Podróże po Imperium Liczb

Część 15. Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria

Rozdział 2

---

2. Ciągi komplementarne

Andrzej Nowicki 16 kwietnia 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

2 Ciągi komplementarne

Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przypomnijmy, że w tej książce (oraz we wszystkich książkach z serii "Podróże po Imperium Liczb") najmniejszą liczbą naturalną jest jedynka. Zera nie zaliczamy do zbioru $\mathbb{N}$. Natomiast przez $\mathbb{N}_0$ oznaczamy zbiór $\mathbb{N} \cup \{0\}$ czyli zbiór wszystkich nieujemnych liczb całkowitych.

W tym rozdziale zajmować się będziemy nieskończonymi ciągami, których wszystkie wyrazy są liczbami naturalnymi lub nieujemnymi liczbami całkowitymi. Interesować nas będą głównie dwie klasy ciągów.

Do pierwszej klasy zaliczać będziemy każdy taki ciąg, który spełnia trzy warunki:

(1) wszystkie jego wyrazy są liczbami naturalnymi;

(2) jest ściśle rosnący;

(3) liczby naturalne, które nie są jego wyrazami tworzą zbiór nieskończony.

Zbiór wszystkich ciągów należących do tej pierwszej klasy oznaczać będziemy przez $\mathcal{M}$. Ciągi o wyrazach naturalnych utożsamiać będziemy z funkcjami z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Zatem, $\mathcal{M}$ jest zbiorem wszystkich takich ściśle rosnących funkcji $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla których zbiór $\mathbb{N} \smallsetminus F(\mathbb{N})$ jest nieskończony.

Do drugiej klasy zaliczać będziemy wszystkie takie nieskończone ciągi

$$f = \Big(f_1,\ f_2,\ f_3, \dots\Big),$$

które spełniają następujące trzy warunki:

(a) wszystkie wyrazy $f_1, f_2, f_3, \dots$, są nieujemnymi liczbami całkowitymi;

(b) $f_n \leqslant f_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. f jest ciągiem niemalejącym;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

W tym przypadku warunek (c) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg f jest nieograniczony. Zbiór wszystkich ciągów tej drugiej klasy oznaczać będziemy przez $\mathcal{A}$. Tego rodzaju ciągi utożsamiać będziemy z funkcjami z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Zatem, $\mathcal{A}$ jest zbiorem wszystkich niemalejących i nieograniczonych funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Elementem zbioru $\mathcal{A}$ jest na przykład ciąg

$$f = (0, 0, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 7, \dots).$$

Przez taki zapis rozumiemy, że $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 2$, itd. lub $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 2$, itd.

Wyjaśnijmy pojęcia, które będą się często pojawiały w tym rozdziale. Załóżmy, że $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest ciągiem należącym do zbioru $\mathcal{M}$ (tzn. F jest ściśle rosnącym ciągiem o wyrazach naturalnych i zbiór $\mathbb{N} \smallsetminus F(\mathbb{N})$ jest nieskończony). W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych usuńmy te wszystkie liczby, które są wyrazami ciągu F. Pozostanie nam wtedy nieskończenie wiele liczb. Powstanie nam wtedy nowy, ściśle rosnący ciąg G. Mówić będziemy, że ten nowy ciąg G jest *uzupełnieniem* ciągu F. Zauważmy, że jeśli ciąg F należy do zbioru $\mathcal{M}$, to ciąg G również do tego zbioru należy. Uzupełnieniem ciągu G jest ciąg F.

Uzupełnieniem ciągu wszystkich nieparzystych liczb naturalnych jest ciąg wszystkich parzystych liczb naturalnych. Uzupełnieniem ciągu liczb kwadratowych $(1, 4, 9, \dots)$ jest ciąg wszystkich liczb naturalnych niekwadratowych

$$(2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, \cdots).$$

Mówić będziemy, że dwa ciągi F i G są *komplementarne* lub, że *się wzajemnie uzupełniają*, jeśli należą do zbioru $\mathcal{M}$ oraz jeden z nich jest uzupełnieniem drugiego.

Powtórzmy jeszcze raz. Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami. Mówimy, że ciągi te są *komplementarne* (ang. *complementary sequences*), jeśli spełniają następujące trzy warunki:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają wspólnych wyrazów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cap G(\mathbb{N}) = \emptyset$;

(3) każda liczba naturalna jest wyrazem jednego z tych ciągów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Ciągi $F = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ i $G = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, odpowiednio liczb nieparzystych i parzystych, są komplementarne. Ciągi

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots) \quad \text{i} \quad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb naturalnych odpowiednio podzielnych i niepodzielnych przez 3, są komplementarne. Ciągi

$$F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots) \quad \text{i} \quad G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych, są komplementarne. Tego rodzaju prostych przykładów jest bardzo dużo. Spójrzmy jeszcze raz na ciągi komplementarne

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots) \quad \text{i} \quad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots).$$

Mamy tu: $F(n) = 3n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy można w jakiś podobny sposób wyrazić $G(n)$? Jaki jest wzór na n-ty wyraz ciągu G ? Taki wzór można podać:

$$G(n) = n + \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby rzeczywistej x. Część całkowita będzie się tu pojawiać bardzo często. Rozpatrzmy to samo zagadnienie dla ciągów komplementarnych

$$F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots) \quad \text{i} \quad G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots),$$

liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych. W tym przypadku $F(n) = n^2$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jaki jest wzór na n-ty wyraz ciągu G ? Można wykazać, że

$$G(n) = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

W tym rozdziale przedstawimy pewną metodę dowodzenia tego rodzaju faktów.

Wspomniane przykłady ciągów F i G były dość proste. Ciągi oznaczane przez G były uzupełnieniami odpowiednich ciągów oznaczanych przez F i dzięki temu wiedzieliśmy, że ciągi F, G są komplementarne. Czasem bywa jednak tak, że odpowiedź na pytanie czy dane dwa ciągi F, G są komplementarne, sprawia kłopoty. Ciągi $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, określone na przykład równościami

$$F(n) = n + [e^n], \quad G(n) = n + [\ln n],$$

są komplementarne. Fakt ten wymaga jednak pewnego uzasadnienia. Podobnie jest z ciągami

$$F(n) = \frac{n^2+n}{2}, \quad G(n) = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

Są to też ciągi komplementarne. W tym rozdziale podamy więcej tego typu przykładów. Przedstawimy również (wraz z dowodem) znane twierdzenie Lambeka i Mosera, z 1954 roku, o strukturze ciągów komplementarnych.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.1 Ciąg $\mathbf{f}^*$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Przypomnijmy, że $\mathcal{A}$ jest zbiorem wszystkich niemalejących i nieograniczonych ciągów, których wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Z każdym ciągiem $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, należącym do zbioru $\mathcal{A}$, stowarzyszymy w jednoznaczny sposób nowy ciąg, którego oznaczać będziemy przez f^*. Ten nowy ciąg będzie funkcją z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}_0$. Definiujmy ten ciąg następująco:

$$f^*(n) = \left|\left\{a \in \mathbb{N};\ f(a) < n\right\}\right|$$

dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. $f^*(n)$ jest liczbą wszystkich wyrazów ciągu f mniejszych od n.

