Maekawa T., 148
 Magyar Z., 133, 208
 Mąkowski A., 57, 70, 80, 208
 Marciniak Zb., 173
 Martin A., 19
 Matić I., 206
 Meeus J., 206
 Melnikow O.W., 205
 Merkel J., 173
 Michajłowski W.I., 211
 Michajłow I., 106
 Michejev Yu., 166
 Miklaszewski D., 166
 Miller R., 208
 Minkowski, 144
 Mitchell D.W., 161
 Mnich W., 143, 172
 Mołczanow S.A., 206
 Mollin R.A., 118, 208
 Montgomery H.L., 118, 122, 192, 209
 Moser L., 43–45, 192
 Musztari D.Ch., 208

- Natkaniec T., 80
Niestępski J., 4
Nilmie W.D., 166
Nishiyama Y., 15
Niven I., 118, 122, 192, 209
Nodzyński P., 70, 205, 208
Nowicki A., 96, 208, 209
Nyblom M.A., 47, 48, 209
- Ono K., 123, 124
Orłow A.I., 70
- Patashnik O., 118, 207
Pawłowski H., 70, 168, 209
Pelczyński A., 8
Petrović N., 206
Pióro K., 186
Pickover C.A., 209
Piegat E., 209
Pisarewska H., 208
Pla J., 97
Podkolzin A.S., 210
Pogoda Z., 173, 206
Pohoata C., 157
Polya G., 209
Poonen B., 207
Poore D.E., 198
Prasolov V.V., 166, 210
Priday C.J., 6
Przybylska A., 137
- Rabbot Z.M., 210
Rączka J., 172
Rado R., 55
Raifaizen C.H., 148
Ramanujan, 122–124, 198
Rassias M., 174
Rath, 159
Ratliff L.J.Jr., 80
Rempała J., 205
Robbins H., 206
Robert L., 85
Rogers L.J., 122
Rokowska B., 80
Rose D., 207
Rosiak M., 70
Rosiak P., 80
Rota G-C., 122
Rotschild, 164
Rozenal A.L., 206
Rytter W., 15
Sadowiczij W.A., 210
- Saito S., 207
Sally J.D., 210
Sally Jr. P.J., 210
Sandor J., 105, 106, 161, 162, 210
Santos D.A., 70, 210
Sastry K.R.S., 161
Savchev S., 210
Sawczenko W., 6, 173
Sawin A., 166
Schinzel A., 204, 210
Schperner, 55
Schur I., 56
Selhorst-Jones V., 198
Shalaby N., 6
Shephard G.C., 142
Shirali S., 168
Shiu P., 117
Sierpiński W., 24, 111, 166, 200, 210
Silberger D.M., 200
Simon N., 198
Simons S., 162
Singmaster D., 96
Small Ch., 106
Śniatycki J., 82
Stachowski E., 210
Steinhaus H., 140, 142, 209
Stewart, 156
Stojanowski J., 70
Straszewicz S., 65, 205, 210
Strauss, 164
Street A.P., 70
Stuckless T., 6
Subbarao M.V., 122
Świątek A., 70, 205, 208
Świątkowski T., 208
Świerczek M., 168
Szarygin I., 174
Szczepański J., 206
Szemerédi E., 189
Szewelew W., 80
Szymański K., 80
- Tabacznikow S.L., 174
Tao T., 79, 207
Tattersall J.J., 117, 210
Tebay S., 19
Timman R., 124
Tołpygo A.K., 69, 206, 207
Toom A.L., 210
Trąd M., 210
Trainin J., 142
Trenkler M., 80

Trigg Ch., 210
Trost E., 210

Ullman D., 210
Uscki M., 142, 205, 208

Vaithianathan S., 80
Vakil R., 207
Vasilev N., 174
Vazzana A., 113, 118, 166, 206

Wainsztein F.W., 117
Walch R., 161
Walker R., 61
Wasilev J.B., 207
Wasilev N.B., 142, 210, 211
Wasiliew N., 207
Webb W.A., 133, 211
Weiner L.M., 80
Weitzenböck R., 157
Wiśniewski D., 186
Wiechetek A., 142
Wilson W.W., 161
Winogradow I., 211
Wisner R.J., 161
Wojciechowski J., 70
Wolstenholme J., 159
Worobjow N.N., 211
Woronin S.M., 118
Wright E.M., 117, 186, 207
Wyszenskij W.A., 211

Yashchenko I., 206

Zalewska A., 210
Zaslavsky A., 174
Zetel S.I., 211
Żołądek H., 70
Zuckerman H.S., 118, 122, 192, 209
Żuk I.K., 205
Żukowski T., 170
Zvengrowski P., 4, 211
Żwirko J., 4

