Zestaw 9

Funkcje tworzące

Definicja

Jeśli (a_n) jest ciągiem liczb zespolonych, to szereg

$$\mathcal{A} := a_0 + a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n + \cdots$$

nazywamy funkcją tworzącą (bądź generującą) ciągu (a_n). W świetle informacji z wykładu, funkcja tworząca jest szczególnie użyteczna w sytuacji, gdy potrafimy ją przedstawić jako iloraz dwóch wielomianów. Poniżej przedstawimy metodę znajdowania funkcji tworzących dla ciągów, które spełniają równania rekurencyjne.

Funkcje tworzące ciągów określonych rekurencyjnie

Przypuśćmy, że ciąg (a_n) jest spełnia rekurencję

$$a_{n+r} = c_{r-1}a_{n+r-1} + c_{r-2}a_{n+r-2} + \cdots + c_0a_n + f(n), \qquad n \geq 0, \tag{1}$$

gdzie $f \in \mathbb{C}[T]$ jest wielomianem. Opiszemy metodę znajdowania funkcji tworzącej $\mathcal{A}$ ciągu (a_n).

Mnożąc równanie (1) przez T^{n+r} dla każdego $n \geq 0$, otrzymujemy równości

$$\begin{aligned} a_{n+r}T^{n+r} = c_{r-1}a_{n+r-1}T^{n+r} &+ c_{r-2}a_{n+r-2}T^{n+r} \\ &+ \cdots + c_0a_nT^{n+r} + f(n)T^{n+r}, \qquad n \geq 0. \end{aligned}$$

Sumując powyższe równości stronami, otrzymujemy równość szeregów

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r}T^{n+r} = c_{r-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-1}T^{n+r} &+ c_{r-2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-2}T^{n+r} \\ &+ \cdots + c_0\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n)T^{n+r}. \end{aligned} \tag{2}$$

Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r}T^{n+r} = \sum_{m=r}^{\infty} a_mT^m = \mathcal{A} - F_{r-1},$$

gdzie

$$F_k := a_0 + a_1T + \cdots + a_kT^k$$

dla $k \in \mathbb{N}$ (zauważmy, że F_k jest wielomianem). Podobnie,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-1} T^{n+r} &= T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-1} T^{n+r} = T \cdot (\mathcal{A} - F_{r-2}), \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-2} T^{n+r} &= T^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+r-2} T^{n+r} = T^2 \cdot (\mathcal{A} - F_{r-3}), \\
&\vdots \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} T^{n+r} &= T^{r-1} \cdot (\mathcal{A} - F_0), \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^{n+r} &= T^r \cdot \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Podstawiając powyższe wzory do równości (2), otrzymujemy równość

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} - F_{r-1} = c_{r-1} T \cdot (\mathcal{A} - F_{r-2}) + c_{r-2} T^2 \cdot (\mathcal{A} - F_{r-3}) \\
+ \cdots + c_1 T^{r-1} \cdot (\mathcal{A} - F_0) + c_0 T^r \cdot \mathcal{A} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n) T^{n+r}.
\end{aligned}$$

Traktując powyższą równość jako równanie z niewiadomą $\mathcal{A}$, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \frac{F_{r-1} - c_{r-1} T F_{r-2} - c_{r-2} T^2 F_{r-3} - \cdots - c_1 T^{r-1} F_0}{1 - c_{r-1} T - c_{r-2} T^2 - \cdots - c_1 T^{r-1} - c_0 T^r} \\
+ \frac{T^r}{1 - c_{r-1} T - c_{r-2} T^2 - \cdots - c_1 T^{r-1} - c_0 T^r} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) T^n. \quad (3)
\end{aligned}$$

W powyższym wzorze wykorzystujemy, że w pierścieniu szeregów można dzielić przez wielomiany, które mają niezerowy wyraz wolny. Jeśli będziemy potrafili przedstawić w postaci ilorazu wielomianów szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) T^n$, to powyższy wzór da nam rozwiązanie wyjściowego problemu. Kwestię przedstawienia w postaci funkcji wymiernej szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} f(n) T^n$ omówimy poniżej, teraz zauważmy, że jeśli wyjściowa rekurencja jest jednorodna, a więc $f(n) = 0$ dla wszystkich n, to wtedy oczywiście $\sum_{n=0} f(n) T^n = 0$ i otrzymujemy wzór

$$\mathcal{A} = \frac{F_{r-1} - c_{r-1} T F_{r-2} - c_{r-2} T^2 F_{r-3} - \cdots - c_1 T^{r-1} F_0}{1 - c_{r-1} T - c_{r-2} T^2 - \cdots - c_1 T^{r-1} - c_0 T^r}.$$

Zilustrujemy powyższe rozważania przykładem.

