Podróże po Imperium Liczb

Część 15. Liczby, Funkcje, Ciągi, Zbiory, Geometria

Rozdział 12

12. Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Andrzej Nowicki 16 kwietnia 2013, `http://www.mat.uni.torun.pl/~anow`

Spis treści

12 Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych . . . 175
12.1 Podzbiory gęste . . . 175
12.2 Podzbiory brzegowe . . . 176
12.3 Podzbiory nigdziegęste . . . 176
12.4 Podzbiory gęste w przestrzeniach metrycznych . . . 177
12.5 Gęstość podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych . . . 178
12.6 Lematy . . . 180
12.7 Twierdzenie Kroneckera . . . 182
12.8 Naturalna gęstość . . . 187
12.9 Gęste zbiory ułamków . . . 192
12.10 Ułamkowa gęstość zbioru liczb pierwszych . . . 198
12.11 Zbiory gęste i ciągi liczb naturalnych . . . 200
12.12 Inne przykłady zbiorów gęstych . . . 202

Wszystkie książki z serii "Podróże po Imperium Liczb" napisano w edytorze LaTeX. Spisy treści tych książek oraz pewne wybrane rozdziały moża znaleźć na internetowej stronie autora: `http://www-users.mat.uni.torun.pl/~anow`.

12 Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Zbiór liczb wymiernych jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Podzbiór ten ma szczególną własność. Jest to podzbiór gęsty, tzn. każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu składającego się z samych liczb wymiernych. To jest równoważne z tym, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba wymierna a taka, że $x < a < y$. Podobną własność posiada zbiór wszystkich liczb niewymiernych; to też jest podzbiór gęsty zbioru liczb rzeczywistych. Oprócz wspomnianych podzbiorów istnieją jeszcze inne ciekawe podzbiory gęste. Dla przykładu zbiór wszystkich ułamków postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, jest gęstym podzbiorem zbioru dodatnich liczb rzeczywistych. Takiej własności nie posiada podobny zbiór wszystkich ułamków postaci $\frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami Fibonacciego. Te i podobne fakty wyjaśnimy dokładniej w tym rozdziale.

Zajmować się będziemy różnymi podzbiorami gęstymi pewnych podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych. Najpierw, w początkowych podrozdziałach, pojawią się przestrzenie metryczne oraz przestrzenie topologiczne. Podstawowe pojęcia dotyczące tych przestrzeni znajdziemy w polskich książkach; na przkład: [Kur], [Eng], [Eng],[EnS1], [Dud1].

12.1 Podzbiory gęste

Załóżmy, że X jest ustaloną przestrzenią topologiczną i A jest jej podzbiorem. Mówimy, że podzbiór A jest *gęsty* w X, jeśli jego domknięcie jest całą przestrzenią X.

Przypomnijmy, że domknięcie zbioru A, oznaczane przez $\overline{A}$, jest najmniejszym zbiorem domkniętym w X zawierającym zbiór A. Innymi słowy, domknięcie $\overline{A}$ jest przekrojem mnogościowym wszystkich zbiorów domkniętych w X, zawierających zbiór A.

12.1.1. *Element p przestrzeni X należy do zbioru $\overline{A}$ wtedy i tylko wtedy, gdy w każdym zbiorze otwartym zawierającym p istnieje element należący do A*

D. Załóżmy, że $p \in \overline{A}$ i U jest zbiorem otwartym zawierającym p. Przypuśćmy, że w zbiorze U nie ma żadnego elementu ze zbioru A. Wtedy $A \cap U = \emptyset$, a więc zbiór A zawarty jest w zbiorze domkniętym $X \smallsetminus U$. Wtedy $\overline{A} \subseteq X \smallsetminus U$. Ponieważ $p \in \overline{A}$, więc $p \in X \smallsetminus U$. Zatem $p \notin U$, wbrew założeniu, że $p \in U$.

Załóżmy teraz, że każdy zbiór otwarty zawierający p zawiera element należący do A i przypuśćmy, że $p \notin \overline{A}$. Wtedy p należy do zbioru otwartego $X \smallsetminus \overline{A}$ i mamy sprzeczność: $\emptyset = (X \smallsetminus \overline{A}) \cap A \neq \emptyset$. ⊠

Stąd wynika:

12.1.2. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element zbioru A.*

12.1.3. *Jeśli A jest gęstym podzbiorem przestrzeni topologicznej X, to dla każdego zbioru otwartego U zachodzi równość*

$$\overline{U} = \overline{U \cap A}.$$

D. Oczywista jest inkluzja $\overline{U \cap A} \subseteq \overline{U}$. Załóżmy, że $p \in \overline{U}$ i niech V pędzie zbiorem otwartym zawierającym p. Wtedy (patrz 12.1.1) $V \cap U \neq \emptyset$; więc $U \cap V$ jest niepustym zbiorem otwartym. Z gęstości zbioru A wynika, że $(U \cap V) \cap A \neq \emptyset$. Ale $(U \cap V) \cap A = V \cap (U \cap A)$. Każdy więc niepusty zbiór otwarty zawierający p posiada element należący do $U \cap A$. Oznacza to (znowu na mocy 12.1.1), że $p \in \overline{U \cap A}$. Zatem $\overline{U} \subseteq \overline{U \cap A}$. ⊠

12.1.4. *Jeśli U i V są otwartymi zbiorami gęstymi, to $U \cap V$ również jest zbiorem gęstym.*

D. Wynika to wprost z 12.1.3: $\overline{U \cap V} = \overline{U} = X$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.2 Podzbiory brzegowe

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W dalszym ciągu zakładamy, że A jest podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Przez $\text{Int}(A)$ oznaczamy wnętrze zbioru A. Przypomnijmy, że $\text{Int}(A)$ jest największym zbiorem otwartym w X zawartym w A. Innymi słowy, wnętrze $\text{Int}(A)$ jest sumą mnogościową wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A. Jeśli zbiór $\text{Int}(A)$ jest pusty, to mówimy, że A jest zbiorem *brzegowym.*

12.2.1. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element nie należący do A.*

D. Załóżmy, że zbiór A jest brzegowy i U jest dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Wtedy $\text{Int}(A) = \emptyset$, więc zbiór U nie jest zawarty w A. Istnieje zatem element x należący do U i nie należący do A.

Załóżmy teraz, że każdy niepusty zbiór otwarty zawiera element nie należący do A. Przypuśćmy, że $\text{Int}(A) \neq \emptyset$. Niech $x \in \text{Int}(A)$. Istnieje wtedy taki zbiór otwarty U, że $x \in U$ oraz $U \subseteq A$. Zbiór U jest niepusty i nie ma elementów nie należących do A; sprzeczność. ⊠

12.2.2. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest brzegowy wtedy i tylko wtedy, gdy $X \smallsetminus A$ jest zbiorem gęstym w X.*

D. Załóżmy, że A jest zbiorem brzegowym i U jest dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Istnieje wtedy (patrz 12.2.1) w zbiorze U taki punkt x, który nie należy do A, czyli który należy do $X \smallsetminus A$. Z 12.1.2 wynika zatem, że $X \smallsetminus A$ jest zbiorem gęstym w X. W podobny sposób wykazujemy implikację w przeciwnym kierunku. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.3 Podzbiory nigdziegęste

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Mówimy, że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest zbiorem *nigdziegęstym*, jeśli jego domknięcie jest zbiorem brzegowym, tzn. jeśli $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$. Każdy więc zbiór nigdziegęsty jest w szczególności zbiorem brzegowym. Każdy domknięty zbiór brzegowy jest zbiorem nigdziegęstym. Jedynym otwartym zbiorem nigdziegęstym jest zbiór pusty. Jeśli A jest zbiorem nigdziegęstym, to jego domknięcie $\overline{A}$ również jest zbiorem nigdziegęstym.

12.3.1. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest nigdziegęsty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy niepusty zbiór otwarty zawiera niepusty zbiór otwarty rozłączny ze zbiorem A.*

D. Załóżmy, że A jest zbiorem nigdziegęstym i U jest niepustym zbiorem otwartym. Wtedy $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \emptyset$, więc zbiór U nie jest zawarty w zbiorze $\overline{A}$. Istnieje zatem takie $x_0 \in U$, że $x_0 \notin \overline{A}$. Element x_0 należy do otwartego zbioru $X \smallsetminus \overline{A}$. Rozpatrzmy zbiór $V = U \cap (X \smallsetminus \overline{A})$. Jest to niepusty zbiór (gdyż $x_0 \in V$) otwarty, zawarty w U i rozłączny ze zbiorem A.

Załóżmy teraz, że każdy niepusty zbiór otwarty zawiera niepusty zbiór otwarty rozłączny ze zbiorem A. Przypuśćmy, że $\mathrm{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$; niech $x_0 \in \mathrm{Int}(\overline{A})$. Istnieje wtedy taki zbiór otwarty U, że $x_0 \in U$ oraz $U \subseteq \overline{A}$. Ponieważ $x_0 \in U$, więc U nie jest zbiorem pustym Istnieje zatem taki niepusty zbiór otwarty V, że $V \subseteq U$ i $V \cap A = \emptyset$. Zbiór A jest zawarty w domkniętym zbiorze $X \smallsetminus V$. Stąd wynika, że $\overline{A} \subseteq X \smallsetminus V$, czyli $\overline{A} \cap V = \emptyset$. Ale $\emptyset \neq V \subseteq U \subseteq \overline{A}$, więc mamy sprzeczność: $\emptyset \neq V = V \cap \overline{A} = \emptyset$. ⊠

12.3.2. *Jeśli U jest zbiorem otwartym, to zbiór $\overline{U} \smallsetminus U$ jest nigdziegęsty.*

D. Oznaczmy: $A = \overline{U} \smallsetminus U$. Niech V będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym. Pokażemy, że istnieje taki niepusty zbiór otwarty V_0, który jest zawarty w V i który jest rozłączny ze zbiorem A. W przypadku, gdy $V \cap A = \emptyset$, przyjmujemy $V_0 = V$.

Załóżmy, że $V \cap A \neq \emptyset$ i niech $x_0 \in V \cap A$. Wtedy $x_0 \in \overline{U}$, więc (patrz 12.1.1) zbiór $U \cap V$ jest niepusty. Jest to otwarty zbiór zawarty w V i rozłączny ze zbiorem A. ⊠

12.3.3. *Załóżmy, że A, B, C są takimi podzbiorami przestrzeni topologicznej X, że*

$$A = B \cup C.$$

Jeśli A jest zbiorem gęstym i C jest zbiorem nigdziegęstym, to B jest zbiorem gęstym.

D. Niech U będzie dowolnym niepustym zbiorem otwartym w X. Udowodnimy, że przekrój $U \cap B$ jest niepusty.

Ponieważ zbiór C jest nigdziegęsty, więc (patrz 12.3.1) istnieje taki niepusty zbiór otwarty V, że $V \subseteq U$ i $V \cap C = \emptyset$. Ponieważ zbiór A jest gęsty, więc $A \cap V \neq \emptyset$. Mamy zatem:

$$\emptyset \neq A \cap V = (B \cup C) \cap V = (B \cap V) \cup (C \cap V) = (B \cap V) \cup \emptyset = B \cap V.$$

Stąd wynika, że $B \cap U \neq \emptyset$, gdyż $\emptyset \neq B \cap V \subseteq B \cap U$. Teza wynika zatem z 12.1.2. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.4 Podzbiory gęste w przestrzeniach metrycznych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Wiemy (patrz Podrozdział 1), że podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest gęsty, jeśli w każdym niepustym zbiorze otartym znajduje się element należący do A. Załóżmy teraz, że X jest przestrzenią metryczną z metryką d. Każdy niepusty zbiór otwarty w X jest wtedy sumą mnogościową kul. Mamy zatem:

12.4.1. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy w każdej kuli znajduje się się element należący do A.*

Z tego faktu wynika następujące stwierdzenie.