Spójrzmy na ciąg

$$f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots).$$

Nie ma w tym ciągu wyrazów mniejszych od 1. Zatem $f^*(1) = 0$. Nie ma wyrazów mniejszych od 2 i nie ma mniejszych od 3. Zatem $f^*(2) = 0$ oraz $f^*(3) = 0$. Jest jeden wyraz (mianowicie $f_1 = 3$) mniejszy od 4. Mamy więc $f^*(4) = 1$. Podobnie: $f^*(5) = 1$, $f^*(6) = 2$. Dla przykładu $f^*(11) = 4$, gdyż w ciągu f są dokładnie 4 wyrazy mniejsze od 11; są to: $f_1 = 3$, $f_2 = 5$, $f_3 = 7$ oraz $f_4 = 9$. Mamy więc:

$$f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots), \quad f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots).$$

2.1.1. *Następne przykłady:*

$$\begin{array}{ll}
f = (1, 2, 3, 4, 5, \dots), & f^* = (0, 1, 2, 3, 4, \dots); \\
f = (1, 3, 5, 7, 9, \dots), & f^* = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots); \\
f = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots), & f^* = (1, 3, 5, 7, \dots); \\
f = (0, 2, 4, 6, 8, \dots), & f^* = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots); \\
f = (3, 6, 9, 12, 15, \dots), & f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, \dots).
\end{array}$$

Przedstawimy teraz kilka podstawowych własności ciągu f^*. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k, zachodzą oczywiste równoważności:

2.1.2. $$f^*(n) = 0 \iff n \leqslant f(1).$$

$$\boxed{f^*(n) = k \iff f(k) < n \leqslant f(k+1)}\,.$$

2.1.3. *Ciąg f^* jest niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Innymi słowy, jeśli $f \in \mathcal{A}$, to $f^* \in \mathcal{A}$.*

D. Jest oczywiste, że ciąg f^* jest niemalejący i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Przypuśćmy, że ciąg f^* jest ograniczony. Istnieje wtedy taka nieujemna liczba całkowita p, że $f^*(n) = p$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej n_0. Wówczas

$$n \leqslant f(p+1) \quad \text{dla} \quad n > n_0$$

(patrz 2.1.2), a to oznacza, że zbiór wszystkich liczb naturalnych, większych od n_0, jest ograniczony z góry przez liczbę $f(p+1)$; sprzeczność. ⊠

Z powyższego stwierdzenia wynika, że jeśli $f \in \mathcal{A}$, to istnieje również ciąg

$$f^{**} = (f^*)^*$$

i stąd dalej, że istnieją ciągi f^{***}, f^{****}, itd. Powróćmy do rozpatrywanego wcześniej przykładu: $f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$, $f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$. Mamy tu

$$f^{**} = (3, 5, 7, 9, 11, \dots).$$

W tym przypadku zachodzi równość $f^{**} = f$. Wykażemy, że tak jest zawsze.

2.1.4. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to* $\boxed{f^{**} = f}\,.$

D. Niech $g = f^*$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Należy udowodnić, że $g^*(n) = f(n)$. Oznaczmy: $p = g^*(n)$.

Załóżmy najpierw, że $p = 0$. W tym przypadku

$$n \leqslant g(1) = f^*(1)$$

i wobec tego $f^*(1)$ jest liczbą naturalną. Niech $m = f^*(1)$. Wtedy $n \leqslant m$ oraz $f(m) < 1$. Zatem $f(m) = 0$ i stąd $f(n) = 0$ (gdyż funkcja f jest niemalejąca). Jeśli więc $p = 0$, to $f(n) = 0 = g^*(n)$.

Niech teraz $p \geqslant 1$. Oznaczmy: $u = f^*(p)$, $v = f^*(p+1)$. Z równoważności 2.1.2 wynika, że $g(p) < n \leqslant g(p+1)$, czyli

$$f^*(p) < n \leqslant f^*(p+1),$$

a więc $u < n \leqslant v$. Mamy ponadto:

$$< p \leqslant f(u+1), \qquad f(v) < p+1 \leqslant f(v+1).$$

Ponieważ $u + 1 \leqslant n \leqslant v$ oraz ciąg f jest niemalejący, więc

$$f(u+1) \leqslant f(n) \leqslant f(v).$$

Z tych nierówności otrzymujemy: $f(n) \leqslant f(v) < p + 1$, więc $f(n) \leqslant p$ oraz

$$p \leqslant f(u+1) \leqslant f(n),$$

czyli $p \leqslant f(n)$. Zatem $f(n) = p = g^*(n)$. ⊠

Przedstawmy teraz kilka następnych własności ciągów postaci f^*.

2.1.5. *Niech $f \in \mathcal{A}$ i niech $m, n \in \mathbb{N}$. Jeśli $f(m) < n$, to $f^*(n) \geqslant m$.*

D. Oznaczmy $g = f^*$ i niech $b = g(n)$. Wtedy $n \leqslant f(b+1)$, stąd $f(m) < n \leqslant f(b+1)$ i stąd $m < b+1$ (ponieważ funkcja f jest niemalejąca). Zatem $m < g(n)+1$, czyli $m \leqslant f^*(n)$. ⊠

2.1.6. *Niech $f \in \mathcal{A}$. Nie ma takich liczb naturalnych m, n, dla których zachodzą jednocześnie dwie nierówności $f(m) \geqslant n$ oraz $f^*(n) \geqslant m$.*

D. Przypuśćmy, że takie liczby naturalne m, n istnieją. Oznaczmy: $g = f^*$, $a = f(m)$, $b = g(n)$. Mamy wtedy $a \geqslant n$, $b \geqslant m$ oraz $g^* = f$ (patrz 2.1.4) i z równoważności 2.1.2 otrzymujemy nierówności

$$g(a) < m \leqslant g(a+1), \quad f(b) < n \leqslant f(b+1).$$

Zatem $f(b) < n \leqslant a = f(m)$ i stąd $b < m$ (ponieważ funkcja f jest niemalejąca). Otrzymaliśmy sprzeczność; założyliśmy bowiem, że $b \geqslant m$. To kończy dowód.

Do sprzeczności można również dojść innym sposobem. Mamy $g(a) < m \leqslant b = g(n)$, więc $a < n$ (ponieważ funkcja g jest niemalejąca), wbrew temu, że $a \geqslant n$. ⊠

2.1.7. *Niech $f \in \mathcal{A}$. Dla dowolnych liczb naturalnych m, n zachodzi dokładnie jedna z nierówności:*

$$f(m) < n \quad \textit{lub} \quad f^*(n) < m.$$

D. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Jeśli $f(m) < n$, to $f^*(n) \geqslant m$ (patrz 2.1.5). Jeśli natomiast $f(m) \geqslant n$, to - na mocy 2.1.6 - mamy nierówność $f^*(n) < m$. ⊠

2.1.8. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to dokładnie jedna z liczb $f(1)$, $f^*(1)$ jest równa zero.*

D. Zastosujmy 2.1.7 dla $m = n = 1$. Zachodzi dokładnie jedna z nierówności $f(1) < 1$ lub $f^*(1) < 1$. Zachodzi więc dokładnie jedna z równości $f(1) = 0$ lub $f^*(1) = 0$. ⊠

2.1.9. *Jeśli $f \in \mathcal{A}$, to $f^*(n) \neq f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

D. Przypuśćmy, że istnieje taka liczba naturalna n, dla której zachodzi równość $f^*(n) = f(n)$. Jeśli $f(n) < n$, to (patrz 2.1.5) $f^*(n) \geqslant n$ i wtedy mamy sprzeczność. Jeśli natomiast $f(n) \geqslant n$, to $f^*(n) < n$ i znowu otrzymujemy sprzeczność. ⊠

2.1.10. *Niech f będzie taką funkcją należącą do zbioru $\mathcal{A}$, że $f^*(1) \geqslant 1$. Oznaczmy:*

$$a_n = f^*(n) \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ są liczbami naturalnymi i dla każdej liczby naturalnej n mamy:

(1) $f(a_n) < n$;

(2) $f(a_n + 1) \geqslant n$;

(3) $f(a_n + 1) > f(a_n)$;

(4) $a_{f(n)} < n$, *gdy* $f(n) \geqslant 1$;

(5) $f(1) = f(2) = \cdots = f(a_1) = 0$ *oraz* $f(a_1 + 1) > 0$;

(6) *Jeśli* $a_{n+1} > a_n$, *to* $f(a_n + 1) = f(a_n + 2) = \cdots = f(a_{n+1}) = n$.