Zadanie 1.1(a)

Znajdziemy funkcję tworzącą $\mathcal{A}$ ciągu (a_n) spełniającego równanie rekurencyjne

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \qquad n \geq 0, \tag{4}$$

z warunkami początkowymi $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Mnożąc rekurencję (4) przez T^{n+2}, otrzymujemy równości

$$a_{n+2}T^{n+2} = 5a_{n+1}T^{n+2} - 6a_nT^{n+2}, \qquad n \geq 0.$$

Dodając stronami powyższe równości, otrzymujemy równanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}T^{n+2} = 5\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}T^{n+2} - 6\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^{n+2}. \tag{5}$$

Zauważmy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}T^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_mT^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_mT^m - (a_0 + a_1T) = \mathcal{A} - (2 + 5T),$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}T^{n+2} &= T \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}T^{n+1} = T \cdot \sum_{m=1}^{\infty} a_mT^m \\ &= T \cdot \Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_mT^m - a_0\Big) = T \cdot \mathcal{A} - 2T\end{aligned}$$

oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nT^{n+2} = T^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_nT^n = T^2\mathcal{A}.$$

Podstawiając powyższe wzory do równania (5), otrzymujemy równanie

$$\mathcal{A} - 2 - 5T = 5T\mathcal{A} - 10T - 6T^2\mathcal{A},$$

z którego wyliczamy

$$\mathcal{A} = \frac{2 - 5T}{1 - 5T + 6T^2}.$$

Ciągi wielomianowe

Niech $f \in \mathbb{C}[T]$ oraz $b_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Chcemy przedstawić w postaci funkcji wymiernej funkcję tworzącą $\mathcal{B}$ ciągu (b_n). Z wykładu (Twierdzenie 3.7) wynika, że ciąg (b_n) spełnia równanie rekurencyjne

$$b_{n+d+1} + c'_d b_{n+d} + \cdots + c'_0 b_n = 0, \qquad n \geq 0,$$

gdzie d jest stopniem wielomianu f oraz $c'_i := (-1)^{d+1-i}\binom{d+1}{i}$. Zatem funkcję tworzącą $\mathcal{B}$ możemy policzyć w analogiczny sposób jak wyżej. Ponieważ wzór (3) możemy zapisać w postaci

$$\mathcal{A} = \frac{F_{r-1} - c_{r-1}TF_{r-2} - c_{r-2}T^2F_{r-3} - \cdots - c_1T^{r-1}F_0}{1 - c_{r-1}T - c_{r-2}T^2 - \cdots - c_1T^{r-1} - c_0T^r} + \frac{T^r}{1 - c_{r-1}T - c_{r-2}T^2 - \cdots - c_1T^{r-1} - c_0T^r}\mathcal{B},$$

więc pozwala to wyliczyć wzór na funkcję $\mathcal{A}$.

Zadanie 1.2(a)

Znajdziemy funkcję tworzącą $\mathcal{A}$ ciągu (a_n) spełniającego równanie rekurencyjne

$$a_{n+1} - a_n = n^2 + n + 2, \qquad n \geq 0,$$

z warunkiem początkowym $a_0 = 0$. Postępując podobnie jak pierwszym przykładzie (mnożąc powyższy wzór przez T^{n+1}, dodając otrzymane równości stronami i przekształcając otrzymane równanie), dostajemy, że

$$\mathcal{A} = \frac{T}{1-2T} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(n^2 + n + 2)T^n.$$

Niech $b_n := n^2 + n + 2$, $n \geq 0$, oraz $\mathcal{B}$ będzie funkcją tworzącą ciągu (b_n). Ponieważ $n^2 + n + 2$ jest wielomianem stopnia 2, więc zgodnie z tym co napisaliśmy wcześniej, ciąg (b_n) spełnia równanie rekurencyjne

$$b_{n+3} - 3b_{n+2} + 3b_{n+1} - b_n = 0, \qquad n \geq 0,$$

gdyż $(-1)^{3-2}\binom{3}{2} = -3$, $(-1)^{3-1}\binom{3}{1} = 3$ i $(-1)^{3-0}\binom{3}{0} = -1$. Ponieważ $b_0 = 2$, $b_1 = 4$ i $b_2 = 8$, więc stosując ponownie opisaną wcześniej metodę (mnożąc powyższy wzór przez T^{n+3}, dodając otrzymane równości stronami i przekształcając otrzymane równanie), otrzymujemy, że

$$\mathcal{B} = \frac{2 - 2T + 2T^2}{1 - 3T + 3T^2 - T^3}.$$

Zatem

$$\mathcal{A} = \frac{2T - 2T^2 + 2T^3}{(1-2T)(1 - 3T + 3T^2 - T^3)}.$$

Odpowiedzi do Zadania 1

1(b) $\frac{T}{1-T+T^2}$.

1(c) $\frac{6-7T-T^2}{1-2T-T^2+2T^3}$.

1(d) $\frac{3-4T}{1-4T+4T^2}$.

1(e) $\frac{3-9T+7T^2}{1-4T+5T^2-2T^3}$.

2(b) $\frac{T}{(1-T)(1+2T-3T^2)}$.

2(c) $\frac{1-5T+10T^2-4T^3}{(1-2T)(1-3T+3T^2-T^3)}$.

2(d) $\frac{3-4T-5T^3}{(1-T-6T^2)(1-2T+T^2)}$.

2(e) $\frac{2-5T+4T^3}{(1-4T+4T^2)(1-T)}$.

2(f) $\frac{1-3T+15T^2-17T^3}{(1-6T+9T^2)(1-2T+T^2)}$.

2(g) $\frac{-T^2+2T^3}{(1-6T+12T^2-8T^3)(1-2T+T^2)}$.