Matematyka dyskretna I
Zestaw 4

1. Wyliczyć $\varphi(1000)$, $\varphi(125)$, $\varphi(180)$, $\varphi(360)$, $\varphi(1001)$.

2. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których $\varphi(n) = m$.

(1) $m = 14$.

(2) $m = 8$.

(3) $m = 12$.

3. Udowodnić, że $\varphi(n)$ jest liczbą parzystą dla wszystkich $n > 2$.

4. Udowodnić, że $\varphi(mn) = d\varphi(m)\varphi(n)/\varphi(d)$, gdzie $d = (m, n)$.

5. Udowodnić, że jeśli $d \mid n$, to $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.

6. Udowodnić, że $a^{12} \equiv 1 \pmod 7$ dla każdej liczby naturalnej a spełniającej warunek $(a, 7) = 1$.

7. Udowodnić, że $a^{12} \equiv 1 \pmod{65}$ dla każdej liczby naturalnej a spełniającej warunek $(a, 65) = 1$.

8. Udowodnić, że $n \mid \varphi(a^n - 1)$ dla wszystkich $a > n$.

9. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 3^{1000}.

10. Znaleźć dwie ostatnie cyfry liczby 2^{1000}.