D. Przez U_n oznaczać będziemy zbiór tych wszystkich liczb naturalnych b, dla których zachodzi nierówność $f(b) < n$. Wiemy, że $a_n = f^*(n) = |U_n|$, a zatem

$$U_n = \Big\{1, 2, \dots, a_n\Big\}.$$

W szczególności, $a_n \in U_n$ oraz $a_n + 1 \notin U_n$, więc $f(a_n) < n$ oraz $f(a_n+1) \geqslant n$ i ponadto, $f(a_n+1) > f(a_n)$, gdyż

$$f(a_n + 1) \geqslant n > f(a_n).$$

W ten sposób wykazaliśmy własności $(1), (2)$ i (3). Ponieważ $f(n) \geqslant f(n)$, więc (na mocy 2.1.6) $f^*(f(n)) < n$, czyli $a_{f(n)} < n$ o ile $f(n) \in \mathbb{N}$; mamy więc własność (4). Następna własność (5) jest oczywista.

Załóżmy, że $a_{n+1} > a_n$. Wtedy z (2) i (3) mamy nierówności

$$n \leqslant f(a_n + 1) \leqslant f(a_n + 2) \leqslant \dots \leqslant f(a_{n+1}) < n + 1,$$

z których wynika własność (6). ⊠

2.1.11. *Niech h będzie dowolnym ciągiem o wyrazach naturalnych i niech f, g będą takimi ciągami należącymi do zbioru $\mathcal{A}$, że*

$$f^*(n) = f(n) + h(n), \quad g^*(n) = g(n) + h(n) \quad dla \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $f = g$.

D. Z założeń wynika, że $f^*(1) \geqslant 1$ i $g^*(1) \geqslant 1$. Możemy więc korzystać z własności podanych w 2.1.10. Oznaczmy: $a_n = f^*(n)$, $b_n = g^*(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykażemy (metodą indukcji matematycznej), że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą następujące równości:

$$(r) \qquad \begin{cases} a_n = b_n \quad \text{oraz} \\ f(i) = g(i) \ \text{ dla } \ i \leqslant a_n. \end{cases}$$

Ponieważ $f(1) = 0$ oraz $g(1) = 0$ (patrz 2.1.10), więc $a_1 = b_1$, gdyż

$$a_1 = f(1) + h(1) = h(1) = g(1) + h(1) = b_1.$$

Ponadto, $f(i) = g(i) = 0$ dla wszystkich $i \leqslant a_1$. Jest więc jasne, że równości (r) zachodzą dla $n = 1$.

Załóżmy teraz, że $n \geqslant 1$ jest taką liczbą naturalną, dla której zachodzą równości (r) i rozpatrzmy dwa przypadki.

`Przypadek 1`. Załóżmy, że $n+1 \leqslant a_n$. W tym przypadku $f(n+1) = g(n+1)$ (ponieważ $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_n$) i wobec tego $a_{n+1} = f(n+1) + h(n+1) = g(n+1) + h(n+1) = b_{n+1}$. Mamy więc równość $a_{n+1} = b_{n+1}$.

Przypomnijmy, że $a_{n+1} \geqslant a_n$. Jeśli $a_{n+1} = a_n$, to $b_{n+1} = b_n$ (gdyż $b_{n+1} = a_{n+1} = a_n = b_n$) i wtedy $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$.

Jeśli natomiast $a_{n+1} > a_n$, to $b_{n+1} > b_n$ (gdyż $b_{n+1} = a_{n+1}$ oraz $b_n = a_n$) i wtedy (patrz 2.1.10) zachodzą równości

$$f(a_n+1) = f(a_n+2) = \dots = f(a_{n+1}) = n = g(b_n+1) = g(b_n+2) = \dots = g(b_{n+1}),$$

a zatem $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$. Wykazaliśmy, że - w rozważanym przypadku - dla liczby $n+1$ zachodzą równości (r).

`Przypadek 2`. Załóżmy, że $n + 1 > a_n$. W tym przypadku a_{n+1} jest ostro większe od a_n. Istotnie:

$$a_{n+1} = f(n+1) + h(n+1) \leqslant f(a_n + 1) + h(n+1) \leqslant n + h(n+1) \leqslant n + 1 > a_n.$$

Wykorzystaliśmy nierówność $f(a_n+1) \leqslant n$, podaną w 2.1.10(2). Zauważmy, że wykazaliśmy więcej:

$$a_{n+1} \geqslant n+1 > a_n.$$

Ponieważ $b_n = a_n$, więc mamy również nierówność $n+1 > b_n$, z której wynika (co wykazujemy tak samo jak powyżej), że $b_{n+1} \geqslant n+1 > b_n$. Korzystamy z 2.1.10(6) i mamy:

$$f(a_n+1) = f(a_n+2) = \cdots = f(a_{n+1}) = n = g(b_n+1) = g(b_n+2) = \cdots = g(b_{n+1}).$$

Ale $a_n + 1 \leqslant n+1 \leqslant a_{n+1}$ oraz $b_n + 1 \leqslant n+1 \leqslant b_{n+1}$, więc $f(n+1) = n = g(n+1)$ i wobec tego $a_{n+1} = b_{n+1}$, gdyż $a_{n+1} = f(n+1) + h(n+1) = g(n+1) + h(n+1) = b_{n+1}$. Ponadto $f(i) = g(i)$ dla $i \leqslant a_{n+1}$. Zatem, w rozważanym przypadku, dla liczby $n+1$ również zachodzą równości (r).

W ten sposób wykazaliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzą równości (r). Dla każdej więc liczby naturalnej n mamy: $f(n) = a_n - h(n) = b_n - h(n) = g(n)$, a więc $f = g$. ⊠

2.1.12. *Dla każdego niemalejącego ciągu h, o wyrazach naturalnych, istnieje dokładnie jeden taki ciąg $f \in \mathcal{A}$, że*

$$f^*(n) = f(n) + h(n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

D. Dla każdej liczby naturalnej n zdefiniujemy parę (a_n, f_n), w której a_n będzie liczbą naturalną, f_n będzie niemalejącą funkcją ze zbioru U_n do zbioru $\mathbb{N}_0$, gdzie $U_n = \{1, 2, \dots, a_n\}$ i spełnione będą następujące warunki:

$$(w) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (a) & a_n \geqslant n; & \\ (b) & f_n(a_n) < n; & \\ (c) & a_n = f_n(n) + h(n); & \\ (d) & \text{jeśli } \ n \geqslant 2, \ \text{to;} & \\ & (d_1) \quad a_{n-1} \leqslant a_n, & \\ & (d_2) \quad f_n(i) = f_{n-1}(i) \ \text{ dla } \ i \in U_{n-1}; & \\ & (d_3) \quad \text{jeśli dodatkowo } a_{n-1} < a_n, \ \text{ to } f_n(i) = n-1 \ \text{ dla } \ i \in A_n \smallsetminus A_{n-1}. & \end{array} \right.$$

Pary te zdefiniujemy w sposób indukcyjny.