12.4.2. *Podzbiór A przestrzeni metrycznej X jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element przestrzeni X jest granicą ciągu o wyrazach należących do A.*

D. Załóżmy, że zbiór A jest gęsty i $p \in X$ jest dowolnym elementem. Wtedy każda kula o środku w punkcie p i promieniu $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, ma element a_n, należący do A. Mamy zatem ciąg (a_n) o wyrazach należących do A i przy tym

$$0 \leqslant d(p, a_n) < \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie d jest metryką przestrzeni X. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że 0 jest granicą ciągu $\Big(d(p, a_n)\Big)$ i stąd wynika, że p jest granicą (w przestrzeni X) ciągu (a_n).

Załóżmy teraz, że każdy element przestrzeni X jest granicą ciągu o wyrazach należących do A. Niech $K(p, r)$ będzie dowolną kulą w X; punkt p należy do X oraz $r > 0$ jest liczbą rzeczywistą. Istnieje wtedy ciąg (a_n), o wyrazach należących do A, którego granicą jest punkt p. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą taką, ze $0 < \varepsilon < r$. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $d(p, a_n) < \varepsilon$ dla $n \geqslant n_0$. Ustalmy jedno n większe od n_0. Wtedy $d(p, a_n) < \varepsilon < r$, a zatem $a_n \in K(p, r)$. Wykazaliśmy, że każda kula zawiera element ze zbioru A. Zatem (patrz 12.4.1) zbiór A jest gęsty. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.5 Gęstość podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Zbiór $\mathbb{R}$, wszystkich liczb rzeczywistych, jest przestrzenią metryczną z metryką $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną przy pomocy bezwzględnej wartości;

$$d(x, y) = |x - y|.$$

dla $x, y \in \mathbb{R}$. Kulami w tej przestrzeni są wszystkie przedziały otwarte

$$(a, b) = \Big\{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\Big\},$$

gdzie $a < b$ są liczbami rzeczywistymi.

Dowolny podzbiór X zbioru liczb rzeczywistych jest również przestrzenią metryczną, z metryką zdefiniowaną w powyższy sposób. Każdy zbiór otwarty takiej przestrzeni X jest postaci $U \cap X$, gdzie U jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}$. Kulą o środku w punkcie $p \in X$ i promieniu $r > 0$ jest zbiór $(p - r, p + r) \cap X$.

Interesować nas będą takie podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, które posiadają co najmniej dwa różne elementy i które są wypukłe. Przypomnijmy, że podzbiór $X \subseteq \mathbb{R}$ jest wypukły, jeśli z tego, że dwie różne liczby rzeczywiste a, b do niego należą wynika, że cały przedział domknięty $[a, b]$ jest w nim zawarty. Wypukłymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych są, oprócz całego zbioru $\mathbb{R}$, wszystkie przedziały:

$$(a, b),\ (a, b],\ [a, b)\ [a, b],\ (-\infty, b),\ (-\infty, b],\ (a, \infty),\ [a, \infty),$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. W szczególności zbiór $\mathbb{R}^+$, wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, jest takim podzbiorem wypukłym; $\mathbb{R}^+ = (0,\ +\infty)$.

12.5.1. *Niech $X \subset \mathbb{R}$ będzie wypukłym podzbiorem posiadającym co najmniej dwa elementy. Niech A będzie podzbiorem zbioru X. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Zbiór A jest gęstym podzbiorem przestrzeni X,*

(2) *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x < y$, należących do X, istnieje liczba a taka, że*

$a \in A$ oraz $x < a < y$.

(3) *Każda liczba rzeczywista należąca do X jest granicą ciągu o wyrazach ze zbioru A.*

(4) *Dla każdej liczby rzeczywistej $x \in X$ i dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje takie $a \in A$, że $|a - x| < \varepsilon$.*

(5) *Dla każdej liczby wymiernej $q \in X$ i dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje takie $a \in A$, że $|a - q| < \varepsilon$.*

D. Równoważność (1) $\iff$ (3) już udowodniliśmy (patrz 12.4.2). Równoważność (1) $\iff$ (2) wynika z 12.4.1. Wykażemy równoważności (2) $\iff$ (4) $\iff$ (5).

(2) $\Rightarrow$ (4). Niech $x \in X$ i niech $\varepsilon > 0$ będzie liczbą rzeczywistą. Zbiór X ma co najmniej dwa elementy. Istnieje więc liczba y należąca do X i różna od x.

Załóżmy, że $x < y$. Ponieważ X jest zbiorem wypukłym oraz $x, y \in X$, cały przedział $[x, y]$ zawarty jest w X. Niech $\delta > 0$ będzie liczbą rzeczywistą mniejszą od $\min\{\varepsilon, y - x\}$. Wtedy $x + \delta \in X$, gdyż $x + \delta \in [x, y] \subseteq X$. Liczby x i $x + \delta$ należą do zbioru X, z warunku (2) wynika więc, że istnieje takie $a \in A$, że $x < a < x + \delta$. Wtedy

$$x - \varepsilon < x < a < x + \delta < x + \varepsilon$$

i mamy: $|a - x| < \varepsilon$. Podobnie postępujemy, gdy $x > y$.

(4) $\Rightarrow$ (5). Ta implikacja jest oczywista.

(5) $\Rightarrow$ (2). Niech $x, y \in X$, $x < y$. Ponieważ X jest zbiorem wypukłym, więc cały przedział domknięty $[x, y]$ zawarty jest w X. Istnieje więc liczba wymierna q należąca do X i taka, że $x < q < y$. Niech $\varepsilon = \min\{q - x, y - q\}$. Z warunku (4) wiemy, że istnieje takie $a \in A$, że $q - \varepsilon < a < q + \varepsilon$. Wtedy

$$x \leqslant q - \varepsilon < a < q + \varepsilon \leqslant y.$$

Istnieje więc takie $a \in A$, że $x < a < y$. ⊠

W dowodzie implikacji (5) $\Rightarrow$ (2) wykorzystaliśmy dobrze znany fakt, że zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Przedstawmy dowód tego faktu. W tym celu najpierw wykazujemy następujący lemat.

12.5.2. *Jeśli $a > 0$ jest liczbą rzeczywistą, to istnieje liczba naturalna n taka, że*

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

D. Przypuśćmy, że to nie jest prawdą. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $\frac{1}{n} \geqslant a$, z której wynika nierówność $n \leqslant \frac{1}{a}$. Zbiór liczb naturalnych jest więc wtedy ograniczony z góry (przez liczbę $\frac{1}{a}$), a to jest oczywiście sprzecznością. ⊠

Teraz możemy udowodnić:

12.5.3. *Zbiór liczb wymiernych jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.*

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Oznaczmy przez a dodatnią liczbę $y - x$ i niech n będzie liczbą naturalną taką, że

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

Taka liczba n istnieje na mocy 12.5.2. Rozpatrzmy liczbę wymierną $q = \frac{[nx] + 1}{n}$. Mamy wtedy:

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{[nx] + 1}{n} = q \leqslant \frac{nx + 1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + a = x + (y - x) = y.$$

Zatem q jest liczbą wymierną spełniającą nierówności $x < q < y$. ⊠

W jednym z następnych podrozdziałów wykorzystamy następujące stwierdzenie.

12.5.4. *Niech $r > 0$ będzie liczbą rzeczywistą i niech A będzie gęstym podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^+$. Wtedy zbiór*

$$A^r = \left\{a^r;\ a \in A\right\}$$

również jest gęsty w $\mathbb{R}^+$.

D. Niech $0 < x < y$ będą liczbami rzeczywistymi. Ponieważ zbiór A jest gęsty, więc istnieje takie $a \in A$, że

$$x^{\frac{1}{r}} < a < y^{\frac{1}{r}}.$$

Mamy wtedy: $x < a^r < y$ i $a^r \in A^r$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.6 Lematy

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale udowodnimy kilka lematów, z których będziemy korzystać w następnych podrozdziałach. Pierwsze dwa lematy dotyczą granic ciągów.

12.6.1. *Niech (x_n) będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny i jego granica jest liczbą większą od zera. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N_ε taka, że*

$$\left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| < \varepsilon,$$

dla wszystkich $n, m > N_\varepsilon$.

D. Niech $\lim x_n = a > 0$. Wtedy $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$, więc ciąg $(1/x_n)$ jest zbieżny; jest więc ograniczony. Istnieje zatem takie $M > 0$, że $\left|\frac{1}{x_n}\right| \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, istnieje takie $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że $|x_n - x_m| < \varepsilon/M$ dla $n, m > N_\varepsilon$. Mamy zatem

$$\left|\frac{x_n}{x_m} - 1\right| = \left|\frac{x_n - x_m}{x_m}\right| = |x_n - x_m| \left|\frac{1}{x_m}\right| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

dla wszystkich $n, m > N_\varepsilon$. ⊠

12.6.2. *Jeśli a, b są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[an]}{[bn]} = \frac{a}{b}.$$

D. Istnieje takie n_0, że $bn > 1$ dla $n \geqslant n_0$ i wtedy

$$\frac{an-1}{bn} < \frac{[an]}{[bn]} < \frac{an}{bn-1}.$$

Ponieważ $\lim \dfrac{an-1}{bn} = \lim \dfrac{an}{bn-1} = \dfrac{a}{b}$, więc teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ⊠

W następnych lematach mowa będzie o funkcjach wielomianowych.

12.6.3. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Istnieje wtedy dodatnia liczba u taka, że*

$$f(n) \leqslant c(n+u)^d,$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

D. Niech $f(x) = cx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0$, gdzie $a_0, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$. Niech

$$r_i = \sqrt[i]{c^{-1}\binom{d}{i}^{-1}|a_{d-i}|}, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

i niech $u = \max(r_1, r_2, \ldots, r_d)$. Wtedy $u > 0$ oraz $|a_{d-i}| \leqslant c\binom{d}{i}u^i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, d$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} f(n) &= cn^d + a_{p-1}n^{d-1} + \cdots + a_1n + a_0 \leqslant cn^d + |a_{p-1}|n^{d-1} + \cdots + |a_1|n + |a_0| \\ &\leqslant cn^d + c\binom{d}{1}un^{d-1} + c\binom{d}{2}u^2n^{d-2} + \cdots + c\binom{d}{d-1}u^{d-1}n + cu^d \\ &= c(n+u)^d, \end{aligned}$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. ⊠

12.6.4. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$, o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Istnieją wtedy takie dodatnie liczby rzeczywiste v i M, że*

$$c(n-v)^d \leqslant f(n),$$

dla wszystkich liczb naturalnych n większych od M.

