Matematyka dyskretna II
Zbiór zadań

Grzegorz Bobiński

Wstęp

Niniejszy zbiór zadań jest owocem prowadzonych przeze mnie w latach 1999–2002 ćwiczeń z przedmiotu „Matematyka Dyskretna II" na II roku informatyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu. Stanowi on uzupełnienie przygotowanych przez dr. Witolda Kraśkiewicza notatek z wykładu z tego przedmiotu. Zadania zamieszczone w zbiorze pochodzą z następujących pozycji poświęconych kombinatoryce:

1. Victor Bryant, Aspects of combinatorics, A wide-ranging introduction, Cambridge University Press, Cambridge, 1993;

2. Peter Cameron, Combinatorics: topis, techniques, algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, 1994;

3. Zbigniew Palka, Andrzej Ruciński, Wykłady z kombinatoryki, część 1, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998;

4. К. А. Пыбникоб (ред), Комбинаторный анализ, Задачи и упражнения, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1982.

Zbiór zawiera także zadania zaproponowane przez dr. Andrzeja Daszkiewicza, dr. Witolda Kraśkiewicza oraz mojego własnego autorstwa.

Rozdział 1

Zadania

1.1 Podstawowe pojęcia

1. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 10 kart tak, aby był wśród nich dokładnie jeden as?

2. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 10 kart tak, aby był wśród nich co najmniej jeden as?

3. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 6 kart tak, aby były wśród nich karty wszystkich kolorów?

4. Na ile sposobów spośród n małżeństw można wybrać jedną kobietę i jednego mężczyznę, którzy nie są małżeństwem?

5. Sadzamy n osób przy okrągłym stole. Dwa rozsadzenia uważamy za identyczne, jeśli w obu przypadkach każdy człowiek ma tych samych sąsiadów. Ile jest możliwych sposobów rozsadzenia?

6. Na ile sposobów można posadzić przy okrągłym stole n kobiet i n mężczyzn tak, aby żadne dwie osoby tej samej płci nie siedziały obok siebie? Dwa rozsadzenia uważamy za identyczne, jeśli w obu przypadkach każdy człowiek ma tych samych sąsiadów.

7. Na ile sposobów można rozmieścić k nierozróżnialnych kul w n ponumerowanych szufladach, przy założeniu, że w każdej szufladzie może znaleźć się co najwyżej jedna kula?

8. Na ile sposobów można rozmieścić k rozróżnialnych kul w n ponumerowanych szufladach, przy założeniu, że w każdej szufladzie może znaleźć się co najwyżej jedna kula?

9. Ile jest permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$, w której żadne dwie sąsiednie liczby nie są parzyste?

1.2 Metoda bijektywna

Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnić następujące równości.

(1) $$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = n^2\binom{2n-2}{n-1}$$

(5) $$\sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{k}2^k$$

(6) $$\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l}\binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}$$

(7) $$\sum_{k\geq 0} \binom{n}{2k} = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}$$

(8) $$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(9) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(m-1)^{n-k} = m^n$$

(10) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+1}{2}^2$$

1.3 Reguła włączania i wyłączania

10. Ile jest liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 10000 podzielnych przynajmniej przez jedną z liczb 2, 3, 5?

11. Ile jest całkowitoliczbowych rozwiązań równania

$$x_1 + \cdots + x_6 = 30$$

spełniających poniższe warunki?

(a) $0 \le x_i \le 10$, $i = 1, \dots, 6$.
(b) $-10 \le x_i \le 20$, $i = 1, \dots, 6$.
(c) $x_1 \le 5$, $x_2 \le 10$, $x_3 \le 15$, $x_4 \le 20$, $x_i \ge 0$, $i = 1, \dots, 6$.

12. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 5 kart tak, aby otrzymać co najmniej jednego asa, co najmniej jednego króla i co najmniej jedną damę?

13. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, w których pierwsza liczba jest większa od 2, a ostatnia jest mniejsza od 9?

14. Ile jest ciągów długości n, $n \ge 3$, złożonych z cyfr 0, 1, …, 9 takich, że każda z cyfr 1, 2, 3 występuje w każdym z ciągów co najmniej raz?

15. Ile jest macierzy zero-jedynkowych o wymiarach n na n, w których co najmniej jeden wiersz jest zerowy?

16. Jakie jest prawdopodobieństwo, że po rozdaniu kart do brydża ustalony gracz wśród otrzymanych kart będzie miał cztery karty tej samej wysokości?

17. Oblicz prawdopodobieństwo, że rzucając dziesięć razy dwoma kostkami do gry uzyskamy wszystkie pary $\{i, i\}$, gdzie $i = 1, \dots, 6$.

18. Przy okrągłym stole sadzamy n małżeństw, na przemian kobietę i mężczyznę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne małżeństwo nie będzie siedziało obok siebie?

1.4 Rekurencja

19. Znaleźć jawne wzory dla ciągów spełniających poniższe warunki rekurencyjne.
(a) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 5$.
(b) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
(c) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 9$.

20. Znaleźć jawne wzory dla ciągów spełniających poniższe warunki rekurencyjne.
(a) $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + n + 2$, $a_0 = 0$.
(b) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

21. Znaleźć jawne wzory dla ciągów spełniających poniższe warunki rekurencyjne.

(a) $na_{n+1} - (n+1)a_n = 3n^2(n+1)$, $a_1 = 3$.

(b) $a_{n+2} = 5\frac{n+1}{n+2}a_{n+1} - 6\frac{n}{n+2}a_n$, $a_1 = 5$, $a_2 = 6\frac{1}{2}$.

22. Nie korzystając ze wzoru jawnego dla ciągu Fibonacciego (F_n) udowodnić poniższe równości (przypomnijmy, że $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$).

(a) $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$;

(b) $\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$;

(c) $F_{n+m} = F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1}$.

23. Niech D_n oznacza ilość permutacji n-elementowych bez punktów stałych. Nie korzystając ze wzoru jawnego dla ciągu (D_n) udowodnić, że $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ i wywnioskować stąd, że $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$.

24. Na ile sposobów można pokonać n stopni, jeżeli możemy poruszać się o 1 bądź 2 stopnie do góry?

25. Ile można utworzyć ciągów długości n złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedynki nie stały obok siebie?

