ZESTAW IV

Rachunek różniczkowy

Zadanie 1. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji w punkcie x_0

a) $f(x) = 2 - 3x,\ x_0 \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = x^4,\ x_0 \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 \geq 0$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 \neq 0$;

e) $f(x) = \sin x, x_0 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Korzystając z definicji lub badając pochodne jednostronne, zbadać czy w punkcie x_0 istnieją pochodne podanych funkcji

a) $x_0 = 0,\ f(x) = x|x|$;

b) $x_0 = 1,\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 1 \\ \sqrt{x} & \text{dla } x > 1. \end{cases}$

Zadanie 3. Znaleźć parametry a, b, dla których funkcja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \leq 2 \\ ax + b & \text{dla } x > 2 \end{cases}$ jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Obliczyć pochodne podanych funkcji

a) $f(x) = 2x^3 + 1 - \dfrac{4}{x}$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;

c) $f(x) = 5\sqrt[4]{x^3} - 3x^{-4}$;

d) $f(x) = \dfrac{3}{x\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^2}} + 4\sin x + 3^x$;

e) $f(x) = (3x+2)(x^3+1)$;

f) $f(x) = (-3x^2 + 6x + 1)(x^2 - 2)$;

g) $f(x) = 5x \cdot \mathrm{tg}x + \mathrm{arctg}x \cdot \ln x$;

h) $f(x) = (x+2)(3x^2+1)(x^3-2)$;

i) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$;

j) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$;

k) $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x}{x-2}$;

l) $f(x) = (3x-4)^2$;

m) $f(x) = (2 - x^2)^3$;

n) $f(x) = 3\sqrt{x^2+1}$;

o) $f(x) = -5x^3(4x-7)^5$;

p) $f(x) = \dfrac{(x-1)^4}{(3x+2)^5}$;

q) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

r) $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}\right)$;

s) $f(x) = \log_3(\sin^2 x + 1)$;

t) $f(x) = e^{x^2} \cdot \sin(x^4 + 1)$;

u) $f(x) = (\text{arcsin}x)^5 \cdot 2^x$;

v) $f(x) = (1 + \sqrt[4]{x})\text{tg}\sqrt{x}$;

w) $f(x) = \text{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2})$;

x) $f(x) = x^x$;

y) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$;

z) $f(x) = \log_x (x^2 + 5)$.

Zadanie 5. Obliczyć f', f'', f''' podanych funkcji

a) $f(x) = e^{x^2}$; b) $f(x) = \sin^3 x$; c) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$.

Zadanie 6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+1}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$;

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x(e^{\frac{1}{x}} - 1))$;

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

Zadanie 7. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji

a) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 5$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 3}$;

c) $f(x) = \big(x - 3\big)\sqrt{x}$;

d) $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

Zadanie 8. Wyznaczyć asymptoty podanych funkcji

a) $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$;

c) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x - 2^x}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{|x - 1|}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 2}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x}$.

Zadanie 9. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach

a) $f(x) = 1 + (1-x)^2,\ x_0 = 1$;

b) $f(x) = |x| + x,\ x_0 = 0$.

Zadanie 10. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$;

c) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$;

d) $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$;

e) $f(x) = (x - 5)e^x$;

f) $f(x) = \ln x^2 - 2x + 2$.

Zadanie 11. Znaleźć wartości największe i najmniejsze podanych funkcji na wskazanych przedziałach

a) $f(x) = x^3 - 3x + 1,\ [-2, 2]$;

b) $f(x) = x - 2\sqrt{x},\ [0, 5]$;

c) $f(x) = x^2 \ln x,\ [1, e]$;

d) $f(x) = x^2|x^2 - 1|,\ [-2, 3]$.

Zadanie 12. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 - 6x$;

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^3}$;

c) $f(x) = x^4(x-2)^4$;

d) $f(x) = x^2 \ln x$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

f) $f(x) = (1 + x^2)e^x$.

Zadanie 13. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji, a następnie sporządzić ich wykresy

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

b) $f(x) = x \ln x$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$;

d) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$;

e) $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$;

f) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$.

Zadanie 14. Dla podanych funkcji napisać wzór Taylora z n-tą resztą Lagrange'a w otoczeniu punktu x_0.

a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x + 1,\ x_0 = -1,\ n = 4$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1},\ x_0 = 2,\ n = 3$;

c) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1,\ n = 3$;

d) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0,\ n = 5$;

e) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \pi,\ n = 6$;

f) $f(x) = \ln x,\ x_0 = e,\ n = 4$.

Zadanie 15. Napisać wzory Maclaurina z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{1-x},\ x < 1; \quad b)\quad f(x) = xe^x; \quad c)\quad f(x) = \cos x; \quad d)\quad f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

Zadanie 16. Stosując metodę stycznych (metodę Newtona) znaleźć rozwiązania równań na wskazanych przedziałach z dokładnością do 10^{-4}

a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0,\ [1, 4]$;

b) $x = \cos x,\ [0, \frac{\pi}{2}]$.