D. Dla $d = 1$ jest to oczywiste. Rozważmy przypadek $d = 2$. Niech $f(x) = cx^2 + ax + b$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ i rozważmy liczby

$$v = c^{-1}\max(1, |a|, |b|), \quad M = 2v.$$

Wtedy $v > 0$, $M > 0$ i dla $n > M$ mamy:

$$\begin{aligned} c(n-v)^2 &= cn^2 - 2cvn + cv^2 = cn^2 - cvn - cvn + cv^2 \\ &\leqslant cn^2 - cvn - 2cv^2 + cv^2 = cn^2 - cvn - cv^2 \\ &\leqslant cn^2 - |a|n - |b| \leqslant cn^2 + an + b \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Dalej załóżmy, że $d \geqslant 3$ i niech $f(x) = cx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Niech

$$v = c^{-1}\max(1, |a_{d-1}|, |a_{d-2}|, \ldots, |a_1|, |a_0|), \quad M = vr, \quad \text{gdzie} \quad r = \max\left(\binom{d}{1}, \binom{d}{2}, \ldots, \binom{d}{d-1}\right).$$

Przy tych założeniach, jeśli $\frac{d}{2} \geqslant k \in \mathbb{N}$ oraz $n > M$, to

$$\begin{aligned} -c\binom{d}{2k-1}v^{2k-1}n^{d-(2k-1)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} & \\ &\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} \\ &\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - crv^{2k}n^{d-2k)} + c\binom{d}{2k}v^{2k}n^{d-2k} \\ &\leqslant -2cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} = -cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} - cv^{2k-1}n^{d-(2k-1)} \\ &\leqslant -|a_{d-(2k-1)}|n^{d-(2k-1)} - |a_{d-2k}|n^{d-2k} \\ &\leqslant a_{d-(2k-1)}n^{d-(2k-1)} + a_{d-2k}n^{d-2k}. \end{aligned}$$

Stąd dla $n > M$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c(n-v)^d &= cn^d + \left(-c\tbinom{d}{1}v^1n^{d-1} + c\tbinom{d}{2}v^2n^{d-2}\right) + \left(-c\tbinom{d}{3}v^3n^{d-3} + c\tbinom{d}{4}v^2n^{d-4}\right) + \dots \\ &\leqslant cn^d + \left(a_{d-1}n^{d-1} + a_{d-2}n^{d-2}\right) + \left(a_{d-3}n^{d-3} + a_{d-4}n^{d-4}\right) + \dots \\ &= f(n). \end{aligned}$$

Zatem $c(n-v)^d \leqslant f(n)$, dla $n > M$. ⊠

Wykorzystamy również następujący oczywisty lemat.

12.6.5. *Niech $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$. Istnieje wtedy liczba całkowita b taka, że $0 \leqslant a\lambda + b < 1$.*

D. Przyjmujemy $b = -[a\lambda]$. Wtedy $a\lambda + b = a\lambda - [a\lambda] = \{a\lambda\}$ jest częścią ułamkową liczby ax i oczywiście $0 \leqslant a\lambda + b < 1$. ⊠

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7 Twierdzenie Kroneckera

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.7.1 (Twierdzenie Kroneckera)**.** *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Oznaczmy $\delta = y - x > 0$ i niech n będzie taką liczbą naturalną (istniejącą na mocy 12.5.2), że $0 < \frac{1}{n} < \delta$. Podzielmy przedział $[0, 1)$ na n części:

$$\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{n}\right), \quad \Delta_2 = \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad \dots, \quad \Delta_n = \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Wiemy (patrz lemat 12.6.5), że dla każdej liczby całkowitej a istnieje liczba całkowita b_a taka, że $0 < a\lambda + b_a < 1$. Każda liczba postaci $a\lambda + b_a$ należy do jednego z przedziałów $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Ponieważ tych przedziałów jest tylko skończenie wiele, a liczb całkowitych jest nieskończenie wiele, więc istnieją dwie różne liczby całkowite a i a_1 takie, że liczby $u = a\lambda + b_a$ oraz $u_1 = a_1\lambda + b_{a_1}$ należą do tego samego przedziału Δ_i. Wtedy $a \neq a_1$ oraz $|u - u_1| < \frac{1}{n}$. Z niewymierności liczby λ wynika, że $u \neq u_1$.

Możemy założyć, że $u > u_1$. Wtedy $|u-u_1| = u-u_1$. Ponadto, $u-u_1 = (a-a_1)\lambda+(b_a-b_{a_1}) = c\lambda+d$, gdzie $c, d \in \mathbb{Z}$.

Wykazaliśmy zatem, że istnieją dwie takie liczby całkowite c i d, że

$$0 < c\lambda + d < \frac{1}{n} < \delta = y - x.$$

Niech $p = c\lambda + d$ i rozpatrzmy zbiór

$$U = \Big\{u \in \mathbb{Z};\ pu > x\Big\} = \Big\{u \in \mathbb{Z};\ u > \frac{x}{p}\Big\}.$$

Jest to niepusty i ograniczony z dołu (przez liczbę $\frac{x}{p}$) podzbiór zbioru liczb całkowitych. Ma zatem element najmniejszy; oznaczmy ten najmniejszy element przez z. Wtedy $z \in \mathbb{Z}$ oraz $x < zp$. Pokażemy, że $zp < y$. Przypuśćmy, że $zp \geqslant y$. Wtedy

$$zp \geqslant y = x + (y-x) = x + \delta > x + \frac{1}{n} > x + p$$

i stąd $(z-1)p > x$. To oznacza, że $z-1$ należy do zbioru U i mamy sprzeczność z tym, że z jest najmniejszym elementem w zbiorze U. Zatem $x < zp < y$. Ale $zp = z(c\lambda + d) = (zc)\lambda + (zd)$ i liczby zc, zd są całkowite. Istnieją więc takie liczby całkowite a i b, że $x < a\lambda + b < y$ i to kończy dowód. ⊠

Wykażemy teraz, że w powyższym twierdzeniu Kroneckera można dodatkowo założyć, że wystpujące w nim liczby a są naturalne i to jeszcze większe od dowolnie ustalonej liczby naturalnej M. W tym celu najpierw wykażemy, że można dodatkowo założyć, że liczby a są niezerowe.

12.7.2. *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Wykażemy, że istnieją takie liczby całkowite a, b, że $a \neq 0$ oraz $x < a\lambda + b < y$.

Istnieją (na mocy twierdzenia 12.7.1) takie liczby całkowite a i b, że $x < a\lambda + b < y$. Jeśli $a \neq 0$, to nie ma czego dowodzić. Załóżmy, że $a = 0$. Wtedy $x < b < y$. W przedziale (x, y) znajduje się więc co najmniej jedna liczba całkowita. Załóżmy, że b jest najmniejszą liczbą całkowitą w tym przedziale. Wtedy $x < b < y$ i (znowu na mocy twierdzenia 12.7.1) istnieją liczby całkowite a_1, b_1 spełniające nierówności

$$x < a_1\lambda + b_1 < b.$$

Jeśli teraz $a_1 = 0$, to $x < b_1 < b < y$ i mamy sprzeczność z tym, że b jest najmniejszą liczbą całkowitą w przedziale (x, y). Zatem a_1 i b_1 są liczbami całkowitymi, $a_1 \neq 0$ oraz $x < a_1\lambda + b_1 < y$. ⊠

Teraz możemy wykazać następującą wzmocnioną wersję twierdzenia 12.7.1.

12.7.3. *Jeśli λ jest liczbą niewymierną i M jest liczbą naturalną, to zbiór*

$$\Big\{a\lambda + b;\ a, b \in \mathbb{Z},\ a > M\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Część I. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Wykażemy najpierw, że istnieją takie liczby całkowite u i v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u \geqslant 1$.

Przypuśćmy, że to nie jest prawdą. Na mocy twierdzenia 12.7.2, istnieją takie liczby całkowite a_0, b_0, że $a_0 \neq 0$ oraz $0 < a_0\lambda + b_0 < \varepsilon$. Z naszego przypuszczenia wynika, że a_0 jest liczbą ujemną. Niech $a_0 = -n_0$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$. Liczba n_0 należy do zbioru tych wszystkich liczb naturalnych n, dla których istnieje liczba całkowita b taka, że $0 < -n\lambda + b < \varepsilon$. Załóżmy, że n_0 jest najmniejszym elementem w tym zbiorze. Niech $0 < -n_0\lambda + b_0 < \varepsilon$ dla pewnego $b_0 \in \mathbb{Z}$; oznaczmy $p = -n_0\lambda + b_0$.

Ponieważ $0 < p$, więc (znowu na mocy 12.7.2) istnieją takie liczby całkowite a_1, b_1, że

$$0 < a_1\lambda + b_1 < p < \varepsilon \quad \text{oraz} \quad a_1 \neq 0;$$

oznaczmy $q = a_1\lambda + b_1$. Z nierówności $0 < q < \varepsilon$ wynika, że $a_1 = -n_1$ dla pewnego $n_1 \in \mathbb{N}$ i ponadto, $n_1 \geqslant n_0$. Gdyby zachodziła równość $n_1 = n_0$, wówczas różnica $p - q$ byłaby liczbą całkowitą (równą $b_0 - b_1$) należącą do przedziału $(0,1)$; sprzeczność. Zatem $n_1 > n_0$. Zauważmy, że

$$0 < p - q = (-n_0\lambda + b_0) - (-n_1\lambda + b_1) = (n_1 - n_0)\lambda + (b_0 - b_1) < \varepsilon.$$

Mamy więc $0 < s\lambda + t < \varepsilon$, gdzie $s = n_1 - n_0$ oraz $t = b_0 - b_1$ są liczbami całkowitymi i przy tym $s > 0$. To jest jednak sprzeczne z tym co założyliśmy na początku tej części dowodu.

Dla każdej więc liczby rzeczywistej ε, spełniającej nierówności $0 < \varepsilon < 1$, istnieją takie liczby całkowite u, v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $v \geqslant 1$.

Część II. Niech ε będzie liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Wykażemy, że istnieją takie liczby całkowite u i v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u > M$.

Liczba $(M+1)\lambda$ jest niewymierna. Z części pierwszej tego dowodu wynika więc, że istnieją takie liczby całkowite a i b, że $0 < a(M+1)\lambda + b < \varepsilon$ oraz $a \geqslant 1$. Niech $u = a(M+1)$, $v = b$. Wtedy $0 < u\lambda + v < \varepsilon$, $u, v \in \mathbb{Z}$, $u > M$.

Część III. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech $\varepsilon = \min\{1, (y-x)/2\}$ i rozważmy przedział $(x, x+\varepsilon)$. Niech c, d będą liczbami całkowitymi takimi, że

$$x < c\lambda + d < x + \varepsilon.$$

Takie liczby całkowite istnieją na mocy twierdzenia 12.7.1. Oznaczmy przez M_1 liczbę naturalną większą niż $M - c$. Z drugiej części tego dowodu wiemy, że istnieją takie liczby całkowite u, v, że $0 < u\lambda + v < \varepsilon$ oraz $u > M_1$. Przyjmijmy: $a = u + c$, $b = v + d$. Mamy wtedy $a = u + c > M_1 + c > (M - c) + c = M$ oraz

$$x = x + 0 < (c\lambda + d) + (u\lambda + v) = a\lambda + b < x + \varepsilon + \varepsilon = x + 2\varepsilon \leqslant x + 2\frac{y-x}{2} = y.$$

Zatem $x < a\lambda + b < y$ i przy tym $a > M$. To oznacza, że badany zbiór jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. ⊠

Twierdzenie Kroneckera 12.7.1 można również wysłowić w następującej wersji.

