Zadanie 1 (a)

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^2 - 5x + 6.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są 2 (jednokrotny) oraz 3 (jednokrotny).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_1 \cdot 2^n + \mu_2 \cdot 3^n.$$

Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2, \\ 2\mu_1 + 3\mu_2 = 5. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = 1$, a więc

$$a_n = 2^n + 3^n.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^2 - x + 1.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są $\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}$ (jednokrotnym) oraz $\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}$ (jednokrotnym).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_1 \cdot \left(\tfrac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n + \mu_2 \cdot \left(\tfrac{1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\mu_1 + \frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}\mu_2 = 1. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_1 = -\frac{\imath\sqrt{3}}{3}$ i $\mu_2 = \frac{\imath\sqrt{3}}{3}$, a więc

$$a_n = -\tfrac{\imath\sqrt{3}}{3}\left(\tfrac{1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n + \tfrac{\imath\sqrt{3}}{3}\left(\tfrac{1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 6$, $a_1 = 5$ i $a_2 = 15$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są -1 (jednokrotny), 1 (jednokrotny) oraz 2 (jednokrotny).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_1 \cdot (-1)^n + \mu_2 + \mu_3 \cdot 2^n.$$

Podstawiając $n = 0, 1, 2$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 6, \\ -\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 = 5, \\ \mu_1 + \mu_2 + 4\mu_3 = 15. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ i $\mu_3 = 3$, a więc

$$a_n = 2 \cdot (-1)^n + 1 + 3 \cdot 2^n.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 4a_{n+2} - 4a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 3$ i $a_1 = 8$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^2 - 4x + 4.$$

   Pierwiastkiem tego wielomianu jest 2 (dwukrotny).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_0 \cdot 2^n + \mu_1 \cdot n2^n.$$

   Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_0 & & = 3, \\ 2\mu_0 + 2\mu_1 & & = 8. \end{cases}$$

   Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_0 = 3$ i $\mu_1 = 1$, a więc

$$a_n = 3 \cdot 2^n + n \cdot 2^n.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

oraz $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$.

Rozwiązanie

1. Ciąg (a_n) jest rozwiązaniem rekurencji

$$a_{n+3} - 4a_{n+2} + 5a_{n+1} - 2a_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

której wielomianem charakterystycznym jest

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

Pierwiastkami tego wielomianu są 1 (dwukrotny) i 2 (jednokrotny).

3. Wiemy, że

$$a_n = \mu_{1,0} + \mu_{1,1} n + \mu_2 \cdot 2^n.$$

Podstawiając $n = 0, 1, 2$, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \mu_{1,0} & & & + & \mu_2 & = & 3, \\ \mu_{1,0} & + & \mu_{1,1} & + & 2\mu_2 & = & 3, \\ \mu_{1,0} & + & 2\mu_{1,1} & + & 4\mu_2 & = & 4. \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_{1,0} = 2$, $\mu_{1,1} = -1$ i $\mu_2 = 1$, a więc

$$a_n = 2 - n + 2^n.$$

Zadanie 2 (a)

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_0 = 0$.

Rozwiązanie

1. Wielomianem charakterystycznym rozważanej kongruencji jest $x - 2$.

   Jedynym pierwiastkiem (jednokrotnym) tego wielomianu jest 2.

2. Szukamy ciągu $a'_n = n^0 \cdot (\xi_2 n^2 + \xi_1 n + \xi_0)$ takiego, że

   $$a'_{n+1} - 2a'_n = n^2 + n + 2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Po podstawieniu wzorów na a'_{n+1} i a'_n do powyższej równości i uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy równanie

   $$-\xi_2 n^2 + (2\xi_2 - \xi_1)n + (\xi_2 + \xi_1 - \xi_0) = n^2 + n + 2.$$

   Porównując współczynniki przy n^2, n^1 oraz n^0, otrzymujemy układ równań

   $$\begin{cases} -\xi_2 & & & & & = & 1, \\ 2\xi_2 & - & \xi_1 & & & = & 1, \\ \xi_2 & + & \xi_1 & - & \xi_0 & = & 2, \end{cases}$$

   którego rozwiązaniem jest trójka liczb $\xi_0 = -6$, $\xi_1 = -3$ i $\xi_2 = -1$.

   Zatem $a'_n = -n^2 - 3n - 6$.

3. Wiemy, że $a_n = -n^2 - 3n - 6 + \mu \cdot 2^n$.

   Podstawiając $n = 0$, otrzymujemy $\mu = 6$.

   Zatem $a_n = -n^2 - 3n - 6 + 6 \cdot 2^n$.

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_0 = 0$ i $a_1 = 1$.

Rozwiązanie

1. Wielomianem charakterystycznym rozważanej kongruencji jest $x^2 + 2x - 3$.

   Pierwiastkiem (jednokrotnymi) tego wielomianu są 1 i -3.

