

# 1 Szeregi potęgowe

**Zadanie 1.** Znaleźć promienie i przedziały zbieżności następujących szeregów:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$

(f)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{2^n}} x^n$

(g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(h)  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$

(i)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

(j)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(k)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

**Zadanie 2.** Wykazać, że

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

dla  $|x| < 1$ .

**Zadanie 3.** Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:

(a)  $e^x$

(b)  $\sin x$

(c)  $\cos x$

# 2 Funkcje wielu zmiennych

**Zadanie 1.** Wyznaczyć i naszkicować dziedzinę funkcji:

(a)  $f(x, y) = \sqrt{x-1} + \ln(2y+3)$

(b)  $g(x, y) = \sqrt{2x-y+1}$

(c)  $h(x, y) = \sqrt{x^2+y^2-1} - \ln(4-x^2-y^2)$

(d)  $i(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$

(e)  $j(x, y) = \arcsin xy$

**Zadanie 2.** Wykazać, że funkcja

$$f(x, y) = \ln x \cdot \ln y$$

spełnia warunek

$$f(xy, uv) = f(x, u) + f(x, v) + f(y, u) + f(y, v).$$

**Zadanie 3.** Obliczyć granice:

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (3, \frac{\pi}{3})} x^2 \sin y$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{\sin x}{\cos x + 1}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})} \frac{\ln(x+y)}{x-y}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(y^2+1)}{\sin x \cos y}$

(e)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, 0)} \frac{\arcsin x}{\arcsin y}$

(f)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\ln 2, 0)} e^{x+y}$

**Zadanie 4.** Z badać, czy istnieje granica:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} x e^{-y^2}.$$

### 3 Pochodne cząstkowe

**Zadanie 5.** Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

- (a)  $f(x, y) = x^2y$                       (b)  $f(x, y) = x^2y^3 + xy + y$                       (c)  $f(x, y) = x + y^2 + 2$   
(d)  $f(x, y) = \cos x + \sin y - xy + 3$                       (e)  $f(x, y) = 2x^2y^4 - x^2 - x \cos y + 1$   
(f)  $f(x, y) = \cos x \ln y + e^x - \ln y$                       (g)  $f(x, y) = \sin x \cos y - e^y \ln x + x + 2$   
(h)  $f(x, y) = xy^2e^y + x \sin x - y$                       (i)  $f(x, y) = xe^xy^2 \ln y + x^2y^2 \sin y - x$   
(j)  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$                       (k)  $f(x, y) = \frac{e^x \ln y}{x^2 + y^2}$                       (l)  $f(x, y) = \frac{\sin x \cos y}{\sin x + \cos y}$   
(m)  $f(x, y) = e^{x^2+y^3}$                       (n)  $f(x, y) = \sin(x^2y)$                       (o)  $f(x, y) = \ln(2x - y^2)$

**Zadanie 6.** Znaleźć pochodne cząstkowe i ich wartości w podanym punkcie  $(x_0, y_0)$ :

- (a)  $f(x, y) = x \sin x \ln y$ ,  $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 1)$   
(b)  $f(x, y) = e^x \ln y$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$   
(c)  $f(x, y) = x \cos x \cdot y \sin y$ ,  $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$   
(d)  $f(x, y) = \frac{e^x \ln y}{e^y \ln x}$ ,  $(x_0, y_0) = (\ln 2, e^2)$   
(e)  $f(x, y) = \frac{e^x \sin y}{e^x + e^y}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, \pi)$   
(f)  $f(x, y) = x^5 \operatorname{arc\,tg} x \cdot ye^y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, \ln 3)$   
(g)  $f(x, y) = e^{x^2+y^3}$ ,  $(x_0, y_0) = (-1, 1)$   
(h)  $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$ ,  $(x_0, y_0) = (\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0)$   
(i)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^5)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$   
(j)  $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(\sin x + \cos y)$ ,  $(x_0, y_0) = (-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$   
(k)  $f(x, y) = e^{x+2y+\sin x}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$   
(l)  $f(x, y) = \sin(xy) + e^{x^2}$ ,  $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 1)$   
(m)  $f(x, y) = (x + y)^x$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$

**Zadanie 7.** Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

- (a)  $f(x, y, z) = x^2y^3z^4 + xy^2 + yz^3$   
(b)  $f(x, y, z) = x \sin y \cos z + e^y \cos z$   
(c)  $f(x, y, z) = \frac{x + y^2 + z^3}{x^3 - y^2 - z}$   
(d)  $f(x, y, z) = e^{x^2+y^3+z^4}$

**Zadanie 8.** Znaleźć pochodne cząstkowe rzędu 2 funkcji:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + \cos^2 x$                       (b)  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$                       (c)  $f(x, y) = x^2e^{x^2+y^2}$   
(d)  $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$                       (e)  $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}(y^2 - x^2)$                       (f)  $f(x, y) = \sin(e^x - e^y)$   
(g)  $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$                       (h)  $f(x, y, z) = xyz e^{x+y+z}$   
(i)  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + z$                       (j)  $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$

**Zadanie 9.** Zapisać macierz drugiej pochodnej funkcji  $f$  w podanym punkcie:

(a)  $f(x, y) = x^4y^3, \quad (x_0, y_0) = (1, 2)$

(b)  $f(x, y) = e^{x^2}y, \quad (x_0, y_0) = (0, 3)$

(c)  $f(x, y) = x^2e^y, \quad (x_0, y_0) = (2, 0)$

(d)  $f(x, y) = x^3y^2(6 - x - y), \quad (x_0, y_0) = (3, 2)$

(e)  $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2), \quad (x_0, y_0) = (-4, -2)$

(f)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz, \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 3)$

(g)  $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z), \quad (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$