12.7.4. *Jeśli λ jest dodatnią liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{ m\lambda - n;\ n, m \in \mathbb{N} \Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech M będzie liczbą naturalną taką, że $M\lambda > y$. Istnieją takie liczby całkowite a, b, że $x < a\lambda + b < y$ oraz $a > M$ (wynika to z twierdzenia 12.7.3). Ponieważ $a > M$, więc $m = a$ jest liczbą naturalną. Przypuśćmy, że $b \geqslant 0$. Wtedy mamy sprzeczność: $y < M\lambda < a\lambda \leqslant a\lambda + b < y$. Zatem b jest ujemną łiczbą całkowitą; niech $b = -n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $x < m\lambda - n < y$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ i to kończy dowód. ⊠

Założyliśmy, że liczba niewymierna λ jest dodatnia. Dla ujemnych liczb niewymiernych mamy podobne twierdzenie.

12.7.5. *Jeśli λ jest ujemną liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{m\lambda + n;\ \ n, m \in \mathbb{N}\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Stosujemy twierdzenie 12.7.4 dla dodatniej liczby wymiernej $-\lambda$ i nierówności $-y < -x$. Istnieją takie liczby naturalne m, n, że $-y < m(-\lambda) - n < -x$. Mamy wtedy (po pomnożeniu przez -1) nierówności $x < m\lambda + n < y$. ⊠

W powyższych dwóch twierdzeniach można jeszcze dodatkowo założyć, że liczby naturalne m i n są większe od dowolnie ustalonych liczb naturalnych.

12.7.6. *Jeśli λ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz A, B są liczbami naturalnymi, to zbiór*

$$\Big\{m\lambda - n;\ \ n, m \in \mathbb{N},\ \ m > A,\ \ n > B\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Niech C będzie taką liczbą naturalną, że $(A+1)C\lambda - y > B$. Z twierdzenia 12.7.4, zastosowanego dla dodatniej liczby niewymiernej $(A+1)C\lambda$, istnieją takie liczby naturalne u, v, że $x < u\Big((A+1)C\lambda\Big) - v < y$. Przyjmujemy

$$m = u(A+1)C, \quad n = v.$$

Wtedy $x < m\lambda - n < y$ oraz $m > A$ i $n > B$. Istotnie: $m = u(A+1)C \geqslant A+1 > A$ oraz $n > m\lambda - y = u(A+1)C\lambda - y \geqslant (A+1)C\lambda - y > B$. ⊠

Podobnie wykazujemy następne twierdzenie.

12.7.7. *Jeśli λ jest ujemną liczbą niewymierną oraz A, B są liczbami naturalnymi, to zbiór*

$$\Big\{m\lambda + n;\ \ n, m \in \mathbb{N},\ \ m > A,\ \ n > B\Big\}$$

jest gęstym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych.

Pewne zastosowania twierdzenia Kroneckera przedstawimy w następnych podrozdziałach. Teraz podamy dwa inne zastosowania. Dotyczyć one będą początkowych cyfr liczb specjalnego typu. Dokładniejsze informacje na ten temat znajdują się w [N-2]. Tam również są wzmianki o pewnych wersjach twierdzenia Kroneckera.

12.7.8. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \dots, c_k$ istnieje potęga dwójki, której k początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \dots, c_k$.*

D. Niech $c_1, \dots, c_k$ będą danymi cyframi. Oznaczmy:

$$M = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \dots + c_{k-1} 10 + c_k.$$

Ponieważ $\log_{10} 2$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz

$$\log_{10} M < \log_{10}(M+1),$$

więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne m, n, że

$$\log_{10} M < m \log_{10} 2 - n < \log_{10}(M+1).$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_{10} M < m \log_{10} 2 < n + \log_{10}(M+1),$$
$$\log_{10}(10^n M) < \log_{10}(2^m) < \log_{10}(10^n(M+1)),$$
$$M 10^n < 2^m < (M+1)10^n.$$

Początkowymi cyframi liczby 2^m są więc kolejno $c_1, \dots, c_k$. ⊠

12.7.9. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr (układu dziesiętnego) $c_1, c_2, \dots, c_k$ istnieje liczba kwadratowa, której k początkowymi cyframi są kolejno $c_1, \dots, c_k$.*

D. Niech $c_1, \dots, c_k$ będą danymi cyframi. Oznaczmy:

$$M = c_1 10^{k-1} + c_2 10^{k-2} + \dots + c_{k-1} 10 + c_k.$$

Ponieważ $\log_{10} 4$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz $\log_{10} M < \log_{10}(M+1)$, więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją liczby naturalne m, n takie, że

$$\log_{10} M < m \log_{10} 4 - n < \log_{10}(M+1).$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_{10} M < m \log_{10} 4 < n + \log_{10}(M+1),$$
$$\log_{10}(10^n M) < \log_{10}(4^m) < \log_{10}(10^n(M+1)),$$
$$M 10^n < 4^m < (M+1)10^n.$$

Początkowymi cyframi liczby kwadratowej $(2^m)^2 = 4^m$ są więc kolejno $c_1, \dots, c_k$. ⊠

★ K. G. Bankow, *O pewnym twierdzeniu Kroneckera*, [Kw] 7/1986 5-7.
G. H. Hardy, E. M. Wright, *Kronecker's theorem*, [HW4] 375-393.
K. Pióro, *Twierdzenie Kroneckera*, [Dlt] 6/2001, 12 - 13.
D. Wiśniewski, *Twierdzenie Kroneckera o gęstych podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych*, [Pmgr] 1991.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.8 Naturalna gęstość

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale zajmować się będziemy podzbiorami zbioru liczb naturalnych.

Jeśli A jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}$, to dla każdej liczby naturalnej n przez $A(n)$ oznaczać będziemy liczbę wszystkich elementów zbioru $A \cap \{1, 2, \dots, n\}$, tzn.

$$A(n) = \Big|\{a \in A;\ a \leqslant n\}\Big|.$$

Dla przykładu, jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, to $A(1) = 0$, $A(2) = 1$, $A(3) = 1$, $A(4) = 2$ i ogólnie $A(n) = [n/2]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli ciąg $(A(n)/n)$ jest zbieżny, to jego granicę oznacza się przez $\delta(A)$ i nazywa *naturalną gęstością* (ang. "*natural density*") zbioru A. Zapamiętajmy:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}.$$

Interesować nas teraz będzie naturalna gęstość zbioru A. Patrzeć na nią będziemy jak na pewną "miarę" zbioru A w stosunku do całego zbioru liczb naturalnych. Każdy podzbiór skończony ma oczywiście naturalną gęstość równą 0. Zbiór wszystkich liczb naturalnych ma naturalną gęstość równą 1.

Załóżmy, że A jest zbiorem wszystkich naturalnych liczb parzystych. Co druga liczba naturalna jest parzysta. Wspomnieliśmy już, że $A(n) = [n/2]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Mamy zatem:

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{[n/2]}{n} = \frac{1}{2}.$$

Naturalna gęstość zbioru liczb parzystych istnieje i jest równa $\frac{1}{2}$. Podobnie jest dla dowolnych ciągów arytmetycznych o wyrazach naturalnych.

12.8.1. *Niech a, r będą liczbami naturalnymi i niech*

$$A = \{a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \dots\}.$$

Zbiór A posiada naturalną gęstość i jest ona równa $\frac{1}{r}$.

D. Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech $k = A(n)$. Wtedy $a + (k-1)r \leqslant n$, $a + kr > n$, więc $k - 1 \leqslant \frac{n-a}{r} < k$ i stąd wynika, że

$$A(n) = 1 + \left[\frac{n-a}{r}\right]$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem: $\dfrac{n-a}{rn} = \dfrac{\frac{n-a}{r}}{n} < \dfrac{1 + [(n-a)/r]}{n} = \dfrac{A(n)}{n} \leqslant \dfrac{1 + \frac{n-a}{r}}{n} = \dfrac{n+r-a}{rn}$

i wobec tego

$$\frac{n-a}{rn} < \frac{A(n)}{n} \leqslant \frac{n+r-a}{rn}$$

i teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach. ⊠

Istnieją takie podzbiory zbioru liczb naturalnych, które nie posiadają naturalnej gęstości. Spójrzmy na przykłady takich zbiorów.

12.8.2. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 2^{2s},\ 2^{2s}+1,\ 2^{2s}+2,\ \dots,\ 2^{2s+1}-1 \right\}$$

nie posiada naturalnej gęstości.

D. Przypuśćmy, że granica ciągu $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ istnieje i jest ona równa x. Wtedy każdy podciąg tego ciągu również ma granicę równą x. Łatwo sprawdzić, że

$$A\left(2^{2n+1}\right) = \frac{4^{n+1}-1}{3}, \quad A\left(2^{2n}\right) = \frac{4^n+2}{3}.$$

Rozpatrzmy podciągi $\left(\frac{A(2^{2n+1})}{2^{2n+1}}\right)$ i $\left(\frac{A(2^{2n})}{2^{2n}}\right)$. Z powyższych równości wynika, że podciągi te są ciągami zbieżnymi, granica pierwszego ciągu jest równa $\frac{2}{3}$, a granicą drugiego ciągu jest $\frac{1}{3}$. Istnieją więc dwa zbieżne podciągi o różnych granicach. Ciąg $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ nie ma więc granicy. ⊠

12.8.3. *Zbiór* $A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 3^{2s},\ 3^{2s}+1,\ \dots,\ 3^{2s+1}-1 \right\}$ *nie posiada naturalnej gęstości.*

D. W tym przypadku $A\left(3^{2n+1}\right) = \frac{9^{n+1}-1}{4}$ oraz $A\left(3^{2n}\right) = \frac{9^n+3}{4}$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Podciągi $\left(\frac{A(3^{2n+1})}{3^{2n+1}}\right)$ i $\left(\frac{A(3^{2n})}{3^{2n}}\right)$ są więc ciągami zbieżnymi i ich granice są odpowiednio równe $\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$. Istnieją zatem dwa zbieżne podciągi o różnych granicach. Ciąg $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$ nie ma więc granicy. ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.8.4. *Zbiór* $A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \left\{ 2^{3s-1},\ 2^{3s-1}+1,\ \dots,\ 2^{3s} \right\}$ *nie ma naturalnej gęstości.* ([HedR] 640).

12.8.5. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=0}^{\infty} \{ (2s)!,\ (2s)!+1,\ \dots,\ (2s+1)!-1 \}$$

nie ma naturalnej gęstości. ([NiZM] 475).

Przedstawimy teraz pewne własności naturalnej gęstości.

12.8.6. *Niech A będzie nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Jeśli zbiór A posiada naturalną gęstość, to*

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}.$$

([NiZM] 473).

D. Załóżmy, że naturalna gęstość zbioru A jest równa u. Wtedy u jest granicą ciągu $\left(\frac{A(n)}{n}\right)$. Każdy podciąg tego ciągu również ma granicę równą u. W szczególności podciąg $\left(\frac{A(a_n)}{a_n}\right)$ ma granicę równą u. Ale $A(a_n) = n$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a_n} = u = \delta(A)$. ⊠

12.8.7. *Niech A będzie nieskończonym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Jeśli zbiór A posiada naturalną gęstość i gęstość ta jest większa od zera, to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1.$$

([NiZM]).

