Matematyka dyskretna
Zestaw 3
Kongruencje

---

1. Udowodnić, że jeśli n jest liczbą całkowitą taką, że $3 \nmid n$, to $3 \mid n^4 + n^2 + 1$.

2. Udowodnić, że $3 \mid 2^{2n} - 1$ dla każdej liczby naturalnej n.

3. Udowodnić, że liczba $10^8 + 1$ jest podzielna przez 17.

4. Udowodnić, że liczba $10^9 + 1$ jest podzielna przez 19.

5. Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to $n \mid \sum_{j=1}^{n-1} j$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

6. Udowodnić, że jeśli n jest liczbą naturalną dodatnią, to $n \mid \sum_{j=1}^{n-1} j^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \not\equiv 2 \pmod{4}$.

7. Rozwiązać następujące kongruencje.
(1) $3 \cdot x \equiv 4 \pmod{7}$
(2) $27 \cdot x \equiv 25 \pmod{256}$
(3) $2 \cdot x \equiv 37 \pmod{21}$
(4) $10 \cdot x \equiv 15 \pmod{35}$
(5) $3 \cdot x \equiv 7 \pmod{18}$

8. Rozwiązać następujące układy kongruencji.
(1) $x \equiv 3 \pmod{4}$, $x \equiv 2 \pmod{7}$, $x \equiv 1 \pmod{9}$
(2) $x \equiv 20 \pmod{33}$, $x \equiv 33 \pmod{40}$
(3) $x \equiv 4 \pmod{9}$, $62 \cdot x \equiv 102 \pmod{154}$
(4) $2 \cdot x \equiv 1 \pmod{3}$, $3 \cdot x \equiv 1 \pmod{4}$, $5 \cdot x \equiv 4 \pmod{7}$

9. Udowodnić, że liczba całkowita $p > 1$ jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$. (Fakt ten nosi nazwę Twierdzenia Wilsona)

10. Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \equiv 1 \pmod{4}$, to istnieje liczba całkowita n taka, że $p \mid n^2 + 1$.