Konstrukcja pary (a_1, f_1). Przyjmujemy, że $a_1 = h(1)$ oraz

$$f_1(1) = f_1(2) = \cdots = f_1(a_1) = 0.$$

Wtedy oczywiście $a_1 \geqslant 1$, $f_1(a_1) < 1$ oraz $a_1 = f(1) + h(1)$. Dla $n = 1$ spełnione są więc wszystkie warunki oznaczone przez (w).

Konstrukcja pary (a_2, f_2). Zachodzić mogą dwa następujące przypadki.

`Przypadek 1`. Załóżmy, że $2 \leqslant a_1$. W tym przypadku przyjmujemy, że

$$a_2 = h(2).$$

Ponieważ ciąg h jest niemalejący, więc $a_2 \geqslant a_1$ (bo $a_2 = h(2) \geqslant h(1) = a_1$). Ponadto, $a_2 \geqslant 2$ (gdyż $a_2 \geqslant a_1 \geqslant 2$). Definiujemy funkcję $f_2 : U_2 \to \mathbb{N}_0$, przyjmując:

$$f_2(i) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{gdy } \ i \in U_1, \\ 1, & \text{gdy } \ i \in U_2 \smallsetminus U_1. \end{array} \right.$$

Jest jasne, że funkcja f_2 jest niemalejąca oraz, że $f_2(a_2) < 2$. W rozważanym przypadku liczba 2 należy do zbioru U_1. Zatem $f_2(2) = 0$ i wobec tego

$$a_2 = h(2) = f_2(2) + h(2).$$

Mamy więc parę (a_2, f_2) spełniającą warunki (w).

`Przypadek 2`. Załóżmy, że $2 > a_1$. W tym przypadku a_1 jest równe 1. Przyjmujemy:

$$a_2 = 1 + h(2).$$

Mamy wtedy: $a_2 \geqslant 2$ oraz $a_2 > a_1$. Funkcję $f_2 : U_2 \to \mathbb{N}_0$ definiujemy tak samo jak powyżej, tzn.

$$f_2(i) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \ i \in U_1, \\ 1, & \text{gdy } \ i \in U_2 \smallsetminus U_1. \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja f_2 jest niemalejąca oraz, że $f_2(a_2) < 2$. W rozważanym przypadku liczba 2 nie należy do zbioru U_1; należy natomiast do zbioru U_2. Zatem $f_2(2) = 1$ i wobec tego

$$a_2 = 1 + h(2) = f_2(2) + h(2).$$

Mamy więc parę (a_2, f_2) spełniającą warunki (w).

Krok indukcyjny. Niech $n \geqslant 2$ i załóżmy, że zdefiniowane są pary $(a_1, f_1), (a_2, f_2), \ldots, (a_n, f_n)$ spełniające odpowiednie warunki (w). Zdefiniujemy parę $\big(a_{n+1},\ f_{n+1}\big)$. W tym celu rozpatrzmy dwa następujące przypadki.

`Przypadek 1`. Załóżmy najpierw, że $n+1 \leqslant a_n$. W tym przypadku $n+1 \in U_n$ i wobec tego wiemy co to jest $f_n(n+1)$. Definiujemy:

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1).$$

Ponieważ funkcje f_n i h są niemalejące, więc

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1) \geqslant f_n(n) + h(n) = a_n \geqslant n+1,$$

a zatem $a_{n+1} \geqslant a_n$ oraz $a_{n+1} \geqslant n+1$. Definiujemy funkcję $f_{n+1} : U_{n+1} \to \mathbb{N}_0$, przyjmując:

$$f_{n+1}(i) = \begin{cases} f_n(i), & \text{gdy } \ i \in U_n, \\ n, & \text{gdy } \ i \in U_{n+1} \smallsetminus U_n. \end{cases}$$

Przypomnijmy, że $U_{n+1} = \{1, 2, \ldots, a_{n+1}\}$. Jeśli $a_{n+1} = a_n$, to $U_{n+1} = U_n$ i wtedy funkcje f_n i f_{n+1} są identyczne; w szczególności wtedy funkcja f_{n+1} jest niemalejąca oraz

$$f_{n+1}(a_{n+1}) = f_n(a_n) < n < n+1.$$

Jeśli natomiast $a_{n+1} > a_n$, to funkcja f_{n+1} jest również niemalejąca, gdyż wtedy

$$f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) < n = f_{n+1}(a_n+1) = f_{n+1}(a_n+2) = \cdots = f_{n+1}(a_{n+1}).$$

Ponadto, $f_{n+1}(a_{n+1}) \leqslant n < n+1$ oraz

$$a_{n+1} = f_n(n+1) + h(n+1) = f_{n+1}(n+1) + h(n+1).$$

W rozważanym przypadku para $(a_{n+1},\ f_{n+1})$ spełnia więc warunki (w).

`Przypadek 2`. Załóżmy, że $n+1 > a_n$. Przyjmujemy:

$$a_{n+1} = n + h(n+1).$$

Mamy wtedy $a_{n+1} \geqslant n+1 > a_n$, a zatem $a_{n+1} \geqslant n+1$ oraz $a_{n+1} > a_n$. Funkcję $f_{n+1} : U_{n+1} \to \mathbb{N}_0$ definiujemy tak samo jak powyżej, tzn.

$$f_{n+1}(i) = \begin{cases} f_n(i), & \text{gdy } i \in U_n, \\ n, & \text{gdy } i \in U_{n+1} \smallsetminus U_n. \end{cases}$$

Jest jasne, że funkcja f_n jest niemalejąca oraz, że $f_{n+1}(a_{n+1}) < n+1$. W rozważanym przypadku liczba $n+1$ nie należy do zbioru U_n; należy natomiast do zbioru U_{n+1}. Zatem $f_{n+1}(n+1) = n$ i wobec tego

$$a_{n+1} = n + h(n+1) = f_{n+1}(n+1) + h(n+1).$$

Mamy więc parę (a_{n+1}, f_{n+1}) spełniającą warunki (w). Tym samym zakończyliśmy indukcyjną konstrukcję par postaci (a_n, f_n).

Zdefiniowaliśmy ciąg par $(a_n,\ f_n)$, spełniających warunki (w). Mamy zatem niemalejący ciąg liczb naturalnych (a_n) i to taki, że $a_n \geqslant n$ dla wszystkich n. Ciąg (a_n) jest więc nieograniczony.

Rozważmy teraz funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ zdefiniowaną następująco. Niech $x \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy:

$$f(x) = n - 1,$$

gdzie n jest najmniejszą taką liczbą naturalną, że $x \leqslant a_n$. W szczególności, jeśli $x \leqslant a_1$, to $f(x) = 0$. Jeśli natomiast $a_s < x \leqslant a_{s+1}$, gdzie $s \in \mathbb{N}$, to $f(x) = s$. Z przeprowadzonej konstrukcji wynika, że

$$f(x) = f_n(x),$$

dla wszystkich liczb naturalnych n takich, że $x \leqslant a_n$. W szczególności $f(n) = f_n(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ (gdyż $n \leqslant a_n$). Ponieważ każda funkcja postaci f_n jest niemalejąca, więc funkcja f jest również niemalejąca. Jest ponadto jasne, że funkcja f jest nieograniczona. Zatem funkcja f należy do zbioru $\mathcal{A}$.

