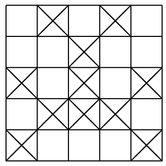
Matematyka dyskretna
Zestaw 10
Wielomiany wieżowe

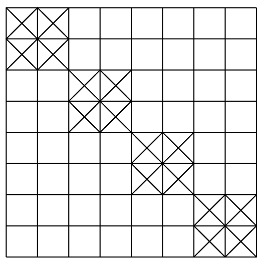
---

1. Wyliczyć wielomian wieżowy następującej szachownicy.

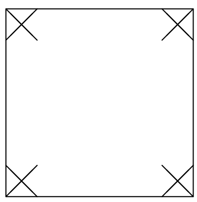


Na ile sposobów można rozstawić na tej szachownicy trzy (wzajemnie nieatakujące się) wieże?

2. Na ile sposobów można postawić 8 nieatakujących się wież na następującej szachownicy?



3. Na ile sposobów można postawić n nieatakujących się wież na następującej $n \times n$ szachownicy?

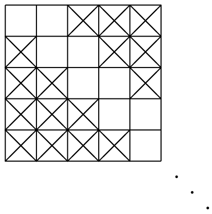


4. Niech $R_{n,m}$ oznacza wielomian wieżowy dla $n \times m$ szachownicy bez pól zabronionych. Udowodnić, że

(a) $R_{n,m} = R_{n-1,m} + m \cdot T \cdot R_{n-1,m-1}$;

(b) $R'_{n,m} = n \cdot m \cdot R_{n-1,m-1}$.

5. Niech R_n oznacza wielomian wieżowy następującej $n \times n$ szachownicy.



Znaleźć zależność rekurencyjną angażującą wielomiany R_{n+2}, R_{n+1} i R_n. Pokazać, że

$$R_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1} \cdot T + \cdots + \binom{2n-k}{k} \cdot T^k + \cdots + \binom{n}{n} \cdot T^n.$$

6. Wyznaczyć liczbę $p(n)$ takich permutacji σ zbioru $[1, 2 \cdot n + 1]$, że $\sigma_k \neq k$ oraz $\sigma_k \neq 2 \cdot n - k + 2$ dla każdej liczby $k \in [1, 2 \cdot n + 1]$.

7. Wyznaczyć liczbę $p(n)$ takich permutacji σ zbioru $[1, 2 \cdot n]$, że $\sigma_k \neq k$ oraz $\sigma_k \neq 2 \cdot n - k + 1$ dla każdej liczby $k \in [1, 2 \cdot n]$.

8. W urnie znajduje się nieograniczona ilość kul białych, niebieskich i czarnych, przy czym kule jednokolorowe są nierozróżnialne. Znaleźć funkcje generujące następujących ciągów:

(a) $a(n) :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul;

(b) $b(n) :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul, przy założeniu, że losujemy co najmniej dwie kule białe i co najwyżej dwie kule czarne;

(c) $c(n) :=$ ilość sposobów, na które można wylosować n kul, przy założeniu, że losujemy parzystą ilość kul niebieskich oraz podzielną przez trzy ilość kul czarnych.

9. Znaleźć współczynniki w rozwinięciu następujących funkcji:

(a) $\frac{T^2 - 3 \cdot t}{(1-T)^4}$;

(b) $\frac{1}{(1-T) \cdot (1-T^2)}$;

(c) $\frac{1}{(1-T)^2 \cdot (1-T^2)}$;