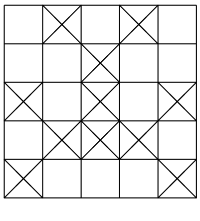
26. Ile można utworzyć ciągów długości n złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedynki ani żadne dwie dwójki nie stały obok siebie?

27. Wyznaczyć wzór na sumę czwartych potęg liczb naturalnych od 1 do n.

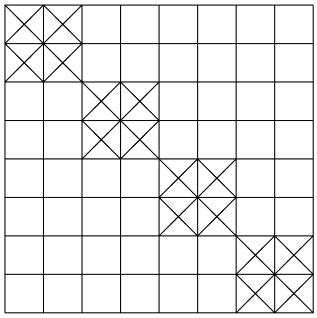
28. Na ile maksymalnie części można podzielić płaszczyznę przy pomocy n okręgów?

1.5 Wielomiany wieżowe

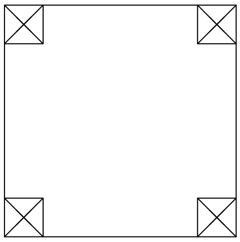
29. Wyliczyć wielomian wieżowy następującej szachownicy.



30. Na ile sposobów można postawić 8 nie atakujących się wzajemnie wież na następującej szachownicy?



31. Na ile sposobów można postawić n nie atakujących się wzajemnie wież na następującej szachownicy o wymiarach $n \times n$?

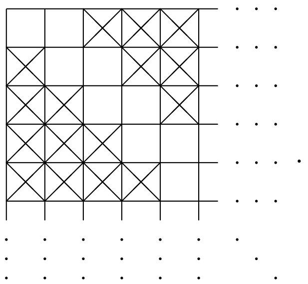


32. Niech $R_{n,m}$ oznacza wielomian wieżowy pustej szachownicy o wymiarach $n \times m$. Udowodnić następujące równości.

(a) $R_{n,m} = R_{n-1,m} + mtR_{n-1,m-1}$.

(b) $R'_{n,m} = nmR_{n-1,m-1}$, gdzie f' oznacza pochodną wielomianu f.

33. Niech r_n oznacza wielomianem wieżowy następującej szachownicy o wymiarach $n \times n$



Znaleźć zależność rekurencyjną angażującą r_n, r_{n-1} i r_{n-2}. Pokazać, że

$$r_n = \binom{2n}{0} + \binom{2n-1}{1}t + \cdots + \binom{2n-k}{k}t^k + \cdots + \binom{n}{n}t^n.$$

1.6 Funkcje tworzące

34. Znaleźć jawne wzory dla ciągów spełniających poniższe warunki rekurencyjne.

(a) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 8$;

(b) $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 4$;

(c) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 12a_{n+1} - 8a_n = n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$.

35. Znaleźć funkcje tworzące ciągów z poprzedniego zadania.

36. Znaleźć związek pomiędzy funkcjami tworzącymi ciągów (a_n) i (b_n).

(a) $a_{n+1} = b_n$, $n \geq 0$.

(b) $a_n = nb_n$, $n \geq 0$.

(c) $a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i$, $n \geq 0$.

37. Udowodnić, że jeśli funkcja tworząca $A(t)$ ciągu (a_n) jest postaci $A(t) = \frac{W(t)}{1+c_1t+\cdots+c_kt^k}$ dla pewnego wielomianu $W(t)$ stopnia mniejszego niż $2k$, to ciąg (a_n) spełnia warunek $a_{n+k} + c_1a_{n+k-1} + \cdots + c_ka_n = 0$.

38. Znaleźć funkcje tworzącą ciągów spełniających poniższe warunki. Wykorzystać funkcje tworzącą do znalezienia prostszej rekurencji dla poniższych ciągów.

(a) $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i + 1$, $a_0 = 1$.

(b) $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}a_i + 1$, $a_0 = 1$.

(c) $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} F_{n-i}a_i + 1$, $a_0 = 1$.

39. Uzasadnić wzór $\frac{1}{(1-t)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} t^n$ wykorzystując interpretację powyższej funkcji, jako funkcji tworzącej dla ilości rozwiązań równania $x_1 + \cdots + x_k = n$, $n \geq 0$, w liczbach całkowitych nieujemnych.

40. Znaleźć ilość rozwiązań równania $x_1 + 2x_2 + 4x_4 = n$, $n \geq 0$, w liczbach całkowitych nieujemnych.

41. Niech s_n oznacza liczbę ciągów $(x_1, \ldots, x_k)$ takich, że $x_i \in \{0, \ldots, n\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$. Udowodnić, że $s_n = s_{n-1} + s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Pokazać, że funkcja tworząca $S(t)$ tego ciągu spełnia równanie $(1-t)S(t) = (1+t)S(t^2)$.

1.7 Podziały

W poniższych zadaniach stosowane są następujące oznaczenia.

- $P(n)$ — ilość podziałów liczby n.
- $P(n, k)$ — ilość podziałów liczby n na dokładnie k części.
- $p(n, k)$ — ilość podziałów liczby n na co najwyżej k części.
- $P(n, k, l)$ — ilość podziałów liczby n na dokładnie k części, z których każda jest nie większa niż l.
- $p(n, k, l)$ — ilość podziałów liczby n na co najwyżej k części, z których każda jest nie większa niż l.

42. Wyliczyć $p(n, 1, l)$, $p(n, 2, l)$ i $p(n, 3)$.

43. Wyliczyć $P(n, n-2)$.

44. Wykorzystując wzór

$$P(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left[P\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + P\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right], n > 0,$$

gdzie $P(n) = 0$ dla $n < 0$, oraz $P(0) = 1$, wyliczyć wartości $P(n)$, $n = 1, \ldots, 20$.

45. Udowodnić, że

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \leq P(n, k) \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

46. Udowodnić następujące równości.
(a) $P(n + k, k) = p(n, k)$.
(b) $P(n, 3) = P(2n, 3, n - 1)$.
(c) $P(2n, n) = P(n)$.
(d) $P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - k, k)$.

47. Udowodnić, że ilość podziałów liczby n na parzyste części równa się liczbie podziałów liczby n, w których każda liczba występuje parzystą ilość razy.