Mamy ponadto, $f(a_n) = f_n(a_n) < n$ oraz

$$f(a_n + 1) = f_{n+1}(a_n + 1) = n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdej więc liczby naturalnej n zachodzi równość

$$f^*(n) = a_n.$$

Ale $a_n = f_n(n)+h(n) = f(n)+h(n)$, zatem $f^*(n) = f(n)+h(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. W ten sposób wykazaliśmy, że istnieje ciąg f należący do $\mathcal{A}$ i spełniający równość

$$f^*(n) = f(n) + h(n).$$

To, że taki ciąg jest tylko jeden, wynika z twierdzenia 2.1.11. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.2 Przykłady ciągów postaci $\mathbf{f}^*$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpoczynamy od przykładu dotyczącego liczb pierwszych. Niech $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych:

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 3, \quad p_3 = 5, \quad p_4 = 7, \quad \cdots .$$

Jest to ciąg niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Ciąg ten należy zatem do zbioru $\mathcal{A}$ i wobec tego istnieje ciąg $p^* : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, określony równościami

$$p^*(n) = \left|\Big\{a \in \mathbb{N};\ p(a) < n\Big\}\right|$$

dla $n \in \mathbb{N}$, tzn. $p^*(n)$ jest liczbą wszystkich liczb pierwszych mniejszych n. Liczbę wszystkich liczb pierwszych nie większych od danej liczby rzeczywistej x oznacza się przez $\pi(x)$. Mamy zatem:

2.2.1. $p^*(n) = \pi(n-1)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Następny przykład dotyczy potęg liczby e i logarytmów naturalnych.

2.2.2. *Jeśli* $f(n) = \left[e^n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $f^*(n) = \left[\ln n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i niech $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k)+1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$, czyli

$$\left[e^k\right] + 1 \leqslant n \leqslant \left[e^{k+1}\right] \leqslant e^{k+1}$$

i stąd $e^k < n \leqslant e^{k+1}$. Ale $e^{k+1} \notin \mathbb{N}$, więc $e^k < n < e^{k+1}$ i wobec tego $k < \ln n < k+1$. Zatem, $[\ln n] = k = f^*(n)$. ⊠

W tym dowodzie istotne było tylko to, że potęga naturalna liczby e nie jest liczbą naturalną. W ten sam sposób dowodzimy:

2.2.3. *Niech a będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, której każda naturalna potęga nie jest liczbą naturalną (na przykład niech a będzie dodatnią liczbą przestępną). Jeśli* $f(n) = [a^n]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to*

$$f^*(n) = [\log_a n]$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

2.2.4. *Jeśli x jest dodatnią liczbą niewymierną oraz* $f(n) = [nx]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$, *to* $f^*(n) = \left[x^{-1}n\right]$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k)+1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ czyli $[kx]+1 \leqslant n \leqslant [(k+1)x]$ i stąd $kx < n \leqslant (k+1)x$. Ponieważ liczba x jest niewymierna, więc $n < (k+1)x$ i wobec tego

$$k < \frac{n}{x} < k+1.$$

Zatem $\left[x^{-1}n\right] = k = f^*(n)$. ⊠

2.2.5. *Niech $s \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną i niech* $f(n) = sn$ *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$f^*(n) = \left[\frac{n-1}{s}\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k)+1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$sk+1 \leqslant n \leqslant s(k+1),$$
$$sk \leqslant n-1 \leqslant s(k+1)-1 < s(k+1),$$
$$k \leqslant \frac{n-1}{s} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\dfrac{n-1}{s}\right]$. ⊠

2.2.6. *Niech $2 \leqslant a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$ oraz $f(n) = an + b$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy*

$$f^*(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n \leqslant a + b, \\ \left[\dfrac{n-b-1}{a}\right], & \text{gdy } n > a + b. \end{cases}$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Jeśli $n \leqslant a + b$, to $n \leqslant f(1)$ i wtedy $k = 0$ (patrz 2.1.2). Załóżmy, że $n > a + b$. Wtedy $k \geqslant 1$ i mamy kolejno:

$$\begin{gathered} f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1), \\ ak + b + 1 \leqslant n \leqslant a(k+1) + b, \\ ak \leqslant n - b - 1 \leqslant a(k+1) - 1 < a(k+1), \\ k \leqslant \frac{n-b-1}{a} < k + 1, \end{gathered}$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\dfrac{n-b-1}{a}\right]$. ⊠

Teraz rozpatrzymy kilka przykładów funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ postaci $f(n) = an^2 + bn + c$.

2.2.7. *Jeśli $f(n) = n^2$, to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n-1}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$\begin{gathered} k^2 + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^2, \\ k^2 \leqslant n - 1 \leqslant (k+1)^2 - 1 < (k+1)^2, \\ k \leqslant \sqrt{n-1} < k + 1, \end{gathered}$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{n-1}\right]$. ⊠

2.2.8. *Jeśli $f(n) = n^2 - n$, to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$\begin{gathered} k^2 - k + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^2 - (k+1) = k^2 + k, \\ k^2 + k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4}, \\ \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \\ k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}, \\ k < \sqrt{n} + \frac{1}{2} < k + 1, \end{gathered}$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{n} + \dfrac{1}{2}\right]$. ⊠

Następne dwa przykłady dotyczą liczb trójkątnych, czyli liczb naturalnych postaci

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + n.$$

2.2.9. *Jeśli* $f(n) = t_n$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{2n-1} - \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $t_k + 1 \leqslant n \leqslant t_{k+1}$ i mamy kolejno:

$$\begin{gathered}
\frac{k^2+k}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}, \\
k^2 + k + 2 \leqslant 2n \leqslant k^2 + 3k + 2, \\
k^2 + k + 1 \leqslant 2n - 1 \leqslant k^2 + 3k + 1, \\
k^2 + k + \frac{1}{4} < 2n - 1 < k^2 + 3k + \frac{9}{4}, \\
\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 < 2n - 1 < \left(k + \frac{3}{2}\right)^2, \\
k + \frac{1}{2} < \sqrt{2n-1} < k + \frac{3}{2}, \\
k < \sqrt{2n-1} - \frac{1}{2} < k + 1,
\end{gathered}$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{2n-1} - \frac{1}{2}\right]$. ⊠

2.2.10. *Jeśli* $f(n) = \dfrac{n^2 - n}{2}$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$\begin{gathered}
\frac{k^2-k}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(k+1)^2 - (k+1)}{2} = \frac{k^2+k}{2}, \\
k^2 - k + 2 \leqslant 2n \leqslant k^2 + k, \\
k^2 - k + \frac{1}{4} \leqslant 2n \leqslant k^2 + k + \frac{1}{4}, \\
\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2, \\
k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2}, \\
k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1,
\end{gathered}$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$. ⊠

Zanotujmy jeszcze następujące uogólnienie przykładu 2.2.7.

2.2.11. *Niech* $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. *Jeśli* $f(n) = n^s$, *to*

$$f^*(n) = \left[\sqrt[s]{n-1}\right].$$

D. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $f^*(n) = k$. Wtedy $f(k) + 1 \leqslant n \leqslant f(k+1)$ i mamy kolejno:

$$k^s + 1 \leqslant n \leqslant (k+1)^s,$$
$$k^s \leqslant n - 1 \leqslant (k+1)^s - 1 < (k+1)^s,$$
$$k \leqslant \sqrt[s]{n-1} < k+1,$$

a zatem $f^*(n) = k = \left[\sqrt[s]{n-1}\right]$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.3 Ciągi komplementarne

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami. Przypomnijmy, że ciągi te są *komplementarne* (ang. *complementary sequences*), jeśli spełniają następujące trzy warunki:

(1) są ściśle rosnące,

(2) nie mają wspólnych wyrazów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cap G(\mathbb{N}) = \emptyset$;

(3) każda liczba naturalna jest wyrazem jednego z tych ciągów, tzn. $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

Ciągi $F = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ i $G = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$, odpowiednio liczb nieparzystych i parzystych, są komplementarne. Ciągi $F = (3, 6, 9, 12, \dots)$ i $G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \dots)$, liczb naturalnych odpowiednio podzielnych i niepodzielnych przez 3, są komplementarne. Ciągi $F = (1, 4, 9, 16, 25, \dots)$ i $G = (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \dots)$, liczb odpowiednio kwadratowych i niekwadratowych, są komplementarne. Tego rodzaju przykładów jest bardzo dużo.