Skorowidz

- bezwzględna wartość, 4, 7, 63, 72, 87, 125–137, 141, 142, 144, 158, 178, 180
- bikwadrat, 21, 76, 148, 157, 168, 193
- bok, 141, 173
- czworokąta, 167
 - kwadratu, 82, 140, 166, 167
 - trójkąta, 141, 146–148, 150, 156, 158–163, 169
 - wielokąta, 140, 168, 169, 171–173
- ciąg
- (A, B, n) , 16–24
 - f^* , 33–35, 37, 39–50
 - addytywny, 130, 132
 - arytmetyczny, 79, 80, 159, 187, 189, 195, 197
 - Cauchy'ego, 180
 - Fibonacciego, 68, 141
 - kolejnych liczb pierwszych, 39, 46
 - Langforda, 5, 6
 - liczb wymiernych, 98, 126, 128, 133, 134, 137, 175, 204
 - malejący, 8
 - monotoniczny, 8
 - niemalejący, 8, 31, 33–35, 39, 43–45
 - nieograniczony, 8, 31, 33, 34, 39, 43–45
 - nierosnący, 114
 - nieskończony, 8, 9, 31, 44, 58, 125
 - ograniczony, 34, 44, 179, 180, 183
 - okresowy, 9, 25
 - rekurencyjny, 8, 9, 132, 160, 161
 - rosnący, 8, 9, 32, 43, 58
 - rozbieżny, 25
 - skończony, 5, 6, 115, 125, 186, 189, 200
 - specjalny, 201
 - stowarzyszony, 16–19, 23, 24
 - zbieżny, 180, 187, 188
- ciągi
- komplementarne, 32, 33, 43–51
 - podobne, 7
- ciało, 134
- complementary sequences, 32, 43
- cosinus, 153, 154, 156
- cotangens, 146, 156
- cyfry, 8, 60–63, 106, 123, 190
- ostatnie, 60, 86
 - początkowe, 186, 200
 - rozwinęcia dziesiętnego, 61
- cyrkiel, 149, 150, 166
- część
- całkowita, 2, 8, 32, 33, 40–43, 46–52, 55, 68, 94, 95, 102, 112, 132, 133, 142, 169, 179, 180, 182, 187, 195, 199
 - ułamkowa, 182, 203, 204
 - wspólna zbiorów, 3, 8, 32, 43, 46, 50, 51, 53, 58, 70, 175–178, 187, 190
- czwórka liczb naturalnych, 16, 19–21, 23, 24, 90, 97, 105, 106
- czworościan, 170
- czworokąt, 163, 167
- długość partycji, 115
- diagram Younga, 119
- domknięcie zbioru, 175
- dwusieczna, 149
- działanie, 29, 30
- dzielniki, 55, 63, 64, 102, 204
- four numbers game, 125
- four numbers problem, 125
- funkcja, 29, 30, 125–127, 129, 134, 135, 163
- φ , 2, 67, 204
 - π , 40, 46, 190, 198
 - σ , 124, 204
- bijekcja, 27, 28, 30, 53, 116, 120, 174
- ciągła, 144
- nieparzysta, 27
- odwrotna, 28
- ograniczona, 125
- rosnąca, 27, 197
- różnowartościowa, 25, 26, 59
- stała, 27
- surjekcja, 25, 27
- tożsamościowa, 9, 25
- trygonometryczna, 152, 204
- wielomianowa, 197
- wklęsła, 169
- z \mathbb{N} do \mathbb{N} , 9, 25, 31, 32, 37, 43–45, 49, 51, 81
- z \mathbb{N} do \mathbb{N}_0 , 33, 39, 45
- z \mathbb{N}_0 do \mathbb{N}_0 , 25, 26
- z \mathbb{Z} do \mathbb{Z} , 27, 28
- graf Ferrersa, 119
- granica ciągu, 31, 117, 177, 180, 189, 198, 199, 202
- hiperbola, 144, 174
- hipoteza, 189
- homomorfizm pierścieni, 134, 135
- iloczyn, 62, 63, 80, 100, 103, 104