2. Szukamy ciągu $a'_n = n^1 \cdot \xi$ takiego, że
$$a'_{n+2} + 2a'_{n+1} - 3a'_n = 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
   Po podstawieniu wzorów na a'_{n+2}, a'_{n+1} i a'_n do powyższej równości i uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy
$$4\xi = 1,$$
   a więc $a'_n = \frac{1}{4}n$.

3. Wiemy, że $a_n = \frac{1}{4}n + \mu_1 + \mu_2 \cdot (-3)^n$.

   Podstawiając $n = 0, 1$, otrzymujemy układ równań
$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 0, \\ \frac{1}{4} + \mu_1 - 3\mu_2 = 1. \end{cases}$$
   Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy $\mu_1 = \frac{3}{16}$ i $\mu_2 = -\frac{3}{16}$, a więc
$$a_n = \frac{1}{16}n + \frac{3}{16} + \frac{1}{16}(-3)^{n+1}.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + 2n - 2$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $a_0 = 1$.

Rozwiązanie

1. Wielomianem charakterystycznym rozważanej kongruencji jest $x - 2$.

   Jedynym pierwiastkiem (jednokrotnym) tego wielomianu jest 2.

2. Szukamy ciągu $a'_n = n^0 \cdot (\xi_2 n^2 + \xi_1 n + \xi_0)$ takiego, że

   $$a'_{n+1} - 2a'_n = n^2 + 2n - 2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   Po podstawieniu wzorów na a'_{n+1} i a'_n do powyższej równości i uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy równanie

   $$-\xi_2 n^2 + (2\xi_2 - \xi_1)n + (\xi_2 + \xi_1 - \xi_0) = n^2 + 2n - 2.$$

   Porównując współczynniki przy n^2, n^1 oraz n^0, otrzymujemy układ równań

   $$\begin{cases} -\xi_2 & & & = 1, \\ 2\xi_2 & - \xi_1 & & = 2, \\ \xi_2 & + \xi_1 & - \xi_0 & = -2, \end{cases}$$

   którego rozwiązaniem jest trójka liczb $\xi_0 = -3$, $\xi_1 = -4$ i $\xi_2 = -1$.

   Zatem $a'_n = -n^2 - 4n - 3$.

3. Wiemy, że $a_n = -n^2 - 4n - 3 + \mu \cdot 2^n$.

   Podstawiając $n = 0$, otrzymujemy $\mu = 4$.

   Zatem $a_n = -n^2 - 4n - 3 + 2^{n+2}$.

Zadanie

Na ile sposobów można pokonać n stopni, jeżeli możemy poruszać się o 1 bądź 2 stopnie do góry?

Rozwiązanie

Niech a_n będzie poszukiwaną liczbą sposobów.

Zauważmy, że $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$.

Ponadto, jeśli $n \geq 2$, to pierwszy krok może być długości 1 lub 2.

W pierwszym przypadku pozostałe $n - 1$ stopni możemy pokonać na a_{n-1} sposobów.

W drugim przypadku pozostałe $n - 2$ stopni możemy pokonać na a_{n-2} sposobów.

Zatem $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (dla $n \geq 2$).

[Równoważnie $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.]

Rozwiązując powyższą rekurencję (z warunkami początkowymi $a_0 = 1$ i $a_1 = 1$), otrzymujemy, że

$$a_n = \tfrac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \tfrac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Zadanie

Na ile maksymalnie części można podzielić płaszczyznę przy pomocy n okręgów?

Rozwiązanie

Oznaczamy przez a_n poszukiwaną liczbę części.

Wtedy $a_1 = 2$ oraz

$$a_{n+1} = a_n + 2n, \qquad n \in \mathbb{N}_+.$$

Istotnie, nowy okręg można narysować w ten sposób, aby przecinał się w dwóch punktach z każdym z wcześniej narysowanych n okręgów.

Otrzymane w ten sposób $2n$ punktów dzieli nowy okręg na $2n$ łuków.

Każdy z tych $2n$ łuków dzieli jedną „starą” część na dwie „nowe”.

Rozwiązując powyższą rekurencję, otrzymujemy

$$a_n = n^2 - n + 2.$$

Zadanie

Znaleźć wzór jawny ciągu (a_n) takiego, że

$$a_{n+2} = 5 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot a_{n+1} - 6 \cdot \frac{n}{n+2} \cdot a_n, \qquad n \in \mathbb{N}_+,$$

oraz $a_1 = 5$ oraz $a_2 = 6{,}5$.

Rozwiązanie

Podstawiając $b_n := na_n$ (a więc $a_n = \frac{b_n}{n}$), $n \in \mathbb{N}_+$, otrzymujemy, że

$$\frac{b_{n+2}}{n+2} = 5 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{b_{n+1}}{n+1} - 6 \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{b_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}_+,$$

a więc

$$b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n, \qquad n \in \mathbb{N}_+.$$

Ponadto $b_1 = 5$ i $b_2 = 13$.
Stosując metodę z zadania 1, otrzymujemy $b_n = 2^n + 3^n$, $n \in \mathbb{N}_+$, a więc

$$a_n = \frac{2^n + 3^n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}_+.$$