Ciągi komplementarne można w pewien sposób konstruować za pomocą dowolnego ciągu f, należącego do zbioru $\mathcal{A}$. Rozpatrzmy dla przykładu ciąg $f = (3, 5, 7, 9, 11, \dots)$. W tym przypadku $f^* = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$. Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami określonymi równościami:

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. W naszym przypadku są to ciągi:

$$F = (4, 7, 10, 13, 16, \dots), \quad G = (1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \dots).$$

Łatwo można sprawdzić, że powyższe ciągi F i G są komplementarne.

Okazuje się, że to nie jest przypadek. Dla każdego ciągu f, należącego do zbioru $\mathcal{A}$ (czyli ciągu, który jest niemalejący, nieograniczony i wszystkie jego wyrazy są nieujemnymi liczbami całkowitymi), ciągi F i G, zdefiniowane w powyższy sposób, są komplementarne. Co więcej, każda para ciągów komplementarnych jest takiej postaci. Udowodnili to, w 1954 roku, J. Lambek i L. Moser.

Zamierzamy przedstawić dowody wspomnianych wyników Lambeka i Mosera. W tym celu zanotujmy najpierw kilka początkowych obserwacji.

2.3.1. *Niech $h \in \mathcal{A}$ i niech*
$$H(n) = n + h(n)$$
dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciąg H jest ściśle rosnący.

D. $H(n) = n + h(n) < (n+1) + h(n) \leqslant (n+1) + h(n+1) = H(n+1)$. ⊠

2.3.2. *Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami komplementarnymi i niech*
$$f(n) = F(n) - n, \quad g(n) = G(n) - n,$$
dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy ciągi f, g należą do zbioru $\mathcal{A}$.

D. Wykażemy, że $f \in \mathcal{A}$. Ponieważ ciąg F jest ściśle rosnący, $F(n) \geqslant n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Każde więc $f(n)$ jest nieujemną liczbą całkowitą. Mamy ponadto:
$$f(n) = F(n) - n < F(n+1) - n = F(n+1) - (n+1) + 1 = f(n+1) + 1,$$
czyli $f(n) < f(n+1) + 1$, a więc $f(n) \leqslant f(n+1)$. Ciąg f jest więc niemalejący.

Przypuśćmy teraz, że ciąg f jest ograniczony. Istnieje wtedy taka nieujemna liczba całkowita a, że $f(n) = a$ dla wszystkich n większych od pewnej liczby naturalnej n_0. Wtedy $F(n) = n + a$ dla wszystkich $n > n_0$. To oznacza, że wszystkie liczby naturalne, począwszy od liczby $(n_0 + a + 1)$, są wyrazami ciągu F. To implikuje, że ciąg G ma tylko skończenie wiele wyrazów, a to jest sprzeczne z tym, że G jest ściśle rosnącym ciągiem nieskończonym. Zatem ciąg f jest nieograniczony. Pokazaliśmy, że $f \in \mathcal{A}$. W podobny sposób wykazujemy, że $g \in \mathcal{A}$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.4 Twierdzenia Lambeka i Mosera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Teraz możemy już udowodnić następujące twierdzenia.

2.4.1 (Lambek, Moser, 1954). *Niech $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będą ciągami komplementarnymi. Istnieje wtedy dokładnie jeden taki ciąg f, należący do zbioru $\mathcal{A}$ (czyli ciąg niemalejący, nieograniczony, którego wyrazami są nieujemne liczby całkowite), że*
$$\boxed{F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)}\,,$$
dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Mon] 61(1954) 454-458, [ME] 4(1)(1998) 2).

D. Oznaczmy: $f(n) = F(n) - n$ oraz $g(n) = G(n) - n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 2.3.2), że $f, g \in \mathcal{A}$. Wystarczy zatem udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej s zachodzi równość
$$g(s) = f^*(s).$$

Niech $s \in \mathbb{N}$. Niech $m = G(s)$. To oznacza, że w ciągu G występuje dokładnie s wyrazów mniejszych lub równych m, To oznacza również, że w ciągu F występuje dokładnie $m - s$ wyrazów mniejszych od m i przy tym m nie jest wyrazem tego ciągu. Oznaczmy przez r liczbę $m - s$. Jest oczywiste, że jeśli $r = 0$, to $f^*(s) = 0 = g(s)$.

Dalej załóżmy, że $r \geqslant 1$. W tym przypadku liczba naturalna $F(r)$ jest ostro większa od m i stąd wynika, że $f(r) < s$. Istotnie, $f(r) = F(r) - r < m - r = s$. Mamy ponadto,

$$f(r+1) = F(r+1) - (r+1) > m - (r+1) = m - r - 1 = s - 1,$$

więc $s \leqslant f(r+1)$. Wykazaliśmy, że

$$f(r) < s \leqslant f(r+1),$$

a zatem (na mocy 2.1.2) $f^*(s) = r$. Zauważmy, że $g(s) = G(s) - s = m - s = r$. Mamy więc oczekiwaną równość $g(s) = f^*(s)$. Wykazaliśmy więc, że $g = f^*$ i to kończy dowód tego twierdzenia. ⊠

2.4.2 (Lambek, Moser, 1954)**.** *Niech* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ *będzie niemalejącym i nieograniczonym ciągiem. Niech*

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n), \quad \textit{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy ciągi F *i* G *są komplementarne.* ([Mon] 61(1954) 454-458, [ME] 4(1)(1998) 2.).

D. Wiemy już (patrz 2.3.1), że ciągi F i G są ściśle rosnące i wszystkie ich wyrazy są liczbami naturalnymi.

Pokażemy, że zbiory $F(\mathbb{N})$ i $G(\mathbb{N})$ są rozłączne. Przypuśćmy, że $F(n) = G(m)$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$. Niech $a = f^*(m)$. Wtedy

$$f(a) < m \leqslant f(a+1) \quad \text{oraz} \quad f(n) + n = a + m.$$

Zatem wtedy $f(a) + a < m + a \leqslant f(a+1) + a$ i stąd $F(a) < F(n) < F(a+1)$. Ciąg F jest ściśle rosnący, więc $a < n < a + 1$ i mamy sprzeczność.

Należy jeszcze wykazać, że $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. W tym celu wprowadźmy nowy ciąg

$$H : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

będący uzupełnieniem ciągu F, tzn. H jest ciągiem tych wszystkich kolejnych liczb naturalnych, które nie są wyrazami ciągu F.

Jest oczywiste, że ciąg H jest ściśle rosnący i ciągi F, H są komplementarne. W szczególności

$$F(\mathbb{N}) \cup H(\mathbb{N}) = \mathbb{N}.$$

Z twierdzenia 2.4.1 wiemy, że istnieje taka funkcja $h \in \mathcal{A}$, że $F(n) = n + h(n)$ oraz $H(n) = n + h^*(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ale $h(n) = F(n) - n = f(n)$, więc $h = f$, $h^* = f^*$ i stąd

$$H(n) = n + h^a st(n) = n + f^*(n) = G(n).$$

Zatem, $F(\mathbb{N}) \cup G(\mathbb{N}) = F(\mathbb{N}) \cup H(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. ⊠

★ J. Lambek, L. Moser, *Inverse and complementary sequences of natural numbers*, [Mon] 61(1954) 454-458.