- cyfr, 61
 liczb całkowitych, 86
 liczb naturalnych, 54, 58, 63–65, 85, 86, 89, 97, 106, 148
 liczb pierwszych, 63, 191
 minus suma, 99
 nieskończony, 117
 rowny sumie, 89, 90, 93, 96–99
 iloraz, 65, 196
 IMO, 1, 58
 Longlist, 50, 57, 99, 113
 Shortlist, 7, 54, 58, 99
 indukcja matematyczna, 36, 37, 108, 110, 111, 113, 117, 128, 137, 160
 jednomian, 111
 klasa abstrakcji, 7
 koło, 142, 143, 166, 167, 174
 kolejne
 cyfry, 61
 liczby naturalne, 54, 71, 204
 wyrazy ciągu, 7, 66
 kolorowanie, 56
 kongruencja, 5, 6, 27, 28, 69, 113, 124, 128, 160
 konikówka, 81–85
 konstrukcja
 ciągu, 9, 129, 130
 geometryczna, 142, 149, 150, 166
 zbioru, 9
 krzywa, 159, 174
 eliptyczna, 159
 kula, 143, 173, 177, 178
 kwadrat, 71, 72, 82, 84, 140, 166, 167
 magiczny, 72–75, 77, 79, 80
 liczba
 444, 96
 π , 70, 133, 155, 156, 191, 192
 e , 33, 40, 46, 56, 133
 bezkwadratowa, 191
 bezogrowa, 67
 Fermata, 160, 161, 201
 Fibonacciego, 68, 117, 141, 175, 193, 201
 jedynkowa e_n , 13, 14, 67
 kwadratowa, 8, 9, 16–20, 24, 25, 48, 54, 61, 63–65, 71, 74, 99, 142, 144, 150, 160, 161, 186, 190, 193, 197
 Mersenne’a, 201
 niekwadratowa, 25, 48
 nieparzysta, 6, 9, 26, 27, 30, 57, 63, 77, 85, 113, 121, 123, 140, 141, 161, 164, 190, 194, 195
 niewymierna, 40, 50, 143, 158, 161, 182–186, 202–204
 Nivena, 192
 parzysta, 6, 25–28, 57, 61, 63, 65, 71, 77, 84, 113, 123, 128, 135, 137, 167, 187, 190, 192
 pierwsza, 16, 24, 39, 70, 79, 80, 87, 96, 103, 104, 123, 160, 175, 190
 postaci $x^2 + 1$, 197
 przestępna, 40, 46
 rzeczywista, 58, 61, 69, 70, 86, 99, 125, 127, 129, 133, 139, 143, 152, 154–156, 164
 SI, 97
 tetraedralna, 24, 197, 201
 trójkątna, 7, 22–24, 42, 48, 57, 143, 165, 197, 201
 wymierna, 97, 98, 128, 140, 144, 158, 159
 liczby
 monochromatyczne, 56
 liczby względnie pierwsze, 53, 60, 67, 124, 161, 198
 linijka, 149, 150, 166
 logarytm, 33, 40, 46, 94, 95, 102, 186, 190, 192, 198, 202
 lustrzane odbicie, 73, 79
 macierz, 72, 80
 Maple, 1, 13, 74, 77, 103–105, 113–115, 123, 130–132
 max, 99, 181, 199
 metryka, 177
 min, 179, 184
 moc zbioru, 7, 55, 63
 natural density, 187
 naturalna gęstość, 187–192, 194
 nierówność, 9, 25, 27, 57, 59, 67, 69–71, 94, 95, 98–102, 106, 116, 117, 129, 133, 140, 144, 148, 152, 154, 156, 157, 162, 164, 166–171, 181
 Ptolemeusza, 167
 nwd, 2, 55, 139
 nww, 2, 191
 obwód
 okręgu, 166
 trójkąta, 160, 161
 wielokąta, 140, 168
 odcinek, 8, 139, 143, 149, 150, 163–165, 167, 169, 173
 odległość, 139, 140, 142–144, 146, 156, 158, 162–164, 166
 okrąg, 86, 87, 143, 144, 146, 148, 151, 156, 164, 166–169, 174