D. Ciąg $\left(\dfrac{n}{a_n}\right)$ jest (na mocy 12.8.6) zbieżny i jego granica jest większa od zera. Z 12.6.1 wynika więc, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, że

$$\left|\frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}} - 1\right| < \varepsilon,$$

dla $n > N_\varepsilon$. Ciąg $\left(\dfrac{(n+1)a_n}{na_{n+1}}\right)$ jest więc zbieżny do 1. Mamy zatem:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\left(\frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1}\right) = \left(\lim \frac{(n+1)a_n}{na_{n+1}}\right)\left(\lim \frac{n}{n+1}\right) = 1 \cdot 1 = 1. \ ⊠$$

12.8.8 (E. Szemerédi 1975). *Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Jeśli*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

jest liczbą większą od zera, w szczególności jeśli zbiór A ma dodatnią naturalną gęstość, to dla każdej liczby naturalnej n istnieją takie liczby naturalne a, r, że wszystkie liczby

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+(n-1)r$$

są elementami zbioru A, tzn. zbiór A zawiera skończone postępy arytmetyczne dowolnej długości.

U. Twierdzenie to było najpierw hipotezą Erdösa. Udowodnił to E. Szemerédi w 1975 roku. Inny dowód, stosując teorię ergodyczną, podał w 1977 roku H. Furstenberg. Jeszcze inny dowód, stosując analizę Fouriera, podał w 1998 roku W.T. Gowers. ⊠

12.8.9. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli zbiór A ma naturalną gęstość, to zbiór $\mathbb{N} \smallsetminus A$ również ma naturalną gęstość oraz*

$$\delta(A) + \delta(\mathbb{N} \smallsetminus A) = 1.$$

([NiZM] 475 z.2).

12.8.10. *Niech $A \subseteq \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ i niech $A + b = \{a + b;\ a \in A\}$. Jeśli zbiór A posiada naturalą gęstość, to zbiór $A + b$ również ją posiada i te gęstości są równe.* ([NiZM] 475 z.8).

12.8.11. *Jeśli A i B są takimi rozłącznymi podzbiorami zbioru liczb naturalnych, że zbiory A, B oraz $A \cup B$ mają naturalną gęstość, to*

$$\delta(A \cup B) \geqslant \delta(A) + \delta(B).$$

([NiZM] 475 z.10).

12.8.12. *Rozpatrzmy następujące podzbiory zbioru liczb naturalnych:*

$$\begin{array}{lcl} A & = & \textit{zbiór wszystkich liczb parzystych}, \\ B_1 & = & \textit{zbiór liczb parzystych o parzystej liczbie cyfr}, \\ B_2 & = & \textit{zbiór liczb nieparzystych o nieparzystej liczbie cyfr}, \\ B & = & B_1 \cup B_2. \end{array}$$

Zbiory A i B posiadają naturalną gęstość. Natomiast zbiory $A \cup B$ i $A \cap B$ nie posiadają naturalnej gęstości. ([NiZM] 475 z.9).

Zajmiemy się teraz znanymi przykładami podzbiorów zbioru liczb naturalnych posiadających naturalną gęstość.

12.8.13. *Zbiór wszystkich liczb kwadratowych ma naturalną gęstość równą* 0.

D. Niech $A = \left\{n^2;\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $A(n) \leqslant \sqrt{n}$. Mamy zatem

$$0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant \sqrt{1/n}$$

i teza wynika z twierdzenia o trzech ciągach, ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.8.14. *Niech $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. Zbiór $\left\{n^s;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ma naturalną gęstość równą zero.*

12.8.15. *Zbiór*

$$A = \bigcup_{s=2}^{\infty} \{n^s;\ n \in \mathbb{N}\} = \{a^s;\ a \in \mathbb{N}, 2 \leqslant s \in \mathbb{N}\}$$

ma naturalną gęstość równą zero. ([NiZM] 475 z.1(j)).

D. ([SavA] 175-176). Jeśli $a^s \leqslant n$, to

$$a \leqslant \left[\sqrt[s]{n}\right] \leqslant \sqrt{n}$$

oraz $s \leqslant \log_2(n)$. Zatem

$$A(n) \leqslant \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \left[\sqrt[4]{n}\right] + \cdots \leqslant \sqrt{n} \cdot \log_2(n),$$

a zatem $0 \leqslant \frac{A(n)}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}\log_2(n)}{n} = \frac{\log_2(n)}{\sqrt{n}}$. Ponieważ $\lim \frac{\log_2(n)}{\sqrt{n}} = 0$, więc (na mocy twierdzenia o trzech ciągach) gęstość $\delta(A)$ istnieje i jest równa zero. ⊠

12.8.16. *Zbiór wszystkich liczb pierwszych ma naturalną gęstość równą zero.*

D. Ze znanej równości
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$$
wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi(n)}{n}=0$. ⊠

12.8.17. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z* 6 *ma naturalną gęstość równą* $\frac{1}{3}$.

12.8.18. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych względnie pierwszych z* 30 *ma naturalną gęstość równą* $\frac{3}{10}$.

12.8.19. *Niech* $a_1,\dots,a_s$ *będą liczbami naturalnymi i niech* A *będzie zbiorem tych wszystkich liczb naturalnych, które nie są podzielne przez żadną z liczb* $a_1,\dots,a_s$. *Zbiór* A *ma naturalną gęstość* $\delta(A)$ *i zachodzi równość*
$$\delta(A)=1+\sum_{r=1}^{s}(-1)^r\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_r\leqslant s}\frac{1}{\operatorname{nww}(a_{i_1},a_{i_2},\dots,a_{i_r})}.$$
([NiZM] 476 z.11).

Mówimy, że liczba naturalna jest *bezkwadratowa* (ang. *squarefree*) jeśli nie jest podzielna przez żaden kwadrat liczby naturalnej większej od 1, tzn. jeśli jest jest równa 1 lub jest iloczynem parami różnych liczb pierwszych. W [N-3] jest oddzielny podrozdział o liczbach bezkwadratowych.

12.8.20. *Zbiór wszystkich liczb bezkwadratowych ma dodatnią naturalną gęstość równą* $\frac{6}{\pi^2}$. ([NiZM]).

12.8.21. *Jeśli* A *jest zbiorem wszystkich liczb bezkwadratowych, to dla każdej liczby naturalnej* n *zachodzi nierówność* $A(n)>n/2$. ([NiZM] 474).

12.8.22. *Każda liczba naturalna większa od jedynki jest sumą dwóch liczb bezkwadratowych.* ([NiZM] 474).

D. Oznaczmy przez A zbiór wszystkich liczb naturalnych bezkwadratowych. Niech $2\leqslant n\in\mathbb{N}$. Rozpatrzmy dwa zbiory:
$$U=\Big\{a\in\mathbb{N};\ 1\leqslant a\leqslant n-1,\ a\in A\Big\},\quad V=\Big\{b\in\mathbb{N};\ 1\leqslant b\leqslant n-1,\ n-b\in A\Big\}.$$
Suma $U\cup V$ ma co najwyżej $n-1$ elementów. Z 12.8.21 wynika, że
$$|U|+|V|>(n-1)/2+(n-1)/2=n-1.$$
Zbiory U i V nie mogą więc być rozłączne. Istnieje zatem liczba x należąca do części wspólnej tych zbiorów. Wtedy $x=a\in A$ oraz $x=n-b$ i $b\in A$. Zatem $n=a+b$, gdzie $a,b\in A$. ⊠

Mówimy, że liczba naturalna jest liczbą *Nivena*, jeśli jest podzielna przez sumę swoich cyfr. W [N-2] jest oddzielny rozdział o liczbach Nivena.

12.8.23 (R.E. Kennedy, C.N. Cooper 1984)**.** *Zbiór wszystkich liczb Nivena ma naturalną gęstość równą zero.*

12.8.24 (D. N. Lehmer 1900)**.** *Niech $a(n)$ i $b(n)$ będą liczbami pierwotnych trójkątów pitagorejskich, których odpowiednio przeciwprostokątne i obwody nie przewyższają n. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(n)}{n} = \frac{1}{2\pi}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b(n)}{n} = \frac{\ln 2}{\pi^2}.$$

([S59] 59).

12.8.25 (J. Lambek, L. Moser 1955)**.** *Niech $c(n)$ będzie liczbą pierwotnych trójkątów pitagorejskich, których pola nie przewyższają n. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(n)}{\sqrt{n}} = u,$$

gdzie u jest pewną stałą równą $0,531340\cdots$. ([S59] 59).

★ R. E. Kennedy, C. N. Cooper, *On the natural density of the Niven numbers*, [Cmj] 15(4)(1984) 309-312.

R. E. Kennedy, C. N. Cooper, *Chebyshev's inequality and natural density*, [Mon] 96(2)(1989) 118-124.

I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *The density of sequences of integers*, [NiZM] 472-481.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.9 Gęste zbiory ułamków

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

Dla danego podzbioru A zbioru liczb naturalnych, przez $Q(A)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych dających się przedstawić w postaci $\frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in A$, tzn.

$$Q(A) = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in A \right\}.$$

Mówić będziemy, że taki podzbiór A jest *ułamkowo gęsty*, jeśli zbiór $Q(A)$ jest gęsty w zbiorze $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

W tym podrozdziale przedstawimy pewne przykłady ułamkowo gęstych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Najprostszym takim przykładem jest cały zbiór liczb naturalnych. W tym przypadku $Q(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q};\ q > 0\}$ i oczywiście zbiór $\mathbb{Q}^+$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$. Zbiór wszystkich liczb parzystych jest również ułamkowo gęsty; jego zbiór ułamków jest całym zbiorem $\mathbb{Q}^+$.

12.9.1. *Zbiór wszystkich liczb kwadratowych jest ułamkowo gęsty.*

D. Niech x, y będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x < y$. Mamy wtedy dwie dodatnie liczby rzeczywiste $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$ spełniające nierówność $\sqrt{x} < \sqrt{y}$. Ponieważ zbiór $\mathbb{Q}^+$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, więc istnieje dodatnia liczba wymierna $\frac{a}{b}$ (gdzie $a, b \in \mathbb{N}$) leżąca pomiędzy liczbami $\sqrt{x}$ i $\sqrt{y}$. Wtedy

$$x < \frac{a^2}{b^2} < y$$

i to kończy dowód. $\boxtimes$

W ten sam sposób dowodzimy, że podobną włanosć mają zbiory wszystkich sześcianów, wszystkich bikwadratów i ogólniej:

12.9.2. *Niech* $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$. *Zbiór* $\left\{n^s;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest ułamkowo gęsty.*

Każdy podzbiór ułamkowo gęsty jest zbiorem nieskończonym. Istnieją nieskończone podzbiory zbioru liczb naturalnych, które nie są ułamkowo gęste. Kilka przykładów:

12.9.3. *Zbiór* $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$, *wszystkich potęg dwójki, nie jest ułamkowo gęsty. Ogólniej, dla każdej liczby naturalnej* a, *zbiór* $\{a^0, a^1, a^2, \dots\}$ *nie jest ułamkowo gęsty.*

D. Zbiorem wszystkich ułamków o licznikach i mianownikach należących do $A = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ jest $Q(A) = \{2^s;\ s \in \mathbb{Z}\}$. Zbiór $Q(A)$ nie jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, gdyż na przykład nie ma takiej liczby, która należy do $Q(A)$ i jest pomiędzy liczbami 5 i 7. Podobnie uzasadniamy w przypadku ogólnym, gdy $A = \{a^0, a^1, \dots, \}$. $\boxtimes$

12.9.4. *Zbiór wszystkich liczb Fibonacciego nie jest ułamkowo gęsty.*

D. Przypomnijmy, że liczbą Fibonacciego nazywamy każdy wyraz ciągu (u_n), określonego równościami $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Pokażemy, że nie ma takich dwóch liczb Fibonacciego u_n, u_m, że

$$1 < \frac{u_n}{u_m} < \frac{5}{4}.$$

Przypuśćmy, że są. Wtedy $u_m < u_n$, więc $m + 1 \leqslant n$. Jeśli $n \geqslant m + 2$, to $\frac{u_n}{u_m} \geqslant 2$. Istotnie,

$$\frac{u_n}{u_m} \geqslant \frac{u_{m+2}}{u_m} = \frac{u_{m+1} + u_m}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} + 1 \geqslant 1 + 1 = 2.$$

Możliwy więc jest tylko przypadek: $n = m + 1$. Ale wtedy $n > 1$ (gdyż $\frac{u_n}{u_m} > 1$) i mamy sprzeczność:

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{u_m + u_{m-1}}{u_m} = 1 + \frac{u_{m-1}}{u_m} \geqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{5}{4}.$$

Wykorzystaliśmy nierówność $\frac{u_{m-1}}{u_m} \geqslant \frac{1}{2}$, którą wykazujemy w następujący sposób: $2u_{m-1} = u_{m-1} + u_{m-1} \geqslant u_{m-1} + u_{m-2} = u_m$. $\boxtimes$

Przed podaniem następnych przykładów zanotujmy trzy stwierdzenia. Pierwsze stwierdzenie jest oczywiste.

