ZESTAW II

Szeregi

Zadanie 1. Udowodnij wzór na sumę nieskończonego szeregu geometrycznego.

Zadanie 2. Oblicz sumę nieskończonego szeregu geometrycznego mając dane:

a) $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$; b) $a_1 = -21$, $q = 0.3$; c) $a_1 = -0.05$, $q = -0.02$.

Zadanie 3. Dla jakich $x \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2 - 3x + 1)^n$ jest zbieżny?

Zadanie 4. Wyznacz sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$.

Zadanie 5. Stosując warunek konieczny bądź definicję zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a \cdot n}{n+1}$, $a > 0$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$.

Zadanie 6. Stosując kryterium porównawcze zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+11}$; c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Zadanie 7. Stosując kryterium d'Alemberta zbadaj szeregi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Zadanie 8. Stosując kryterium Cauchy'ego zbadaj szeregi:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n \cdot 3^{n+2}}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n}$.

Zadanie 9. Zbadaj zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+100}{3n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{7^n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Zadanie 11. Wyznacz iloczyn Cauchy'ego następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Zadanie 12. Zbadaj zbieżność bezwzgledną i warunkową szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\log(n+1)}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$.