Matematyka Dyskretna

Wykład XIII

Grzegorz Bobiński (UMK)

Twierdzenie 6.7 (Euler)

Niech G będzie spójnym grafem planarnym (wraz z ustalonym rysunkiem).
Jeśli n jest liczbą wierzchołków grafu G, m liczbą jego krawędzi i f liczbą obszarów, na które rysunek grafu G dzieli płaszczyznę, to

$$n - m + f = 2.$$

W szczególności, liczba f nie zależy od rysunku, a jedynie od grafu G (a dokładniej, od liczby jego wierzchołków i krawędzi).

Dowód

Dowód będzie indukcyjny ze względu na m.

Przypomnijmy, że $m \geq n - 1$ na mocy Stwierdzenia 6.3.

1°. $m = n - 1$.

Wtedy graf G jest drzewem, więc ze Stwierdzenia 6.6 wynika, że $f = 1$.

Istotnie, każdy spójny graf planarny dzieli on płaszczyznę na obszary ograniczone oraz jeden obszar nieograniczony. Każdy obszar ograniczony jest otoczony przez cykl, skąd wynika, że w przypadku drzew jednym obszarem jest obszar nieograniczony.

Ostatecznie $n - m + f = -(m - n) + f = -(-1) + 1 = 2$.

2°. $m \geq n$.

Wtedy graf G nie jest drzewem, a więc w grafie G istnieje cykl $(x_0, \ldots, x_l)$.

Jeśli $H := G - \{x_0, x_1\}$, n' jest liczbą wierzchołków grafu H, m' liczbą jego krawędzi i f' liczbą obszarów na, które rysunek grafu H (powstały z rysunku grafu G przez wymazanie łuku odpowiadającego krawędzi $\{x_0, x_1\}$) dzieli płaszczyznę, to $n' = n$, $m' = m - 1$, $f' = f - 1$.

Z Lematu 6.5 wiemy, że graf H jest spójny, więc z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że $n' - m' + f' = 2$, skąd natychmiast wynika teza. $\square$

Twierdzenie 6.7 (Euler)

Niech G będzie spójnym grafem planarnym (wraz z ustalonym rysunkiem).

Jeśli n jest liczbą wierzchołków grafu G, m liczbą jego krawędzi i f liczbą obszarów, na które rysunek grafu G dzieli płaszczyznę, to

$$n - m + f = 2.$$

Wniosek 6.8

Niech G będzie spójnym grafem planarnym, n liczbą wierzchołków grafu G oraz m liczbą jego krawędzi. Jeśli $n \geq 3$, to $m \leq 3 \cdot n - 6$.

Dowód

Ustalmy rysunek grafu G i niech f będzie liczbą obszarów, na które ten rysunek dzieli płaszczyznę.

Jeśli graf G jest drzewem, to $m = n - 1$. Ponadto, ponieważ $n \geq 3$, więc $n - 1 \leq 3 \cdot n - 6$, co kończy dowód w tym przypadku.

Załóżmy teraz, że graf G nie jest drzewem.

Wtedy więc każdy obszar jest otoczony przez co najmniej trzy krawędzie (precyzyjniej, łuki odpowiadające krawędziom) i każda krawędź jest granicą dla co najwyżej dwóch obszarów.

Stąd, licząc na dwa sposoby liczbę par (F, e), gdzie F jest jednym z powyższych obszarów, zaś e krawędzią ograniczającą obszar F, otrzymujemy, że $3 \cdot f \leq 2 \cdot m$.

Ponieważ $3 \cdot f = 3 \cdot m - 3 \cdot n + 6$ na mocy Twierdzenia Eulera, więc otrzymujemy tezę. $\square$

Wniosek 6.8

Niech G będzie spójnym grafem planarnym, n liczbą wierzchołków grafu G oraz m liczbą jego krawędzi. Jeśli $n \geq 3$, to $m \leq 3 \cdot n - 6$.

Wniosek 6.9

Niech n będzie liczbą całkowitą taką, że $n \geq 5$.
Jeśli

$$G := ([1, n], \mathcal{P}_2([1, n])),$$

(tzn. G jest grafem pełnym o n wierzchołkach), to graf G nie jest planarny.

Dowód

Zauważmy, że

$$|E_G| = \binom{n}{2} > 3 \cdot n - 6,$$

więc teza wynika z Wniosku 6.8. □

Wniosek 6.8

Niech G będzie spójnym grafem planarnym, n liczbą wierzchołków grafu G oraz m liczbą jego krawędzi. Jeśli $n \geq 3$, to $m \leq 3 \cdot n - 6$.

Stwierdzenie 6.10

Jeśli G jest grafem planarnym, to istnieje wierzchołek x grafu G taki, że

$$\deg_G x \leq 5.$$

Dowód

Bez straty ogólności możemy założyć, że graf G jest spójny oraz $|V_G| \geq 3$.
Przypuśćmy, że $\deg_G x \geq 6$ dla każdego wierzchołka x grafu G.
(6.1) $\Longrightarrow$ $6 \cdot |V_G| \leq 2 \cdot |E_G|$.
W połączeniu z Wnioskiem 6.8, otrzymujemy, że

$$6 \cdot |V_G| \leq 6 \cdot |V_G| - 12,$$

sprzeczność. $\square$

6.3 Kolorowanie grafów

Definicja

Jeśli G jest grafem i k jest nieujemną liczbą całkowitą, to mówimy, że graf G jest k-kolorowalny, jeśli istnieje podział zbioru V_G na zbiory $U_1, \ldots, U_k$ takie, że jeśli $i \in [1, k]$, to w grafie nie istnieje krawędź łącząca wierzchołki ze zbioru U_i.