Yau Kwan Kiu Gary, *Inverse sequences and complementary sequences*, [ME] 3(4)(1997) 2.

A proof of the Lambek and Moser theorem, [ME] 4(1)(1998) 2.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.5 Zastosowania twierdzeń Lambeka i Mosera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Rozpatrzmy na początek ciągi komplementarne $F = (2, 4, 6, , \dots,)$ oraz $G = (1, 3, 5, \dots)$. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że istnieje taki ciąg $f \in \mathcal{A}$, że

$$F(n) = n + f(n) \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + f^*(n).$$

Ponieważ $F(n) = 2n$, $G(n) = 2n - 1$, więc w tym przypadku $f(n) = F(n) - n = 2n - n = n$ oraz $f^*(n) = n - 1$. Mamy zatem równości:

$$f(1, 2, 3, 4, \dots), \quad f^* = (0, 1, 2, 3, \dots).$$

Równości te wynikają natychmiast z definicji ciągu f^*. Nie jest potrzebne w tym przypadku twierdzenie Lambeka-Mosera.

Niech $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, itd. Wiemy (patrz 2.2.1), że

$$p^*(n) = \pi(n - 1)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $\pi(x)$ oznacza liczbę wszystkich liczb pierwszych nie większych od danej liczby rzeczywistej x. Z twierdzenia Lambeka-Mosera 2.4.2 wynika zatem, że jeśli

$$F(n) = n + p_n \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + \pi(n - 1)$$

dla $n \in \mathbb{N}$, to ciągi F, G są komplementarne. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie.

2.5.1. *Niech (p_n) będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych i niech*

$$A = \Big\{n + p_n;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \textit{oraz} \quad B = \Big\{n + \pi(n - 1);\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. ([Mon] 61(1954) 455).

Następny przykład dotyczy potęg pewnej liczby a i logarytmów. Z faktu 2.2.3 i twierdzenia 2.4.2 otrzymujemy:

2.5.2. *Niech a będzie taką dodatnią liczbą rzeczywistą, której żadna naturalna potęga nie jest liczbą naturalną (na przykład niech a będzie dodatnią liczbą przestępną). Niech*

$$A = \Big\{n + [a^n]\,;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \textit{oraz} \quad B = \Big\{n + [\log_a n]\,;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$.

Zanotujmy to samo dla $a = e$.

2.5.3. *Niech*

$$A = \Big\{n + [e^n]\,;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \quad \textit{i} \quad B = \Big\{n + [\ln n]\,;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wtedy $A \cup B = \mathbb{N}$ oraz $A \cap B = \emptyset$. ([Mon] 61(1954) 455).

Niech teraz

$$F = (3, 6, 9, 12, \dots), \qquad G = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \dots).$$

Ciąg F, to kolejne wielokrotności trójki. Ciąg G natomiast powstał przez skreślenie w ciągu kolejnych liczb naturalnych wszystkich liczb podzielnych przez 3. Ciąg G jest więc uzupełnieniem ciągu F. Chcemy znaleźć wzór na n-ty wyraz ciągu G. Chcąc to zrobić, zauważmy najpierw, że ciągi F i G są komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika zatem, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = 3n - n = 2n.$$

Do znalezienia szukanego wzoru wystarczy więc opisać funkcję f^*, gdzie $f = (2, 4, 6, 8, \dots)$. Wykazaliśmy (patrz 2.2.5), że $f^*(n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. W ten sposób udowodniliśmy następujące stwierdzenie.

2.5.4. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy liczby podzielne przez* 3. *Mamy wtedy ciąg*

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 16,\ 17,\ 19,\ \dots,$$

którego n-ty wyraz jest równy

$$n + \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

W ten sam sposób otrzymujemy następne stwierdzenie.

2.5.5. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy liczby podzielne przez* 4. *Mamy wtedy ciąg*

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\ \dots,$$

którego n-ty wyraz jest równy

$$n + \left[\frac{n-1}{3}\right].$$

Przedstawione stwierdzenia są szczególnymi przypadkami następującego wniosku z twierdzenia 2.4.1.

2.5.6. *Niech $d \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech G będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez d. Wtedy*

$$G(n) = n + \left[\frac{n-1}{d-1}\right], \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez d. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = dn - n = (d-1)n.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.5), że $f^*(n) = \left[\frac{n-1}{d-1}\right]$. Zatem $G(n) = n + \left[\frac{n-1}{d-1}\right]$. ⊠

Inny dowód znajdziemy w drugim wydaniu książki [N10], w rozdziale o części całkowitej. Wyrazy powyższego ciągu G opisał w 2002 roku M.A. Nyblom za pomocą funkcji "sufit".

2.5.7 (M.A. Nyblom, [Nyb]). *Niech $d \geqslant 3$ będzie ustaloną liczbą naturalną i niech G będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb naturalnych niepodzielnych przez d. Wtedy*

$$G(n) = n + \left\lceil \frac{n-1}{d-1} \right\rceil - 1, \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.5.8. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy wszystkie liczby trójkątne. Mamy wtedy ciąg $2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \ldots$, którego n-ty wyraz jest równy*

$$n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb trójkątnych. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = \frac{n^2 - n}{2}.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.10), że $f^*(n) = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$. Zatem, $G(n) = n + \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right]$. ⊠

2.5.9. *W ciągu wszystkich kolejnych liczb naturalnych skreślamy wszystkie liczby kwadratowe. Mamy wtedy ciąg $2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots$ (liczb niekwadratowych), którego n-ty wyraz jest równy*

$$n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

D. Oznaczmy przez F ciąg kolejnych liczb kwadratowych. Dany ciąg G jest uzupełnieniem ciągu F. Ciągi F i G są więc komplementarne. Z twierdzenia 2.4.1 wynika, że $G(n) = n + f^*(n)$, gdzie

$$f(n) = F(n) - n = n^2 - n.$$

Wykazaliśmy (patrz 2.2.8), że $f^*(n) = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Zatem, $G(n) = n + \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. ⊠

Inne dowody znajdziemy w drugim wydaniu książki [N10], w rozdziale dotyczącym części całkowitej. Pojawiły się liczby postaci

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right].$$

Liczby te można przedstawiać na różne inne sposoby. Zanotujmy kilka przykładów.

2.5.10. *Dla każdej liczby naturalnej n zachodzą równości:*

$$\left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n + \sqrt{n}}\right] = \left[\sqrt{n + \left[\sqrt{n + [\sqrt{n}]}\right]}\right] = \left[\frac{1 + \sqrt{4n-2}}{2}\right] = \left[\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right].$$

([S59], [AnAF], [Nyb], [N10]).

2.5.11. *Jeśli q jest liczbą rzeczywistą taką, że $-\frac{3}{4} \leqslant q < \frac{1}{4}$, to*

$$\left[\sqrt{n+q} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right], \quad \textit{dla} \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{([N10])}.$$

2.5.12. *Niech* $2 \leqslant m \in \mathbb{N}$. *Jeśli w ciągu wszystkich liczb naturalnych skreślimy wszystkie liczby postaci* a^m, *gdzie* $a \in \mathbb{N}$, *to w nowym ciągu liczba stojąca na* n*-tym miejscu jest równa*

$$n + \left[\sqrt[m]{n + \sqrt[m]{n}} \right]. \quad \text{([Mon] 61(1954) 454-458, [Nyb], [N10])}.$$

2.5.13. *Dla każdego niemalejącego ciągu* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *istnieje dokładnie jedna para ciągów komplementarnych* (F, G) *taka, że*

$$G = F + h.$$

D. Niech $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie danym niemalejącym ciągiem. Wiemy (patrz 2.1.12), że istnieje dokładnie jeden ciąg $f \in \mathcal{A}$ taki, że $f^* = f + h$. Definiujemy:

$$F(n) = n + f(n), \quad G(n) = n + f^*(n)$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ciągi F, G są komplementarne (wynika to z twierdzenia 2.4.2) i mamy

$$G(n) = n + f^*(n) = n + f(n) + h(n) = F(n) + h(n),$$

czyli $G = F + h$. Wykazaliśmy istnienie pary (F, G). Udowodnimy jeszcze, że taka para jest tylko jedna.