48. Pokazać, że ilość podziałów liczby n w których żadna część nie pojawia się więcej niż $k-1$ razy, jest równa liczbie podziałów liczby n na części niepodzielne przez k.

49. Niech $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ i $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ będą dwoma podziałami. Przez $\lambda + \mu$ oznaczać będziemy podział $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$, natomiast przez $\lambda \circ \mu$ podział otrzymany przez uporządkowanie ciągu $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots)$. Udowodnić, że

$$(\lambda + \mu)^{\sim} = \lambda^{\sim} \circ \mu^{\sim},$$

gdzie $\nu^{\sim}$ oznacza podział dualny do podziału ν.

50. Niech $F(t)$ oznacza funkcję generującą ciągu $(P(n))$, zaś $G(t)$ funkcję generującą ciągu $(Q(n))$, gdzie $Q(n)$ oznacza ilość podziałów liczby n na różne części. Udowodnić, że $F(t) = G(t)F(t^2)$. Wykorzystać tę równość do udowodnienia wzoru

$$P(n) = Q(n) + Q(n-2)P(1) + Q(n-4)P(2) + Q(n-6)P(3) + \cdots .$$

Uzasadnić powyższy wzór w bezpośredni sposób.

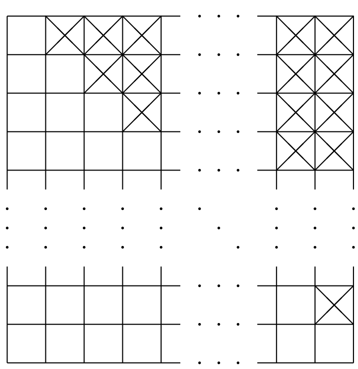
1.8 Liczby Stirlinga

51. Wyliczyć $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ i $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

52. Pokazać, że

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k-1} \right\}.$$

53. Udowodnić, że wielomian wieżowy następującej szachownicy wymiaru $n \times n$



jest równy

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} t^k.$$

54. Niech

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} t^k$$

będzie wielomianem Stirlinga. Udowodnić, że:

- $P_n(t) = t[P'_{n-1}(t) + P_{n-1}(t)]$;
- $P_n(t) = t \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} P_j(t)$;
- $P'_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} P_j(t)$.

1.9 Systemy reprezentantów

55. Dany jest zbiór n kobiet i m mężczyzn, przy czym każdych r kobiet zna co najmniej r mężczyzn. Ustalmy mężczyznę A, który zna co najmniej jedną z kobiet. Udowodnić, że każdą z kobiet możemy połączyć w parę z znajomym mężczyzną tak, że różnym kobietom odpowiadają różni mężczyźni i wśród wybranych mężczyzn jest A.

56. Niech $A = (a_{ij})$ będzie $n \times n$ macierzą taką, że istnieje μ o własności $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \mu$ dla każdego j i $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \mu$ dla każdego i. Udowodnić, że macierz A jest kombinacją liniową macierzy permutacji, tzn. istnieją macierze permutacji $A_1, \ldots, A_k$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ takie, że $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k = A$.

57. Obliczyć wymiar podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ rozpiętej przez macierze permutacji.

58. Udowodnić, że w dowolnej macierzy o współczynnikach liczbowych minimalna ilość kolumn i wierszy zawierających wszystkie niezerowe elementy jest równa maksymalnej ilości niezerowych elementów, z których żadne dwa nie znajdują się w jednym wierszy i w jednej kolumnie.

59. Udowodnić, że jeśli w macierzy kwadratowej wymiaru m zawarta jest zerowa podmacierz o wymiarach $s \times t$, gdzie $s + t > m$, to wyznacznik tej macierzy jest równy 0.

60. Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ oraz $(Y_1, \ldots, Y_n)$ będą dwoma rozkładami zbioru A na n równolicznych rozłącznych podzbiorów. Udowodnić, że istnieje system reprezentantów x_1, …, x_n wspólny dla obu rozkładów, tzn. dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ mamy $x_i \in X_i$ oraz $x_i \in Y_{\sigma(i)}$.

61. Wyliczyć liczbę kwadratów łacińskich rozmiaru 1, 2, 3 i 4.

Rozdział 2

Rozwiązania

2.1 Podstawowe pojęcia

1. $\binom{4}{1}\binom{48}{9}$.

2. Ponieważ wyborów, w których nie ma ani jednego as, jest $\binom{48}{10}$, więc wyborów, w których jest co najmniej jeden as, jest $\binom{52}{10} - \binom{48}{10}$.

3. Mogą zdarzyć się dwie sytuacji: albo w jednym kolorze będziemy mieli trzy karty i w pozostałych po jednej, albo w dwóch kolorach będziemy mieli po dwie karty i w pozostałych po jednej. Stąd otrzymujemy odpowiedź $\binom{4}{1}\binom{13}{3}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1} + \binom{4}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{1}$.

4. $n^2 - n = n(n-1)$.

5. Gdyby miejsca przy stole były ponumerowane, to rozsadzeń byłoby $n!$. Zauważmy jednak, że zgodnie z warunkami zadania musimy utożsamiamy grupy po $2n$ rozsadzeń, gdyż stół możemy obrócić na n sposobów oraz odbić symetrycznie też na n sposobów. Zatem ostateczna odpowiedź brzmi $\frac{(n-1)!}{2}$. Odpowiedź ta jest poprawa dla $n > 2$. Dla $n = 1, 2$, obroty i symetrie pokrywają się. W tych przypadkach odpowiedzią jest $(n-1)! = 1$.

6. Podobnie jak poprzednio załóżmy, że miejsca przy stole są ponumerowane. Możemy też przyjąć, że kobiety będą siedziały na miejscach nieparzystych, zaś mężczyźni na parzystych. Takich układów jest $(n!)^2$. Przekształceń stołu, które nie zmieniają rozsadzenia, jest $2n$. Musimy bowiem wybrać tylko te symetrie i obroty, które przeprowadzając miejsca nieparzyste w nieparzyste oraz parzyste w parzyste. Odpowiedzią jest więc $\frac{(n!)^2}{2n}$, $n \geq 2$. Dla $n = 1$ otrzymujemy $\frac{(n!)^2}{n} = 1$.