12.9.5. *Niech* $A \subseteq B$ *będą podzbiorami zbioru liczb naturalnych. Jeśli zbiór* A *jest ułamkowo gęsty, to zbiór* B *również jest ułamkowo gęsty.*

Następne dwa stwierdzenia już nie są takie oczywiste.

12.9.6. *Niech A będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych i niech B będzie skończonym podzbiorem zbioru A. Jeśli zbiór A jest ułamkowo gęsty, to zbiór $A \setminus B$ również jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

D. Jest jasne, że wystarczy to udowodnić tylko w przypadku, gdy zbiór B jest jednoelementowy. Załóżmy, że $B = \{b_0\}$, oznaczmy przez A_0 zbiór $A \setminus \{b_0\}$ i rozważmy zbiór

$$D = \left\{ \frac{b_0}{a};\ a \in A \right\} \cup \left\{ \frac{a}{b_0};\ a \in A \right\}.$$

Zauważmy, że każdy niepusty zbiór otwarty w $\mathbb{R}^+$ zawiera niepusty podzbiór otwarty rozłączny z D. Zatem (patrz 12.3.1), D jest podzbiorem nigdziegęstym. Mamy ponadto równość

$$Q(A) = Q(A_0) \cup D.$$

Z twierdzenia 12.3.3 wynika, że jeśli $Q(A)$ jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^+$, to $Q(A_0)$ również jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^+$. Zatem, jeśli zbiór A jest ułamkowo gęsty, to takim jest również zbiór A_0. ⊠

12.9.7. *Jeśli podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ posiada naturalną gęstość i ta gęstość jest liczbą większą od zera, to zbiór A jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

D. ([HedR]). Załóżmy, że

$$\delta(A) = \lim \frac{A(n)}{n} = u > 0.$$

Ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Z twierdzenia 12.8.6 wiemy, że wtedy

$$u = \lim \frac{n}{a_n}.$$

Niech $0 < q \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Istnieje wtedy (patrz lemat 12.6.1) liczba naturalna N_0 taka, że

$$\left| \frac{a_m}{a_n} \cdot \frac{1}{m/n} - 1 \right| = \left| \frac{n/a_n}{m/a_m} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

dla wszystkich $n, m > N_0$. Istnieją oczywiście liczby naturalne n, m, które są większe od N_0 i takie, że $q = \frac{m}{n}$. Mamy wtedy

$$\left| \frac{a_m}{a_n} \cdot \frac{1}{q} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{q}$$

i stąd, po pomnożeniu przez q,

$$\left| \frac{a_m}{a_n} - q \right| < \varepsilon.$$

Ułamek $\frac{a_m}{a_n}$ należy do $Q(A)$. Z twierdzenia 12.5.1 wynika więc, że zbiór $Q(A)$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$, a zatem zbiór A jest ułamkowo gęsty. ⊠

Zbiór liczb nieparzystych ma naturalną gęstość równą $\frac{1}{2}$. Zatem, ze stwierdzenia 12.9.7 wynika:

12.9.8. *Zbiór wszystkich nieparzystych liczb naturalnych jest ułamkowo gęsty.*

Zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci $4k+3$ ma naturalną gęstość równą $\frac{1}{4}$. Zatem:

12.9.9. *Zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci* $4k+3$ *jest ułamkowo gęsty.*

Z faktów 12.9.7 i 12.8.1 wynika następujące ogólniejsze stwierdzenie.

12.9.10. *Każdy postęp arytmetyczny* $\{a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \dots\}$, *gdzie* $a, r \in \mathbb{N}$, *jest ułamkowo gęsty.*

Drobna modyfikacja dowodu stwierdzenia 12.9.7 pozwala nam wysłowić następne ogólniejsze stwierdzenie. Przypomnijmy, że jeśli A jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to przez $A(n)$ oznaczamy liczbę tych wszystkich liczb a ze zbioru A, które spełniają nierówność $a \leqslant n$.

12.9.11. *Niech* $r > 0$ *będzie ustaloną liczbą rzeczywistą i niech* A *będzie podzbiorem zbioru liczb naturalnych takim, że ciąg*

$$\frac{A(n)}{n^r}$$

ma granicę i granica ta jest większa od zera. Wtedy zbiór A *jest ułamkowo gęsty.*

D. (I). Załóżmy, że

$$\lim \frac{A(n)}{n^r} = u > 0$$

i ustawmy wszystkie elementy zbioru A w ciąg:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots .$$

Wtedy podciąg $\left(\dfrac{A(a_n)}{a_n^r}\right)$ również ma granicę i ta granica jest równa u. Ale $A(a_n) = n$. Mamy zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n^r} = u > 0.$$

Niech $0 < q \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Istnieje wtedy (patrz lemat 12.6.1) liczba naturalna N_0 taka, że

$$\left|\frac{a_m^r}{a_n^r} \cdot \frac{1}{m/n} - 1\right| = \left|\frac{n/a_n^r}{m/a_m^r} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

dla wszystkich $n, m > N_0$. Istnieją oczywiście liczby naturalne n, m, które są większe od N_0 i takie, że $q = \dfrac{m}{n}$. Mamy wtedy $\left|\dfrac{a_m^r}{a_n^r} \cdot \dfrac{1}{q} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon}{q}$ i stąd, po pomnożeniu przez q,

$$\left|\frac{a_m^r}{a_n^r} - q\right| < \varepsilon.$$

Ułamek $\dfrac{a_m}{a_n}$ należy do $Q(A)$. Z twierdzenia 12.5.1 wynika więc, że zbiór $Q(A)^r = \Big\{b^r;\ b \in Q(A)\Big\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}^+$. Spójrzmy na stwierdzenie 12.5.4. Wynika z niego, że zbiór $Q(A) = \left(Q(A)^r\right)^{\frac{1}{r}}$ również jest gęsty. Zatem, zbiór A jest ułamkowo gęsty. ⊠

D. (II). Dla danej liczby rzeczywistej $x > 0$ oznaczmy przez $A(x)$ liczbę tych wszystkich elementów a ze zbioru A, które spełniają nierówność $a \leqslant x$. Jest jasne, że $A(x) = A([x])$.

Załóżmy, że $\lim \frac{A(n)}{n^r} = u > 0$ i niech $0 < x < y$ będą liczbami rzeczywistymi. Istnieje liczba naturalna n_0 taka, że

$$[xn] > 0, \ [yn] > 0, \ A(xn) > 0, \ A(yn) > 0,$$

dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Podciągi $\Big(A([xn])/[xn]^r\Big)$ i $\Big(A[yn]/[yn]^r\Big)$, rozpatrywane dla $n \geqslant n_0$, mają więc dodatnie wyrazy i są zbieżne do u. Iloraz tych podciągów jest zatem ciągiem zbieżnym i jego granica jest równa 1. Ponieważ

$$\lim \frac{[yn]^r}{[xn]^r} = \left(\frac{y}{x}\right)^r$$

(patrz 12.6.2), więc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(yn)}{A(xn)} = \left(\frac{y}{x}\right)^r > 1.$$

Istnieje zatem takie n_1, że $A(yn) > A(xn)$ dla $n \geqslant n_1$. Stąd wynika, że dla każdego $n \geqslant n_1$ istnieje liczba a_n, należąca do zbioru A i taka, że

$$nx < a_n < ny.$$

Niech b będzie dowolną taką liczbą ze zbioru A, która jest większa od n_1. Wtedy $bx < a_b < by$ oraz $b, a_b \in A$. Zatem $x < \frac{a_b}{b} < y$ i $\frac{a_b}{b} \in Q(A)$. Zbiór $Q(A)$ jest więc gęsty w $\mathbb{R}^+$. ⊠

12.9.12. *Niech $f(x)$ będzie wielomianem stopnia $d \geqslant 1$ o dodatnim współczynniku wiodącym równym c. Załóżmy, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ oraz, że $f(n) < f(m)$, gdy $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Niech $A = f(\mathbb{N}) = \{f(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{\sqrt[d]{n}} = \frac{1}{\sqrt[d]{c}}.$$

D. Wiemy (patrz lematy 12.6.3 i 12.6.4), że istnieją takie dodatnie liczby u, v, M, że

$$c(k-v)^d < f(k) < c(k+u)^d$$

dla wszystkich k większych od M. Niech n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $A(n) > M$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$.

Rozpatrzmy dowolną liczbę naturalną n, większą od n_0. Niech $A(n) = k$. Wtedy $k > M$ oraz $f(k) \leqslant n < f(k+1)$, a zatem

$$c(k-v)^d < f(k) \leqslant n < f(k+1) < c(k+1+u)^d$$

i stąd $\sqrt[d]{c}(k-v) < \sqrt[d]{n} < \sqrt[d]{c}(k+1+u)$, czyli $\sqrt[d]{c}(A(n)-v) < \sqrt[d]{n} < \sqrt[d]{c}(A(n)+1+u)$. Po podzieleniu przez $A(n)$ otrzymujemy nierówności

$$\sqrt[d]{c}\frac{A(n)-v}{A(n)} < \frac{\sqrt[d]{n}}{A(n)} < \sqrt[d]{c}\frac{A(n)+1+u}{A(n)},$$

zachodzące dla wszystkich $n \geqslant n_0$. Ponieważ $\lim A(n) = \infty$, więc ciągi skrajne są zbieżne do tej samej granicy, równej $\sqrt[d]{c}$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika zatem, że $\lim \frac{\sqrt[d]{n}}{A(n)} = \sqrt[d]{c}$ i stąd otrzymujemy tezę: $\lim \frac{A(n)}{\sqrt[d]{n}} = \frac{1}{\sqrt[d]{c}}$. ⊠

12.9.13. *Jeśli $f(x)$ jest wielomianem dodatniego stopnia, o dodatnim współczynniku wiodącym i takim, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, to zbiór $f(\mathbb{N})$ jest ułamkowo gęsty.*

D. Niech $A = f(\mathbb{N}) = \{f(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Funkcja wielomianowa $f(x)$ jest od pewnego miejsca rosnąca. Istnieje zatem liczba naturalna p taka, że

$$f(n+p) < f(m+p),$$

gdy $n < m$, $n, m \in \mathbb{N}$. Rozpatrzmy wielomian $g(x) = f(x+p)$ i niech $B = \{g(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Z twierdzeń 12.9.12 i 12.9.11 wynika, że zbiór B jest ułamkowo gęsty. Ale $B \subseteq A$. Zatem zbiór A również jest ułamkowo gęsty. ⊠

Z twierdzenia 12.9.13 otrzymujemy liczne przykłady zbiorów ułamkowo gęstych. Stosując to twierdzenie dla wielomianu $f(x) = rx + a$ (gdzie $a, r \in \mathbb{N}$), otrzymujemy nowy dowód na to, że postępy arytmetyczne są ułamkowo gęste (patrz 12.9.10). Zanotujmy inne przykłady.