Niech f, F, G będą takie jak powyżej i przypuśćmy, że (U, V) jest taką parą ciągów komplementarnych, że $V = U + h$. Niech $\varphi \in \mathcal{A}$ będzie takim ciągiem, że

$$U(n) = n + \varphi(n), \quad V(n) = n + \varphi^*(n)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Taki ciąg φ istnieje na mocy twierdzenia 2.4.1. Ponieważ $V = U + h$, więc $\varphi^* = \varphi + h$. Z jedyności podanej w twierdzeniu 2.1.12 wynika, że $\varphi = f$ i stąd wynika, że $V = G$ oraz $U = F$. ⊠

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że istnieją jednoznacznie wyznaczone ciągi komplementarne F i G takie, że

$$G(n) = F(n) + n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istnieją proste wzory na n-te wyrazy tych ciągów. Zajmiemy się tym dokładniej w następnym podrozdziale. Teraz zanotujmy dwa zadania.

2.5.14. *Wiemy z twierdzenia* 2.5.13, *że istnieją jednoznacznie wyznaczone takie ciągi komplementarne* F *i* G, *że*

$$G(n) = F(n) + 2n$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Podać wzory na* n*-te wyrazy tych ciągów.*

2.5.15. *Wiemy z twierdzenia* 2.5.13, *że istnieją jednoznacznie wyznaczone takie ciągi komplementarne* F *i* G, *że*

$$G(n) = F(n) + n^2$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Podać wzory na* n*-te wyrazy tych ciągów.*

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

2.6 Zastosowania dla liczb postaci [xn]

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Załóżmy, że x jest liczbą niewymierną i niech

$$f(x) = [nx]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Wiemy (patrz 2.2.4), że wtedy

$$f^*(n) = \left[x^{-1}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Z twierdzenia 2.4.2 wynika zatem, że ciągi

$$F(n) = n + [xn] \quad \text{oraz} \quad G(n) = n + [x^{-1}n]$$

są komplementarne. Ale $n + [nx] = [pn]$, $n + \left[x^{-1}n\right] = [qn]$, gdzie $p = 1 + x$, $q = 1 + x^{-1}$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mamy zatem:

2.6.1 (Twierdzenie Beatty)**.** *Dla dowolnej liczby dodatniej p niech*

$$A_p = \Big\{[np];\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Jeśli $p, q > 1$ są takimi liczbami niewymiernymi, że

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

to $A_p \cap A_q = \emptyset$ oraz $A_p \cup A_q = \mathbb{N}$. ([MR] 16.17a, [OM] Polska 1989, [Dlt] 8/1995).

Zauważmy również, że $q = \dfrac{p}{p-1}$. Udowodniliśmy więc:

2.6.2. *Niech $p > 1$ będzie liczbą niewymierną. Niech*

$$A = \Big\{[np];\ n \in \mathbb{N}\Big\}, \quad B = \Big\{\ [np/(p-1)]\ ;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wówczas $\mathbb{N}$ jest rozłączną sumą zbiorów A i B.

Można udowodnić:

2.6.3. *Niech $p > 1$ będzie liczbą rzeczywistą. Niech*

$$A = \Big\{[np];\ n \in \mathbb{N}\Big\}, \quad B = \Big\{\ [np/(p-1)]\ ;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Wówczas $\mathbb{N}$ jest rozłączną sumą zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy p jest liczbą niewymierną. ([IMO] Longlist 1984).

Zanotujmy dwa wnioski wynikające z 2.6.2.

2.6.4. *Jeśli*

$$A = \Big\{[(1+\sqrt{3})n/2];\ n \in \mathbb{N}\Big\}, \qquad B = \Big\{[(\sqrt{3}+2)n];\ n \in \mathbb{N}\Big\},$$

to $\mathbb{N} = A \cup B$ *oraz* $A \cap B = \emptyset$.

D. Niech $p = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. Wtedy $\dfrac{p}{p-1} = \sqrt{3}+2$ i teza wynika z 2.6.2. ⊠

2.6.5. *Niech* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będą ciągami określonymi równościami*

$$F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right], \quad G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Ciągi te są komplementarne.* ([Kw] 11/1979 27).

D. Niech $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Wtedy $\dfrac{p}{p-1} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ i teza wynika z 2.6.2. ⊠

Spójrzmy jeszcze raz na twierdzenie 2.5.13. Dla ciągu tożsamościowego $h(n) = n$ twierdzenie to ma nastąpującą postać.

2.6.6. *Istnieją takie jednoznacznie wyznaczone ciągi komplementarne* $F, G : \mathbb{N} \to N$, *że*

$$G(n) = F(n) + n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Kw] 6/1970 10).

Zauważmy, że ciągi F i G, podane w 2.6.5, spełniają równość $G(n) = F(n) + n$. Istotnie,

$$G(n) = \left[\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}n\right] = \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n + n\right] = \left[\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] + n = F(n) + n.$$

Zanotujmy:

2.6.7. *Niech* $F, G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *będą ciągami określonymi równościami*

$$F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right], \quad G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$$

dla $n \in \mathbb{N}$. *Ciągi te są komplementarne. Są to jedyne ciągi komplementarne takie, że*

$$G(n) = F(n) + n$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ([Kw] 11/1979 27).

2.6.8. *Początkowe wyrazy powyższych ciągów* F *i* G:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
F	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
G	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52

2.6.9. *Niech* $F(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$, $G(n) = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$, *dla* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy:*

(1) $G(n) = F\Big(F(n)\Big) + 1$ *dla* $n \in \mathbb{N}$;

(2) $G(n) = F(n) + n$ *dla* $n \in \mathbb{N}$;

(3) $F(n+1) - F(n) = 1$ *lub* 2, *dokładniej*

$$F(n+1) - F(n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n \in G(\mathbb{N}), \\ 2, & \text{gdy } n \in F(\mathbb{N}). \end{cases}$$

([Kw] 11/1979 27).

★ M. Griffiths, *Dove-tail sequences*, [MG] 91(521)(2007) 300-302.

M. Griffiths, *The golden string, Zeckendorf representations, and the sum of a series*, [Mon] 118(6) (2011) 497-507.

I. M. Jagłom, *Systemy numeracji*, [Kw] 6/1970 2-10, [Kw] 12/1991 15-22.

Literatura

[AnAF] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 *Number Theory Problems. From the training of the USA IMO team*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 2007.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[IMO] Międzynarodowa Olimpiada Matematyczna.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[ME] Mathematical Excalibur, chińskie popularne czasopismo matematyczne, Hong Kong.

[MG] The Mathematical Gazette, angielskie popularne czasopismo matematyczne.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[MR] Mathematical Reviews.

[N10] A. Nowicki, *Liczby i Funkcje Rzeczywiste*, Podróże po Imperium Liczb, cz.10, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn, 2010.

[Nyb] M. A. Nyblom, *Some curious sequences involving floor and ceiling functions*, The American Mathematical Monthly, 109(6)(2002) 559-564.

[OM] Olimpiada Matematyczna.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.