Taki podział nazywamy k-kolorowaniem wierzchołków grafu G.

Najmniejszą nieujemną liczbę całkowitą k taką, że graf G jest k-kolorowalny, nazywamy liczbą chromatyczną grafu G i oznaczamy χ_G.

Uwaga

Rodzinę $U_1, \ldots, U_k$ podzbiorów zbioru V nazywamy podziałem zbioru V, jeśli:

- $V = U_1 \cup \cdots \cup U_k$;
- $U_i \cap U_j = \varnothing$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie 6.11

Jeśli G jest grafem planarny, to graf G jest 5-kolorowalny.

Twierdzenie 6.11

Jeśli G jest grafem planarny, to graf G jest 5-kolorowalny.

Dowód

Dowód będzie indukcyjny ze względu na $|V_G|$.

Teza jest oczywista, gdy $|V_G| \leq 5$.

Ze Stwierdzenia 6.10 wiemy, że w grafie G istnieje wierzchołek x taki, że $\deg_G x \leq 5$.

Jeśli $H := G - x$, to z założenia indukcyjnego wiemy, że graf H jest 5-kolorowalny.

Jeśli $\deg_G x < 5$, to w oczywisty sposób możemy rozszerzyć 5-kolorowanie grafu H do 5-kolorowania grafu G.

Załóżmy zatem, że $\deg_G x = 5$.

Niech $y_1, \ldots, y_5$ będą kolejnymi, wypisanymi zgodnie z ruchem wskazówek zegara (zakładamy, że mamy ustalony rysunek grafu G) sąsiadami wierzchołka x.

Możemy również założyć, że jeśli zbiory $U_1, \ldots, U_5$ tworzą 5-kolorowanie wierzchołków grafu H, to $y_i \in U_i$ dla każdego $i \in [1, 5]$.

Dla $i, j \in [1, 5]$ takich, że $i \neq j$, oznaczmy przez $H_{i,j}$ podgraf grafu H indukowany przez zbiór $U_i \cup U_j$.

Pokażemy później, że istnieją $i, j \in [1, 5]$ takie, że $i \neq j$ oraz wierzchołki y_i oraz y_j należą do różnych składowych H' i H'' grafu $H_{i,j}$.

Definiujemy zbiory $U_1', \ldots, U_5'$ wzorem

$$U_k' := \begin{cases} \{x\} \cup (U_i \setminus V_{H'}) \cup (U_j \cap V_{H'}) & \text{jeśli } k = i, \\ (U_j \setminus V_{H'}) \cup (U_i \cap V_{H'}) & \text{jeśli } k = j, \\ U_k & \text{jeśli } k \neq i, j, \end{cases}$$

(tzn. zamieniamy kolorami wierzchołki ze zbioru $V_{H'}$ oraz kolorujemy wierzchołek x kolorem i).

Łatwo sprawdzić, że otrzymujemy w ten sposób 5-kolorowanie grafu G.

Twierdzenie 6.11

Jeśli G jest grafem planarny, to graf G jest 5-kolorowalny.

Dowód (c.d.)

Mamy

- $y_1, \ldots, y_5$ są kolejnymi, wypisanymi zgodnie z ruchem wskazówek zegara sąsiadami wierzchołka x;
- zbiory $U_1, \ldots, U_5$ tworzą 5-kolorowanie wierzchołków grafu H oraz $y_i \in U_i$ dla każdego $i \in [1, 5]$;
- dla $i, j \in [1, 5]$ takich, że $i \neq j$, oznaczamy przez $H_{i,j}$ podgraf grafu H indukowany przez zbiór $U_i \cup U_j$;

Pokażemy, że istnieją $i, j \in [1, 5]$ takie, że $i \neq j$ oraz wierzchołki y_i oraz y_j należą do różnych składowych grafu $H_{i,j}$.

Istotnie, przypuśćmy, że wierzchołki y_1 oraz y_3 należą do tej samej składowej grafu $H_{1,3}$.

Ze Stwierdzenia 6.4 wiemy, że w grafie $H_{1,3}$ istnieje droga $(z_0, \ldots, z_n)$ łącząca wierzchołki y_1 i y_3.

Bez straty ogólności możemy założyć, że $z_k \neq z_l$ dla wszystkich $k, l \in [0, n]$ takich, że $k \neq l$.

Wtedy ciąg $(x, z_0, \ldots, z_n, x)$ jest cyklem w grafie G nieprzechodzącym przez wierzchołki x_2 i x_4.

Z planarności grafu G i Stwierdzenia 6.4 wynika zatem, że wierzchołki x_2 i x_4 należą do różnych składowych grafu $H_{2,4}$. □