12.9.14. *Zbiór $\left\{n^2 + 1;\ n \in \mathbb{N}\right\}$ jest ułamkowo gęsty.*

D. Twierdzenie 12.9.13 dla wielomianu $f(x) = x^2 + 1$. ⊠

12.9.15. *Zbiór wszystkich liczb trójkątnych jest ułamkowo gęsty.*

D. Przypomnijmy, że liczbą trójkątną nazywamy każdą liczbę naturalną postaci

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$

Teza wynika z twierdzenia 12.9.13 zastosowanego dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$. ⊠

12.9.16. *Zbiór wszystkich liczb tetraedralnych jest ułamkowo gęsty.*

D. Liczbą tetraedralną jest każda liczba naturalna postaci

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(patrz na przykład [N-8]). Teza wynika z twierdzenia 12.9.13, zastosowanego dla wielomianu

$$f(x) = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2). \quad ⊠$$

Liczby trójkątne i liczby tetraedralne można zapisać za pomocą symboli Newtona. Liczba trójkątna $\frac{1}{2}n(n+1)$ jest równa $\binom{n+1}{2}$. Liczba tetraedralna $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ jest natomiast równa $\binom{n+2}{3}$. Powyższe przykłady 12.9.15 i 12.9.16 są szczególnymi przypadkami następującego ogólniejszego przykładu.

12.9.17. *Przy ustalonym $k \in \mathbb{N}$, zbiór wszystkich liczb naturalnych postaci*

$$\binom{n+k-1}{k},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest ułamkowo gęsty.

D. Stosujemy twierdzenie 12.9.13 dla wielomianu $f(x) = \frac{1}{k!}x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$. ⊠

Wiemy już (patrz 12.9.3), że jeśli a jest liczbą naturalną, to zbiór $B(a) = \{a^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ nie jest ułamkowo gęsty. Dla danych liczb naturalnych a i b rozpatrzmy zbiór

$$B(a,b) = B(a) \cup B(b) = \Big\{a^n;\ n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \Big\{b^n;\ n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Można udowodnić (patrz 12.11.5):

12.9.18. *Jeśli $a \geqslant 2$ i $b \geqslant 2$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, to zbiór $B(a,b)$ jest ułamkowo gęsty.* ([HedR]).

Stąd w szczególności wynika:

12.9.19. *Zbiór $\Big\{2^n 3^m;\ n, m \in \mathbb{N}_0\Big\}$ jest ułamkowo gęsty.*

D. Zbiór ten zwiera ułamkowo gęsty zbiór $B(2,3)$. Wystarczy więc wykorzystać 12.9.5. ⊠

12.9.20 (Ramanujan)**.** *Jeżeli $N(x)$ oznacza liczbę liczb naturalnych postaci $2^n 3^m$ nie większych od x (gdzie $n, m \in \mathbb{N}_0$), to*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(x)}{\ln^2(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{N(x)}{\ln(2x)\ln(3x)} = \frac{1}{2\ln 2 \cdot \ln 3}.$$

([S59] 267-268).

★ S. R. Garcia, V. Selhorst-Jones, D. E. Poore, N. Simon, *Quotient sets and diophantine equations*, [Mon] 118(8)(2011) 704-711.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.10 Ułamkowa gęstość zbioru liczb pierwszych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale przedstawimy dowód następującego twierdzenia Andrzeja Schinzla.

12.10.1 (A. Schinzel 1959)**.** *Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest ułamkowo gęsty. Innymi słowy, zbiór wszystkich liczb p/q, gdzie p i q są to liczby pierwsze, jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.* ([S59] 411, [S88] 165).

Przypomnijmy, że jeśli x jest dodatnią liczbą rzeczywistą, to przez $\pi(x)$ oznacza się liczbę liczb pierwszych nie większych od x. W dowodzie twierdzenia 12.10.1 wykorzystuje się znane klasyczne twierdzenie (*prime number theorem*):

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Wspominaliśmy o tym twierdzeniu w [N-4]. Z tego twierdzenia wynikają następujące wnioski.

12.10.2. *Dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych spełniających nierówność $x < y$, istnieje liczba naturalna n_0 taka, że*

$$\pi(nx) < \pi(ny)$$

dla wszystkich $n \geqslant n_0$. ([S59], [S88]).

D. ([S59] 410, [S88] 164). Niech $0 < x < y$. Z równości $(*)$ otrzymujemy równości

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi([nx])\ln([nx])}{[nx]} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\pi([ny])\ln([ny])}{[ny]} = 1.$$

Mamy ponadto, $\pi(nx) = \pi([nx])$, $\pi(ny) = \pi([ny])$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{[ny]}{[nx]} = \frac{y}{x}$ (patrz 12.6.2) i łatwo wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln([ny])}{\ln([nx])} = 1.$$

Stąd wynika, że ciąg $\left(\frac{\pi(ny)}{\pi(nx)}\right)$ jest zbieżny i jego granica jest równa $\frac{y}{x}$. Mamy zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(ny)}{\pi(nx)} = \frac{y}{x} > 1.$$

Istnieje więc taka liczba naturalna n_0, że dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant n_0$ zachodzi nierówność

$$\frac{\pi(ny)}{\pi(nx)} > 1.$$

Mamy więc: $\pi(nx) < \pi(ny)$ dla $n \geqslant n_0$. ⊠

12.10.3. *Niech $x < y$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n_0, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ istnieje liczba pierwsza q_n spełniająca nierówności*

$$nx < q_n < ny.$$

([S59], [S88]).

D. Niech z będzie liczbą rzeczywistą taką, że $x < z < y$. Istnieją wtedy (na mocy 12.10.2) takie liczby naturalne n_1 i n_2, że

$$\pi(nx) < \pi(nz)$$

dla $n \geqslant n_1$ oraz $\pi(nz) < \pi(ny)$ dla $n \geqslant n_2$. Liczbę $\max(n_1, n_2)$ oznaczmy przez n_0. Dla wszystkich $n \geqslant n_0$ zachodzą więc dwie nierówności

$$\pi(nx) < \pi(nz) \quad \text{i} \quad \pi(nz) < \pi(ny),$$

a zatem istnieją liczby pierwsze p, q takie, że

$$nx < p \leqslant nz, \quad nz < q \leqslant ny.$$

Przyjmujemy $q_n = p$ i mamy $nx < q_n < ny$. ⊠

Teraz możemy już udowodnić twierdzenie 12.10.1.

Dowód twierdzenia 12.10.1. ([S59] 410, [S88] 164). Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < x < y$. Istnieje wtedy (patrz 12.10.3) liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ w przedziale (nx, ny) znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Ponieważ liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, istnieje liczba pierwsza p, która jest większa od n_0. W przedziale (px, py) znajduje się więc jakaś liczba pierwsza q. Wtedy

$$px < q < py$$

i mamy: $x < \frac{q}{p} y$. Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest więc ułamkowo gęsty. ⊠

W przedstawionym dowodzie istotną rolę odegrała równość $(*)$. Zanotujmy jeszcze jeden wniosek wynikający z tej równości, o którym wspominaliśmy w [N-2].

12.10.4 (W. Sierpiński 1951)**.** *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr* (*układu dziesiętnego*) $c_1, c_2, \dots, c_m$ *istnieje liczba pierwsza, której* m *początkowymi cyframi są kolejno* $c_1, \dots, c_m$. ([S59], [Trost] 51, [S88]).

D. ([S59] 412). Niech a będzie m-cyfrową liczbą naturalną, której cyframi są kolejno $c_1, c_2, \dots, c_m$. Niech $x = a$, $y = a + 1$. Wtedy $0 < x < y$, a więc (patrz 12.10.3) istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$ w przedziale (nx, ny) znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza. Niech s będzie taką liczbą naturalną, że $10^s \geqslant n_0$. Wtedy w przedziale $(x10^s, y10^s)$ znajduje się jakaś liczba pierwsza p. Ponieważ

$$10^s a < p < 10^s(a + 1),$$

więc początkowymi cyframi liczby pierwszej p są kolejno $c_1, c_2, \dots, c_m$. ⊠

Stąd otrzymujemy natychmiast:

12.10.5. *Dla dowolnego skończonego ciągu cyfr* (*układu dziesiętnego*) $c_1, c_2, \dots, c_m$ *istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, których* m *początkowymi cyframi są kolejno* $c_1, \dots, c_m$. ([S59], [Trost] 51, [S88]).

★ D. Hobby, D. M. Silberger, *Quotients of primes*, [Mon] 100(1993) 50-52.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.11 Zbiory gęste i ciągi liczb naturalnych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

W tym podrozdziale podamy pewne przykłady gęstych podzbiorów w $\mathbb{R}^+$ postaci

$$\left\{ \frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N} \right\},$$

gdzie (a_n) i (b_n) są nieskończonymi ciągami liczb naturalnych. W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się zbiorami tego typu przy dodatkowym założeniu, że ciągi (a_n) i (b_n) są takie same. Teraz nie będziemy tego zakładać. Zanotujmy najpierw dwa proste stwierdzenia.

12.11.1. *Niech* (a_n) *i* (b_n) *będą ciągami dodatnich liczb rzeczywistych i niech*

$$A = \left\{ \frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{b_n}{a_m};\ n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jeśli zbiór A *jest gęsty w* $\mathbb{R}^+$*, to zbiór* B *również jest gęsty w* $\mathbb{R}^+$*.*

D. Załóżmy, że A jest gęste w $\mathbb{R}^+$ i niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $0 < x < y$. Mamy wtedy nierówność

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x}.$$

Istnieje więc liczba $u = \dfrac{a_n}{b_m}$, należąca do A taka, że $\dfrac{1}{y} < u < \dfrac{1}{x}$. Stąd mamy:

$$x < \frac{1}{u} < y \quad \text{i} \quad \frac{1}{u} = \frac{b_m}{a_n} \in B.$$

Zatem zbiór B jest (na mocy 12.5.1) gęsty w $\mathbb{R}^+$. ⊠

W tym podrozdziale mówić będziemy, że dany ciąg (a_n) jest *specjalny*, jeśli dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x < y$ istnieje liczba naturalna n_0 taka, że dla wszystkich $n \geqslant n_0$ w przedziale $(nx,\ ny)$ znajduje się co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n).

12.11.2. *Niech (a_n) i (b_n) będą takimi ciągami liczb naturalnych, że $\lim a_n = \infty$ i $\lim b_n = \infty$. Jeśli co najmniej jeden z tych ciągów jest specjalny, to zbiory*

$$A = \left\{\frac{a_n}{b_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad B = \left\{\frac{b_n}{a_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}$$

są gęste w $\mathbb{R}^+$.