7. Musimy wybrać k suflad, w których umieścimy kule, co można zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów.

8. Korzystając z poprzedniego zadania otrzymujemy $\binom{n}{k}k!$.

9. Permutację zbioru $\{1,\ldots,n\}$, w której żadne sąsiednie dwie liczby nie są parzyste, możemy otrzymać umieszczając liczby parzyste pomiędzy nieparzystymi w ten sposób, aby pomiędzy każdymi dwoma liczbami nieparzystymi znalazła się co najwyżej jedna liczba parzysta. Ponieważ liczb parzystych jest $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, zaś liczb nieparzystych $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$, więc sposobów na jakie możemy wybrać miejsca dla liczb parzystych pomiędzy liczbami nieparzystymi jest $\binom{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$. Ostateczną odpowiedzią jest zatem $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor!\cdot\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor!\cdot\binom{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor+1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$, gdyż liczby parzyste możemy ustawić na $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor!$ sposobów, zaś liczby nieparzyste na $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor!$ sposobów.

2.2 Metoda bijektywna

(1). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A,a) takich, że $A\subset\{1,\ldots,n\}$, $|A|=k$ oraz $a\in A$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich par (b,B) takich, że $b\in\{1,\ldots,n\}$, $B\subset\{1,\ldots,n\}\setminus\{b\}$, $|B|=k-1$. Mamy $|X|=\binom{n}{k}\cdot k$ oraz $|Y|=n\cdot\binom{n-1}{k-1}$. Określamy funkcję $f:X\to Y$ wzorem $f(A,a)=(a,A\setminus\{a\})$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(b,B)=(B\cup\{b\},b)$.

(2). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A,a) takich, że $A\subset\{1,\ldots,n\}$ oraz $a\in A$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X=\bigcup_{k=1}^n X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych par $(A,a)\in X$ dla których $|A|=k$. Ponieważ $|X_k|=\binom{n}{k}\cdot k$ oraz zbiory X_1, …, X_n są parami rozłączne, więc $|X|=\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich par (b,B) takich, że $b\in\{1,\ldots,n\}$, $B\subset\{1,\ldots,n\}\setminus\{b\}$. Mamy $|Y|=n\cdot 2^{n-1}$. Określamy funkcję $f:X\to Y$ wzorem $f(A,a)=(a,A\setminus\{a\})$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(b,B)=(B\cup\{b\},b)$.

(3). Niech X będzie zbiorem wszystkich trójek (A,a_1,a_2) takich, że $A\subset\{1,\ldots,n\}$ oraz $a_1,a_2\in A$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X=\bigcup_{k=1}^n X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych trójek $(A,a_1,a_2)\in X$ dla których $|A|=k$. Ponieważ $|X_k|=\binom{n}{k}\cdot k\cdot k$ oraz zbiory X_1, …, X_n są parami rozłączne, więc $|X|=\sum_{k=1}^n k^2\binom{n}{k}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich trójek (b_1,b_2,B) takich, że $b_1,b_2\in\{1,\ldots,n\}$, $B\subset$

$\{1,\ldots,n\} \setminus \{b_1, b_2\}$. Zauważmy, że $Y = Y_1 \cup Y_2$, gdzie Y_1 jest zbiorem tych trójek $(b_1, b_2, B) \in Y$ dla których $b_1 \neq b_2$, zaś Y_2 jest zbiorem tych trójek $(b_1, b_2, B) \in Y$, dla których $b_1 = b_2$. Ponieważ $|Y_1| = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$, $|Y_2| = n \cdot 2^{n-1}$ oraz zbiory Y_1 i Y_2 są rozłączne, więc $|Y| = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem $f(A, a_1, a_2) = (a_1, a_2, A \setminus \{a_1, a_2\})$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(b_1, b_2, B) = (B \cup \{b_1, b_2\}, b_1, b_2)$.

(4). Niech X będzie zbiorem wszystkich czwórek (A_1, A_2, a_1, a_2) takich, że $A_1 \subset \{1,\ldots,n\}$, $A_2 \subset \{n+1,\ldots,2n\}$, $|A_1| + |A_2| = n$, $a_1 \in A_1$, $a_2 \in \{n+1,\ldots,2n\} \setminus A_2$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych czwórek $(A_1, A_2, a_1, a_2) \in X$ dla których $|A_1| = k$. Ponieważ $|X_k| = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k} \cdot k \cdot (n - (n-k))$ oraz zbiory $X_1, \ldots, X_n$ są parami rozłączne, więc $|X| = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich trójek (b_1, b_2, B) takich, że $b_1 \in \{1,\ldots,n\}$, $b_2 \in \{n+1,\ldots,2n\}$, $B \subset \{1,\ldots,2n\} \setminus \{b_1, b_2\}$, $|B| = n-1$. Mamy $|Y| = n \cdot n \cdot \binom{2n-2}{n-1}$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem $f(A_1, A_2, a_1, a_2) = (a_1, a_2, (A_1 \cup A_2) \setminus \{a_1\})$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(b_1, b_2, B) = ((B \cap \{1,\ldots,n\}) \cup \{b_1\}, B \cap \{n+1,\ldots,2n\}, b_1, b_2)$.

(5). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A_1, A_2) takich, że $A_1 \subset \{1,\ldots,n\}$, $A_2 \subset \{1,\ldots,n\} \setminus A_1$, $|A_1| + |A_2| = k$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{l=0}^{k} X_l$, gdzie X_l jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X$, dla których $|A_1| = l$. Ponieważ $|X_l| = \binom{n}{l} \cdot \binom{n-l}{k-l}$ oraz zbiory $X_0, \ldots, X_k$ są parami rozłączne, więc $|X| = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich par (B_1, B_2), gdzie $B_1 \subset \{1,\ldots,n\}$, $|B_1| = k$, $B_2 \subset B_1$. Mamy $|Y| = \binom{n}{k} \cdot 2^k$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem $f(A_1, A_2) = (A_1 \cup A_2, A_2)$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(B_1, B_2) = (B_1 \setminus B_2, B_2)$.