- Olimpiada Matematyczna
- Anglia, 57
 - Austria, 25
 - Białoruś, 27, 174
 - Brazylia, 106
 - Bułgaria, 154
 - Chiny, 5, 6, 148
 - Czechosłowacja, 28, 104, 147, 154
 - Czechy-Słowacja, 157
 - Hiszpania, 103
 - Indie, 6, 53, 54, 63, 97
 - Irlandia, 30, 54
 - Japonia, 61
 - Kanada, 27, 67, 70
 - Korea, 153, 154
 - Leningrad, 7, 58, 72, 150, 167
 - Łotwa, 98, 99
 - Macedonia, 154
 - Moldawia, 20, 174
 - Moskwa, 8, 30, 87, 168
 - NRD, 154
 - Polska, 26, 50, 61, 94, 105, 172, 173
 - Rosja, 20, 85, 103, 169
 - St Petersburg, 7, 85, 86, 106
 - USA, 55, 62, 97, 98
 - Węgry-Izrael, 65
 - ZSRR, 9, 54, 57
- osmiokąt, 167, 169
- otwarty problem, 24
- parabola, 144
- partycja, 114–124
- samosprzężona, 121
- permutacja, 55, 89, 93, 96, 97, 163
- piątek trzynastego, 87, 88
- pięciokąt, 171
- pierścień
- $\mathbb{Z}[x]$, 134, 135
 - $\mathbb{Z}_2[x]$, 134–137
 - \mathbb{Z}_m , 134
 - bez dzielników zera, 135
 - ilorazowy, 135–137
 - z jednoznacznością rozkładu, 137
- pierwiastek wielomianu, 133, 146–149, 151
- pigeonhole principle, 59
- pochodna, 203
- podciąg, 188, 189
- podzbiór, 174, 175, 187
- nieskończony, 9, 57
 - skończony, 27, 53, 55, 57–59, 61, 63, 65, 70, 194
 - ułamkowo gęsty, 192–195, 197, 198, 202
- zbioru liczb całkowitych, 27, 54, 55
 - zbioru liczb naturalnych, 7, 9, 53, 54, 57, 58
- podzielność, 28, 47, 48, 58, 60, 62, 64–67, 69, 84, 144, 191, 192
- przez 3, 32, 47, 57, 67, 123, 124
 - przez 4, 5, 6, 47, 65, 66, 84, 97, 143
 - przez 5, 122–124
 - przez 6, 96, 113, 158
 - przez 7, 62, 124
 - przez 8, 66, 160
 - przez 9, 11
 - przez 11, 124
 - przez 13, 124
 - przez 16, 74, 164
 - przez 20, 63
 - przez 21, 67
 - przez liczbę pierwszą, 124
- pole, 82, 84, 144, 166, 167
- koła, 142
 - trójkąta, 141, 156–161, 166, 167
 - wielokąta, 141, 168
- potęga, 49, 193
- dwójki, 25, 29, 30, 55, 56, 65, 66, 70, 86, 94, 109, 129, 134, 136, 137, 160, 186, 193, 201, 202
 - liczby pierwszej, 160
 - piątki, 143
 - trójki, 56, 106, 201, 202
- prime number theorem, 198
- problem Eulera, 80
- produkt pierścieni, 134
- promień, 142, 143, 151, 166, 168, 169, 173
- prosta, 139, 165, 166, 169, 174
- Eulera, 174
 - na płaszczyźnie, 139, 141, 144, 163–166, 174
 - prostokąta, 164
 - w przestrzeni, 165
- proste, 164, 165
- prostokątne, 174
 - przecinające się, 162
 - równoległe, 165
- prostokąt, 71, 80, 166, 167
- przekątna, 72, 167–169, 173
- przekrój zbiorów, 175
- przestrzeń
- metryczna, 177
 - topologiczna, 175
- punkt, 140, 143, 156, 158, 162–168, 173, 174
- Fermata, 162
 - kratowy, 139–144, 158, 168
 - okręgu, 87, 143, 144, 168, 174
 - stały, 30