D. Załóżmy, że ciąg (a_n) jest specjalny. Niech $0 < x < y$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ i niech n_0 będzie liczbą naturalną występującą w powyższej definicji ciągu specjalnego. Ponieważ $\lim b_n = \infty$, więc w ciągu (b_n) istnieje wyraz b_m, który jest większy od n_0. Wówczas w przedziale $(b_m x,\ b_m y)$ znajduje się co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n); niech to będzie wyraz a_n. Wtedy

$$x < \frac{a_n}{b_m} < y.$$

Zbiór A jest więc (na mocy 12.5.1) gęsty w $\mathbb{R}^+$. Gęstość zbioru B wynika z 12.11.1. ⊠

Wiemy (patrz 12.10.3), że ciąg (p_n), kolejnych liczb pierwszych, jest specjalny. Wiemy również (patrz stwierdzenia 12.9.12, 12.9.13 i drugi dowód twierdzenia 12.9.11), że specjalnym jest każdy ciąg postaci $(f(n))$, gdzie $f(x)$ jest wielomianem dodatniego stopnia o dodatnim współczynniku wiodącym i takim, że $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Mamy zatem kolejne przykłady gęstych podzbiorów zbioru dodatnich liczb rzeczywistych.

12.11.3. *Następujące zbiory są gęstymi podzbiorami w $\mathbb{R}^+$.*

$$\begin{array}{lll}
\left\{\frac{p}{n^2+1};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{4n+1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{p}{2^n};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \\
\left\{\frac{2^n-1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{2^{2^n}+1}{p};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{p}{u_n};\ p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}\right\}, \\
\left\{\frac{2^n-1}{u_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{u_n}{3^m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{t_n}{u_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \\
\left\{\frac{n^3-1}{t_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{T_n}{3^m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}, & \left\{\frac{t_n}{T_m};\ n, m \in \mathbb{N}\right\}.
\end{array}$$

Oznaczenia: $\mathbb{P}$ = zbiór liczb pierwszych, u_n = n-ta liczba Fibonacciego, t_n = n-ta liczba trójkątna, T_n = n-ta liczba tetraedralna. Mamy tu również liczby Mersenne'a $2^n - 1$ i liczby Fermata $2^{2^n} + 1$.

W następnych przykładach wykorzystamy twierdzenie Kroneckera.

12.11.4. *Zbiór* $\left\{\frac{2^n}{3^m};\ n.m \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęstym podzbiorem w* $\mathbb{R}^+$.

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}^+$, $0 < x < y$. Ponieważ $\log_3 2$ jest dodatnią liczbą niewymierną oraz

$$\log_3 x < \log_3 y,$$

więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne m, n, że

$$\log_3 x < m \log_3 2 - n < \log_3 y.$$

Mamy wtedy kolejno:

$$n + \log_3 x < m \log_3 2 < n + \log_3 y,$$
$$\log_3(3^n x) < \log_3(2^m) < \log_3(3^n y),$$
$$3^n x < 2^m < 3^n y$$

i stąd $x < \frac{2^m}{3^n} < y$. ⊠

W podobny sposób wykazujemy:

12.11.5. *Jeśli* a, b *są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi większymi od* 1, *to zbiór*

$$\left\{\frac{a^n}{b^m};\ n.m \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęstym podzbiorem w $\mathbb{R}^+$. *Stąd w szczególniści wynika, że zbiór*

$$B(a, b) = \{a^n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{b^n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

jest ułamkowo gęsty.

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.12 Inne przykłady zbiorów gęstych

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

12.12.1. *Jeśli* (a_n) *jest ciągiem takim, że* $\lim a_n = \infty$ *oraz* $A = \lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, *to zbiór*

$$\left\{a_n - a_m;\ n, m \in \mathbb{N}_0\right\}$$

jest gęsty w $\mathbb{R}$. ([K-pv] 117-118).

D. Niech x, y będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $x < y$. Udowodnimy, że pomiędzy x i y znajduje się co najmniej jedna liczba ze zbioru A.

Załóżmy najpierw dodatkowo, że $x \geqslant 0$. Niech $\varepsilon = y - x$. Ponieważ $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$, istnieje liczba naturalna m taka, że

$$|a_n - a_{n-1}| < \varepsilon$$

dla wszystkich $n \geqslant m$. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną spełniającą nierówności $n > m$ oraz $a_n > a_m + x$. Taka liczba n istnieje, gdyż $\lim a_n = \infty$. Wtedy $a_{n-1} \leqslant a_m + x$ i mamy:

$$a_n < a_{n-1} + \varepsilon \leqslant a_m + x + \varepsilon = a_m + y.$$

Zatem $x + a_m < a_n < a_m + y$ i stąd $x < a_n - a_m < y$.

Niech teraz $x < 0$. Jeśli $y > 0$, to (na mocy pierwszej części tego dowodu) istnieje takie $a \in A$, że $0 < a < y$ i mamy wtedy $x < a < y$. Niech więc $y \leqslant 0$. Wtedy $-y < -x$ oraz $-y \geqslant 0$. Istnieje więc liczba $a = a_n - a_m \in A$ spełniająca nierówności $-y < a < -x$. Wtedy $x < -a < y$ i liczba $-a = a_m - a_n$ należy do zbioru A. ⊠

Stąd w szczególności wynika:

12.12.2. *Zbióry* $\left\{\sqrt{n} - \sqrt{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ *i* $\left\{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ *są gęstymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych. Ogólniej, każdy zbiór postaci*

$$\left\{\sqrt[s]{n} - \sqrt[s]{m};\ m, n \in \mathbb{N}_0\right\},$$

gdzie $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$*, jest gęsty w* $\mathbb{R}$*.* ([Putn] 1990, [K-pv] 117-118).

12.12.3. *Jeśli* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *jest funkcją taką, że*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0,$$

to ciąg $a_n = f(n)$ *spełnia założenia podane w* 12.12.1. ([K-pv] 117-118).

Przez $\{x\}$ oznaczamy część ułamkową liczby rzeczywistej x.

12.12.4. *Jeśli* λ *jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\left\{\{n\lambda\};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęsty w przedziale $(0, 1)$*.* ([S59] 265, [HW4], [HedR]).

D. Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y < 1$. Wykażemy, że istnieje liczba naturalna n taka, że $x < \{n\lambda\} < y$.

Przypadek 1. Załóżmy, że $\lambda > 0$. Niech M będzie liczbą naturalną taką, że $M\lambda > y$. Na mocy twierdzenia Kroneckera 12.7.3, istnieją takie liczby całkowite a, b, że $a > M$ oraz $x < a\lambda + b < y$. Wtedy $n = a$ jest liczbą naturalną oraz $b < 0$ (jeśli $b \geqslant 0$, to mamy sprzeczność:

$$y < M\lambda < a\lambda \leqslant a\lambda + b < y.$$

Niech $b = -m$, $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ $0 < n\lambda - m < 1$, więc $m = [n\lambda]$ i stąd $a\lambda + b = n\lambda - [n\lambda] = \{n\lambda\}$. Zatem, $x < \{n\lambda\} < y$.

Przypadek 2. Załóżmy, że $\lambda < 0$. Mamy nierówności $0 < 1 - y < 1 - x < 1$. Ponieważ $-\lambda$ jest dodatnią liczbą niewymierną, więc (na mocy twierdzenia 12.7.4) istnieją takie liczby naturalne n, m, że

$$1 - y < n(-\lambda) - m < 1 - x.$$

Wtedy oczywiście $m = [-n\lambda]$ i mamy:

$$n(-\lambda) - m = -m\lambda - [-n\lambda] = \{-n\lambda\} = 1 - \{n\lambda\}.$$

Zatem $1 - y < 1 - \{n\lambda\} < 1 - x$ i stąd $x < \{n\lambda\} < y$. ⊠

12.12.5 (V. Jarnik)**.** *Jeśli λ jest liczbą niewymierną, to zbiór*

$$\Big\{\{p\lambda\};\ p \in \mathbb{P}\Big\}$$

jest gęsty w przedziale $(0,1)$*.* ([S59] 267).

12.12.6. *Zbiór wszystkich liczb wymiernych postaci*

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m},$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, jest gęsty w zbiorze $[0,\infty)$*.* ([Cmj] 28(5)(1997) s.409).

12.12.7. *Zbiór* $\left\{\dfrac{\varphi(n)}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęsty w przedziale* $(0,1)$*.* ([S59] 210).

12.12.8 (A. Schinzel 1954)**.** *Zbiór* $\left\{\dfrac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *jest gęsty w zbiorze* $\mathbb{R}^+$*.* ([S59] 210).

12.12.9. *Przez $\sigma(n)$ oznaczamy sumę wszystkich dzielników naturalnych liczby naturalnej n. Zbiór*

$$\left\{\frac{\sigma(n)}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

jest gęsty w przedziale $(1,\infty)$*.* ([S59] 247).

12.12.10. *Zbiór* $\Big\{\sin x;\ x \in \mathbb{Z}\Big\}$ *jest gęsty w przedziale* $[-1,1]$*.* ([Mat] 4/1988 224).

★ Łukasz Jaworski, *Gęste podzbiory zbioru liczb rzeczywistych*, [Pmgr] 2011.

Literatura

[Cmj] The College Mathematics Journal, The Mathematical Association of America.

[Dlt] Delta, popularny polski miesięcznik matematyczno-fizyczno-astronomiczny.

[Dud1] R. Duda, *Wprowadzenie do topologii*, Część I, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1986.

[Eng] R. Engelking, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, Warszawa, 1965.

[EnS1] R. Engelking, K. Sieklucki, *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa, 1986.

[HedR] S. Hedman, D. Rose, *Light subsets of N with dense quotients sets*, American Mathematical Monthly, 7(116)(2009), 635-641.

[HW4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

[K-pv] K. S. Kedlaya, B. Poonen, R. Vakil, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition* 1985−2000*, Problems, Solutions, and Commentary*, The Mathematical Association of America, 2002.

[Kur] K. Kuratowski, *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii*, PWN, Warszawa, 1980.

[Kw] Kwant, popularne czasopismo rosyjskie.

[Mat] Matematyka, polskie czasopismo dla nauczycieli.

[Mon] The American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America.

[N-2] A. Nowicki, *Cyfry Liczb Naturalnych*, Podróże po Imperium Liczb, cz.2, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2008; Wydanie drugie 2012.

[N-3] A. Nowicki, *Liczby Kwadratowe*, Podróże po Imperium Liczb, cz.3, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N-4] A. Nowicki, *Liczby Pierwsze*, Podróże po Imperium Liczb, cz.4, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2009; Wydanie drugie 2012.

[N-8] A. Nowicki, *Liczby Mersenne'a, Fermata i Inne Liczby*, Podróże po Imperium Liczb, cz.8, Wydawnictwo OWSIiZ, Toruń, Olsztyn. Wydanie pierwsze 2010; Wydanie drugie 2012.

[NiZM] I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons Inc., 1991.

[Pmgr] Praca magisterska, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Wydział Matematyki i Informatyki.

[Putn] Putnam (William Lowell) Mathematical Competition.

[S59] W. Sierpiński, *Teoria Liczb* II, PWN, Warszawa, 1959.

[S88] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, Editor: A. Schinzel, North-Holland Mathematical Library, Vol. 31, 1988.

[SavA] S. Savchev, T. Andreescu, *Mathematical Miniatures*, The Mathematical Association of America, Anneli Lax New Mathematical Library, vol. 43, 2003.

[Trost] E. Trost, *Primzahlen*, Verlag Birkhauser, Basel - Stuttgard. Tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1959.