(6). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A_1, A_2) takich, że $A_1 \subset \{1,\ldots,m\}$, $A_2 \subset \{m+1,\ldots,m+n\}$, $|A_1| + |A_2| = k$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{l=0}^{k} X_l$, gdzie X_l jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X$, dla których $|A_1| = l$. Ponieważ $|X_l| = \binom{m}{l} \cdot \binom{n}{k-l}$ oraz zbiory $X_0, \ldots, X_k$ są parami rozłączne, więc $|X| = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l}\binom{n}{k-l}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich podzbiorów $B \subset \{1,\ldots,m+n\}$ takich, że $|B| = k$. Oczywiście $|Y| = \binom{m+n}{k}$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem $f(A_1, A_2) = A_1 \cup A_2$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona.

Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(B) = (B \cap \{1, \ldots, m\}, B \cap \{m+1, \ldots, m+n\})$.

(7). Niech X będzie zbiorem wszystkich podzbiorów $A \subset \{1, \ldots, n\}$ o parzystej ilości elementów. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich podzbiorów $B \subset \{1, \ldots, n\}$ o nieparzystej ilości elementów. Mamy $|X| = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}$ oraz $|Y| = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k+1}$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem

$$f(A) = \begin{cases} A \cup \{n\} & n \notin A \\ A \setminus \{n\} & n \in A \end{cases}.$$

Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem

$$g(B) = \begin{cases} B \cup \{n\} & n \notin B \\ B \setminus \{n\} & n \in B \end{cases}.$$

(8). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (a, A) takich, że $a \in \{1, \ldots, n+1\}$, $A \subset \{1, \ldots, n\}$, $|A| = m$, $a > \max A$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{k=m}^{n} X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych par $(a, A) \in X$, dla których $a = k+1$. Ponieważ $|X_k| = \bigcup_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$ oraz zbiory X_m, $\ldots$, X_n są parami rozłączne, więc $|X| = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich podzbiorów $B \subset \{1, \ldots, n+1\}$ takich, że $|B| = m+1$. Oczywiście $|Y| = \binom{n+1}{m+1}$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem $f(a, A) = A \cup \{a\}$. Zauważmy, że funkcja f jest dobrze określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(B) = (\max B, B \setminus \{\max B\})$.

(9). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A, φ), gdzie $A \subset \{1, \ldots, n\}$, $\varphi : \{1, \ldots, n\} \setminus A \to \{1, \ldots, m-1\}$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{k=0}^{m} X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych par $(A, \varphi) \in X$, dla których $|A| = k$. Ponieważ $|X_k| = \binom{n}{k} \cdot (m-1)^{n-k}$ oraz zbiory X_0, $\ldots$, X_k są parami rozłączne, więc $|X| = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{k} (m-1)^{n-k}$. Podobnie definiujemy Y jako zbiór wszystkich funkcji $\psi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$. Oczywiście $|Y| = m^n$. Określamy funkcję $f : X \to Y$ wzorem

$$[f(A, \varphi)](x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \notin A \\ m & x \in A \end{cases}$$

dla $x \in \{1, \ldots, n\}$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie określona. Ponadto funkcja f jest bijekcją, funkcja g odwrotna do f dana jest wzorem $g(\psi) = (\psi^{-1}(m), \psi|_{\{1, \ldots, n\} \setminus \psi^{-1}(m)})$.

(10). Niech X będzie zbiorem wszystkich par (A_1, A_2), gdzie $A_1, A_2 \subset \{0, \ldots, n\}$, $|A_1| = 2 = |A_2|$. Oczywiście $|X| = \binom{n+1}{2} \cdot \binom{n+1}{2}$. Zauważmy, że zbiór X możemy przedstawić w postaci sumy $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$, gdzie X_k jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X$, dla których $\max A_1 \leq k$, $\max A_2 \leq k$ oraz $\max A_1 = k$ lub $\max A_2 = k$. Ustalmy $k \in \{1, \ldots, n\}$. Mamy $X_k = X'_k \cup X''_k \cup X'''_k$, gdzie X'_k jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X_k$, dla których $\max A_1 = k$, $\max A_2 < k$, X''_k jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X_k$, dla których $\max A_1 < k$, $\max A_2 = k$, oraz X'''_k jest zbiorem tych par $(A_1, A_2) \in X_k$, dla których $\max A_1 = k = \max A_2$. Ponieważ $|X'_k| = |X''_k| = k \cdot \binom{k}{2}$ i $|X'''_k| = k \cdot k$ oraz zbiory X'_k, X''_k, X'''_k są parami rozłączne, więc $|X_k| = 2k\binom{k}{2} + k^2 = k^3$. Wykorzystując fakt, że zbiory X_1, …, X_k są parami rozłączne otrzymujemy, że $\binom{n+1}{2}^2 = |X| = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

2.3 Reguła włączania i wyłączania

10. Liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 10000 podzielnych przez 2 jest $\frac{10000}{2} = 5000$. Podobnie, w podanym zakresie liczb podzielnych przez 3 jest $\lfloor \frac{10000}{3} \rfloor = 3333$, zaś podzielnych przez 5 jest $\frac{10000}{5} = 2000$. Ponieważ liczby 2 i 3 są względnie pierwsze, więc liczb całkowitych dodatnich nie większych niż 10000 podzielnych zarówno przez 2 jak i przez 3 jest $\lfloor \frac{10000}{2\cdot 3} \rfloor = 1666$. Z tego samego powodu odpowiednia ilość liczb podzielnych przez 2 i przez 5 wynosi $\frac{10000}{2\cdot 5} = 1000$, podzielnych przez 3 i przez 5 jest równa $\lfloor \frac{10000}{3\cdot 5} \rfloor = 666$, zaś liczb podzielnych przez 2, 3 i 5 jest $\lfloor \frac{10000}{2\cdot 3\cdot 5} \rfloor = 333$. Z reguły włączania i wyłączania wynika zatem, że odpowiedzią jest $5000 + 3333 + 2000 - 1666 - 1000 - 666 + 333 = 7334$.