- styczności, 146, 148
 wspólny, 55, 165, 169
 wymierny, 143, 144, 158, 159
 pytanie, 24, 49, 72, 96, 105, 123, 125, 140, 159, 165
 ranga ciągu, 4, 125–134, 136, 137
 relacja typu równoważności, 7
 reszta z dzielenia, 60, 67, 128, 134
 rodzina zbiorów, 53, 55, 58
 łańcuch, 53, 55
 antyłańcuch, 53, 55
 przecinająca się, 53, 55
 równanie,
 diofantyczne, 89, 93–98, 100, 102–106
 liniowe, 116
 funkcyjne, 28
 Pella, 160
 równoległobok, 140, 141, 167, 168, 173
 rozbicie zbioru, 57, 58
 rozkład kanoniczny, 63, 114, 115
 różnica, 7–9, 60, 62, 63, 67, 70, 159, 169
 rozwiązanie
 kongruencji, 68
 monochromatyczne, 56
 niezerowe, 68
 rozwinięcie dziesiętne, 61
 siedmiokąt, 166, 169
 silnia, 55, 56, 64, 198
 sinus, 146, 147, 151, 152, 154, 204
 sinusoida, 165
 sprzężenie partycji, 119
 squarefree, 191
 średnia, 70, 168
 średnica, 86, 142
 styczna, 166
 sufit, 47
 suma, 27, 56–58, 63, 65–67, 71, 72, 78, 79, 84–86,
 99, 106, 109, 113, 124, 166, 169
 bikwadratów, 76
 cyfr, 192
 dzielników, 124
 kwadratów, 9, 73–76
 liczb bezkwadratowych, 191
 liczb naturalnych, 107, 108, 110–112, 114
 magiczna, 72–74, 79
 mnogościowa, 57, 59–61, 125, 165, 176, 177,
 190, 191
 równa iloczynowi, 89, 90, 93, 96–99
 sześciątów, 76
 wyrazów ciągu, 6, 7, 9, 66
 symbol Newtona, 54, 55, 108, 111, 139, 165, 168,
 181, 197
 system numeracji
 dowolny, 14
 dwójkowy, 9
 dziesiętny, 14
 trójkowy, 15
 uogólniony, 52
 szachownica, 81–85
 sześcian, 144, 170, 173
 sześcian liczby całkowitej, 7, 17, 20, 21, 70, 76,
 147, 193
 sześciokąt, 169, 171
 szereg, 117, 118
 tablica, 72, 85, 86
 kwadratowa, 71, 72
 nieskończona, 3, 71
 prostokątna, 71, 72
 trójkątna, 81
 tangens, 156
 tożsamość Eulera, 122
 trójkąt, 140–142, 146–150, 152, 154, 156, 158, 162,
 163, 166, 167, 169, 170, 172
 Herona, 158–160
 specjalny, 161
 ostrokatny, 152, 156
 pitagorejski, 158, 161, 192
 prostokątny, 140, 154, 159
 równoboczny, 147, 153, 162, 163
 równoramienny, 140, 154, 162, 169
 rozwartokątny, 140, 152
 wymierny, 158, 159
 trójka
 Pitagorasa, 18
 tribonacci sequence, 132, 133
 twierdzenie
 Baloga, 24
 Beatty, 50
 Bezouta, 147
 Carnota, 153, 156, 168
 Cevy, 170
 cosinusów, 156
 Eulera, 60, 67
 Freedmana, 128, 133, 134
 Greena-Tao, 79, 80
 Kroneckera, 182–185, 202, 203
 Lagrange'a, 9
 Lambeka-Mosera, 33, 44–46
 Maskeroniego, 166
 Napoleona, 162
 o trzech ciągach, 178, 180, 187, 190, 196

- Picka, 141, 142
Ptolemeusza, 167, 168
Schura, 56
sinusów, 146, 151
Szemeriediego, 189
- układ równań, 105
uzupełnienie ciągu, 32, 45, 47, 48
- warunki równoważne, 7, 27, 28, 57, 71, 84, 97, 126,
127, 134–137, 140, 142, 147, 153, 154,
156, 157, 159, 160, 164, 167, 169, 178
- wielościan, 142, 168, 170–173
wielokąt, 87, 140–142, 167–170
foremny, 140
Newtona, 168
- wielomian, 17, 22, 111, 133–137, 146, 147, 149,
151, 174, 181, 196, 197, 201
- wnętrze zbioru, 176
współczynnik wiodący, 17, 22, 181, 196, 197, 201
wyraz partycji, 115
wysokość, 149, 150
wyznacznik, 80, 158
wzór Eulera, 170–172
wzór Herona, 148, 157, 159
- zasada szufladkowa Dirichleta, 3, 59–63, 65–67,
69, 70, 172, 173
- zbiór, 29, 30, 53, 58
 \mathbb{N}_0 , 1, 9, 25, 26, 29, 54, 55, 125, 198
 \mathbb{Q}^+ , 192, 193
 \mathbb{R}^+ , 178, 180, 192, 194–196, 200, 201, 203, 204
brzegowy, 176
domknięty, 175
gęsty, 175, 177, 198, 203, 204
liczb całkowitych, 1, 27–29, 54, 134, 135
liczb kwadratowych, 16–20, 24
liczb naturalnych, 1, 31, 53, 57, 187
liczb pierwszych, 1, 16, 24, 201, 204
liczb rzeczywistych, 1, 30, 144, 155, 179
liczb wymiernych, 1, 16, 53, 58, 126, 137, 179,
204
liczb zespolonych, 1
nieprzeliczalny, 53
nieskończony, 8, 9, 25, 54, 57, 58, 79, 80, 84,
139, 144, 159–161, 164, 174, 193
nigdziegęsty, 176, 194
otwarty, 175, 176, 194
przeliczalny, 58, 165
skończony, 30, 59, 94, 100, 165, 169
wypukły, 87, 140, 167–174, 178, 179
- zbiory
- rozłączne, 56
zbiory rozłączne, 32, 43, 46, 50, 51, 53, 56–58, 163,
165, 167, 175–177, 190, 191, 194
znajomi, 61, 172