11.(a). Niech A będzie zbiorem wszystkich nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1 + \cdots + x_6 = 30$, zaś dla każdego $i = 1, \ldots, 6$, niech A_i będzie zbiorem tych całkowitoliczbowych rozwiązań powyższego równania, dla których $x_i \geq 11$. Musimy policzyć $|A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_6)| = |A| - |A_1 \cup \cdots \cup A_6|$. Wiadomo, że $|A| = \binom{30+6-1}{6-1} = \binom{35}{5}$. Zauważmy, ze ilość całkowitoliczbowych rozwiązań równania $x_1 + \cdots + x_k = n$ spełniających warunki $x_i \geq m_i$, $i = 1, \ldots, k$, jest równa $\binom{n-(m_1+\cdots+m_k)+k-1}{k-1}$. Istotnie, niech X będzie zbiorem powyższych rozwiązań, zaś Y zbiorem nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązań równania $y_1 + \cdots + y_k = n - (m_1 + \cdots + m_k)$. Funkcja $f : X \to Y$ określona wzorem $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1 - m_1, \ldots, x_k - m_k)$ jest bijekcją, zatem $|X| = |Y| = \binom{n-(m_1+\cdots+m_k)+k-1}{k-1}$. Korzystając z powyższej uwagi otrzymujemy, że $|A_i| = \binom{30-11+6-1}{6-1} = \binom{24}{5}$, $i = 1, \ldots, 6$, $|A_i \cap A_j| = \binom{30-(11+11)+6-1}{6-1} = \binom{13}{5}$, $i < j$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = 0$, $i < j < k$. Na mocy reguły włączania i wyłączania dostajemy, że $|A_1 \cup \cdots \cup A_6| = 6\binom{24}{5} - \binom{6}{2}\binom{13}{5}$, więc ostateczną odpowiedzią jest $\binom{35}{5} - 6\binom{24}{5} + \binom{6}{2}\binom{13}{2} = 88913$.

11.(b). Zauważmy, że szukana ilość rozwiązań jest równa ilości nieujemnych całkowitoliczbowych rozwiązań równania $y_1 + \cdots + y_6 = 90$ spełniających warunki $0 \leq y_i \leq 30$, $i = 1, \ldots, 6$. Istotnie, każdemu rozwiązaniu wyjściowego równania możemy przyporządkować rozwiązanie powyższego równania zgodnie z regułą $(x_1, \ldots, x_6) \mapsto (x_1 + 10, \ldots, x_6 + 10)$. Przyporządkowanie odwrotne dane jest wzorem $(y_1, \ldots, y_6) \mapsto (y_1 - 10, \ldots, y_6 - 10)$. Wykorzystując tę obserwację otrzymujemy analogicznie jak w poprzednim zadaniu, że szukaną odpowiedzią jest $\binom{95}{5} - 6\binom{64}{5} + \binom{6}{2}\binom{33}{5} = 15753487$.

11.(c). $\binom{35}{5} - \binom{29}{5} - \binom{24}{5} - \binom{19}{5} - \binom{14}{5} + \binom{18}{5} + \binom{13}{5} + \binom{8}{5} + \binom{8}{5} = 159710$.

12. Wyborów 5 kart z talii złożonej z 52 kart, w których nie ma żadnego asa, jest $\binom{48}{5}$. Taka same są ilość wyborów 5 kart, wśród których nie ma króla, i ilość wyborów 5 kart, wśród których nie ma damy. Ilość wyborów 5 kart, wśród których nie ma ani asa ani króla jest równa $\binom{44}{5}$. Podobnie rzecz ma się z ilością wyborów 5 kart, wśród których nie ma ani asa ani damy, oraz z ilością wyborów 5 kart, wśród których nie ma ani króla ani damy. Ponieważ ilość wyborów, w których nie ma asa, króla ani damy jest równa $\binom{40}{5}$, z zasady włączania i wyłączania wynika, że ilość wyborów nie spełniających warunków zadania jest równa $3\binom{48}{5} - 3\binom{44}{5} + \binom{40}{5}$, skąd wynika, że odpowiedzią jest $\binom{52}{5} - 3\binom{48}{5} + 3\binom{44}{5} - \binom{40}{5} = 62064$, gdyż ilość wszystkich możliwych wyborów 5 kart spośród 52 jest równa $\binom{52}{5}$.

13. Ilość permutacji zbioru $\{1, \ldots, 10\}$, w których pierwsza liczba jest równa 1 lub 2, wynosi $2 \cdot 9!$, podobnie jak ilość takich permutacji, w których ostatnia liczba jest równa 9 lub 10. Ponieważ ilość permutacji, w których pierwsza liczba jest równa 1 lub 2, zaś ostatnia liczba jest równa 9 lub 10, wynosi $2 \cdot 2 \cdot 8!$, więc z zasady włączania i wyłączania wynika, że ilość permutacji, które nie spełniają warunków zadania jest równa $4 \cdot 9! - 4 \cdot 8!$. Ostateczną odpowiedzią jest $10! - 4 \cdot 9! + 4 \cdot 8! = 2338560$, gdyż ilość wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, 10\}$ jest równa $10!$.

14. Ciągów długości n złożonych z cyfr 0, 1, ..., 9, w których nie występuje 1, jest 9^n. Podobnie rzecz ma się się z ciągami, w których nie występuje 2, i z ciągami bez 3. Ciągów, w których nie występują dwie ustalone spośród cyfr 1, 2, 3, jest 8^n, natomiast ciągów, w których nie występuje żadna z powyższych cyfr, jest 7^n. Z reguły włączania i wyłączania wynika zatem, że ciągów, które nie spełniają warunków zadania, jest $3 \cdot 9^n - 3 \cdot 8^n + 7^n$. Ostateczną odpowiedzią jest zatem $10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n$, gdyż wszystkich ciągów długości n złożonych z cyfr 0, 1, ..., 9 jest 10^n.

15. Ustalmy numery wierszy $i_1, \ldots, i_k$. Ilość macierzy, w których wiersze $i_1, \ldots, i_k$ są zerowe, jest równa 2^{n^2-kn}. Korzystając z zasady włączania i wyłączania otrzymujemy, że szukanych macierzy jest $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}2^{n^2-kn}$, co można doprowadzić do postaci $2^{n^2}-(2^n-1)^n$.

16. Ilość sposobów na jakie ustalony gracz może otrzymać karty tak, aby były wśród nich cztery karty danej wysokości jest równa $\binom{48}{9}$. Podobnie, ilość sposobów na jakie ustalony gracz może otrzymać karty tak, aby były wśród nich po cztery karty dwóch danych wysokości jest równa $\binom{44}{5}$, zaś ilość sposobów na jakie ustalony gracz może otrzymać karty tak, aby były wśród nich po cztery karty trzech ustalonych wysokości jest równa $\binom{40}{1}$. Oczywiście nie jest możliwe, aby gracz otrzymał karty, wśród których są po cztery karty czterech ustalonych wysokości. Korzystając z zasady włączania i wyłączania otrzymujemy zatem, że ilość sposobów na jakie gracz może otrzymać karty tak, aby były wśród nich cztery karty tej samej wysokości, jest równa $13\binom{48}{9}-\binom{13}{2}\binom{44}{9}+\binom{13}{3}\binom{40}{1}$, skąd wynika, że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest równe $\frac{13\binom{48}{9}-\binom{13}{2}\binom{44}{9}+\binom{13}{3}\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$, jako że wszystkich możliwości na jakie ustalony gracz może otrzymać karty jest $\binom{52}{13}$.

17. $\frac{36^{10}-6\cdot 35^{10}+\binom{6}{2}\cdot 34^{10}-\binom{6}{3}33^{10}+\binom{6}{4}32^{10}-\binom{6}{5}31^{10}+\binom{6}{6}30^{10}}{36^{10}}$.

18. Załóżmy, że miejsca przy stole są ponumerowane oraz, że kobiety siedzą na miejscach o numerach nieparzystych. Ustalmy numery małżeństw $i_1 < \cdots < i_k$. Ilość sposobów, na które możemy rozsadzić małżeństwa w ten sposób, aby wybrane małżeństwa siedziały obok siebie, jest równa $2n\binom{2n-k-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!(n-k)!$. Istotnie, jeśli założymy, że małżeństwo i_1 siedzi na miejscach $2n-1$ i $2n$, to $\binom{2n-k-1}{k-1}$ jest ilością sposobów, na które można wybrać miejsca, na których będą siedzieć pozostałe wybrane małżeństwa. Każdemu bowiem układowi $j_1 < \cdots < j_{k-1}$ liczb ze zbioru $\{1, \ldots, 2n-k-1\}$ odpowiada układ par (j_1, j_1+1), (j_2+1, j_2+2), $\ldots$, $(j_{k-1}+(k-2), j_{k-1}+k-1)$, na których siadają wybrane małżeństwa. Na $(k-1)!$ sposobów możemy powyższe miejsca dopasować do wybranych małżeństw, na $2n$ sposobów zmienić miejsca przydzielone małżeństwu i_1, na $(n-k)!$ sposobów możemy posadzić pozostałe kobiety i na tyle samo sposobów pozostałych mężczyzn. Z reguły włączania i wyłączania wynika więc, że ilość sposobów rozsadzeń, w których istnieje małżeństwo siedzące obok siebie, jest równa $2n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n-k-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!(n-k)!$. Szukane prawdopodobieństwo jest zatem równe $1-\frac{2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{2n-k-1}{k-1}(k-1)!(n-k)!(n-k)!}{(n-1)!n!}$, gdyż ilość wszystkich rozsadzeń wynosi $n!n!$.

2.4 Rekurencja

19.(a)**.** Równaniem charakterystycznym dla rozważanego problemu jest równanie $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, którego pierwiastkami są $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$. Stąd wynika, że $a_n = \mu_1 2^n + \mu_2 3^n$ dla pewnych liczb rzeczywistych μ_1 i μ_2. Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ wyliczamy, że $\mu_1 = 1$ i $\mu_2 = 1$, zatem $a_n = 2^n + 3^n$.

19.(b)**.** $a_n = \frac{i\sqrt{3}}{3}(\frac{1-i\sqrt{3}}{3})^n - \frac{i\sqrt{3}}{3}(\frac{1-i\sqrt{3}}{3})^n$.

19.(c)**.** $a_n = -4 + (-1)^n + 3 \cdot 2^n$.

20.(a)**.** Wiadomo, że ciąg a_n ma postać $a_n = b_n + c_n$, gdzie b_n jest pewnym rozwiązaniem problemu jednorodnego $b_{n+1} - 2b_n = 0$, zaś $c_n = \nu_3 n^3 + \nu_2 n^2 + \nu_1 n + \nu_0$ jest pewnym wielomianem stopnia nie większego niż 3 spełniającym warunek $c_{n+1} - c_n = n^2 + n + 2$. Podstawiając powyższą postać do wyjściowego warunku i porównując współczynniki uzyskanych w ten sposób wielomianów otrzymujemy, że $\nu_3 = 0$, $\nu_2 = -1$, $\nu_1 = -3$ i $\nu_0 = -6$. Ponieważ jedynym pierwiastkiem równania charakterystycznego dla problemu jednorodnego jest $\lambda = 2$, wiec $b_n = \mu 2^n$ dla pewnej liczby rzeczywistej μ, skąd $a_n = \mu 2^n - n^2 - 3n - 6$. Podstawiając $n = 0$ wyliczamy, że $\mu = 6$, zatem $a_n = 6 \cdot 2^n - n^2 - 3n - 6$.

20.(b)**.** $a_n = -\frac{3}{16}(-3)^n + \frac{1}{4}n + \frac{3}{16}$.

21.(a)**.** Dzieląc wyjściowy warunek przez $n(n+1)$ otrzymujemy $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 3n$, zatem stosując podstawienie $b_n = \frac{a_n}{n}$ sprowadzamy wyjściowy problem do znalezienia wzoru jawnego ciągu (b_n) spełniającego warunek rekurencyjny $b_{n+1} - b_n = 3n$ z warunkiem początkowym $b_1 = \frac{a_1}{1} = 3$. Stosując metody przedstawione w zadaniu 20 dostajemy, że $b_n = \frac{3(n-1)n}{2} + 1$, skąd $a_n = b_n n = \frac{3(n-1)n^2}{2} + n$.

21.(b)**.** $a_n = \frac{2^n+3^n}{n}$ (zastosować podstawienie $b_n = na_n$).

22.(a)**.** Dowód jest indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ tezę łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Załóżmy zatem, że $n > 1$ i że udowodniliśmy już, iż $F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2} = (-1)^{n-1}$. Mamy następujący ciąg równości

$$\begin{aligned} F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} &= (F_{n-2} + F_{n-1})F_n - (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} \\ &= F_{n-2}F_n - F_{n-1}F_n - F_{n-1}^2 + F_n F_{n-1} \\ &= -(F_{n-1}^2 - F_{n-2}F_n) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n, \end{aligned}$$

co kończy dowód tezy indukcyjnej.

22.(b). Dowód jest indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 0$ tezę łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Załóżmy zatem, że $n > 0$ i że udowodniliśmy już, iż $\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$. Mamy następujący ciąg równości

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = \sum_{i=0}^{n-1} F_i + F_n = F_{n+1} - 1 + F_n = F_{n+2} - 1,$$

co kończy dowód tezy indukcyjnej.

22.(c). Dowód jest indukcyjny ze względu na $n + m$. Dla $n + m = 2$ mamy $n = 1 = m$ i tezę łatwo jest sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Podobnie dla $n+m = 3$ z dokładnością do symetrii mamy $n = 2$ oraz $m = 1$ i teza wynika z bezpośrednich rachunków. Załóżmy zatem, że dla $k > 2$ i udowodniliśmy już, iż $F_{n+m} = F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1}$ o ile $n + m < k$. Jeśli $n + m = k$ oraz $m = 1$, to żądana równość wynika bezpośrednio z definicji ciągu Fibnonacciego. Podobnie dla $m = 2$ możemy uzasadnić równość bezpośrednim rachunkiem. Załóżmy zatem, że $n + m = k$ oraz $m \geq 3$. Wtedy mamy następujący ciąg równości

$$\begin{aligned}
F_{n+m} &= F_{n+m-1} + F_{n+m-2} \\
&= F_n F_{m-1} + F_{n-1} F_{m-2} + F_n F_{m-2} + F_{n-1} F_{m-3} \\
&= F_n (F_{m-1} + F_{m-2}) + F_{n-1} (F_{m-2} - F_{m-3}) \\
&= F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód tezy indukcyjnej.

23. Oznaczmy przez X_n zbiór permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$ bez punktów stałych. Ponadto przez $X_n^{(i)}$ oznaczmy zbiór tych permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$, dla których jedynym punktem stałych jest i. Oczywiście $|X_n| = D_n$ oraz $|X_n^{(i)}| = D_{n-1}$. Zdefiniujemy bijekcję $f : X_n \to \{1, \ldots, n-1\} \times X_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{i\} \times X_n^{(i)}$, co zakończy rozwiązanie pierwszej części zadania.

Dla dowolnej permutacji $\sigma \in X_n$ definiujemy permutację $\tau_\sigma \in X_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{n=1} X_n^{(i)}$ wzorem

$$\tau_\sigma(j) = \begin{cases} \sigma(j) & \sigma(j) \neq n \\ \sigma(n) & \sigma(j) = n \end{cases}.$$

Można sprawdzić, że istotnie $\tau_\sigma \in X_{n-1} \cup \bigcup_{i=1}^{n=1} X_n^{(i)}$. Określamy teraz funkcję f wzorem $f(\sigma) = (\sigma(n), \tau_\sigma)$. Funkcja f jest poprawnie określona, funkcja odwrotna g do f dana jest wzorem

$$[g(i, \tau)](j) = \begin{cases} \tau(j) & \tau(j) \neq i \\ n & \tau(j) = i \\ i & j = n \end{cases}.$$

Dowód drugiej części będzie indukcyjny ze względu na n. Dla $n = 1$ teza wynika z bezpośrednich rachunków, gdyż $D_1 = 0$ i $D_0 = 1$. Załóżmy zatem, że $n > 1$ oraz że udowodniliśmy już, iż $D_{n-1} = (n-1)D_{n-2} + (-1)^{n-1}$. Wykorzystując pierwszą część zadania i założenie indukcyjne otrzymujemy następujący ciąg równości

$$\begin{aligned} D_n &= (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \\ &= (n-1)D_{n-1} + D_{n-1} - (-1)^{n-1} = nD_{n-1} + (-1)^n, \end{aligned}$$

co kończy dowód tezy indukcyjnej.

24. Można zauważyć, że jeśli przez a_n oznaczymy ilość sposobów, na ile możemy pokonać n stopni, to $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ oraz $a_0 = a_1 = 1$. Stąd $a_n = F_n$, gdzie F_n jest ciągiem Fibonacciego.

25. Oznaczmy przez a_n ilość dozwolonych ciągów długości n. Jeśli ciąg długości n zaczyna się od 1, to następnie musi wystąpić 0 lub 2 i dowolny dozwolony ciąg długości $n-2$. Jeśli natomiast pierwszą cyfrą w ciągu jest 0 lub 2, to może po niej wystąpić dowolny dozwolony ciąg długości $n-1$. Otrzymujemy zatem zależność rekurencyjną $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$, którą łącznie z warunkami początkowymi $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$, prowadzi do odpowiedzi $a_n = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n + \frac{3+2\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n$.

26. Oznaczmy przez a_n ilość dozwolonych ciągów długości n. Podobnie przez b_n oznaczmy ilość dozwolonych ciągów długości n zaczynających się 0, natomiast przez c_n oznaczmy ilość dozwolonych ciągów długości n zaczynających się od 1. Ponieważ ilość dozwolonych ciągów długości n zaczynających się od 2 jest równa ilości dozwolonych ciągów długości n zaczynających się od 1, więc otrzymujemy równość $a_n = b_n + 2c_n$. Ponadto $b_n = a_{n-1}$, co w połączeniu z pierwszą równością daje nam wzór $c_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$. Zauważmy, że jeśli dozwolony ciąg długości n zaczyna się od 1, to następnie musi w nim wystąpić dozwolony ciąg długości $n-1$ zaczynający się od 0 lub 2, co prowadzi do równości $c_n = b_{n-1} + c_{n-1}$. Wykorzystując znalezione wcześniej wzory na b_n oraz a_n i przekształcając otrzymaną w ten sposób równość dochodzimy do zależności rekurencyjnej $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Ponieważ $a_0 = 1$ oraz $a_1 = 3$, więc $a_n = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1}$.

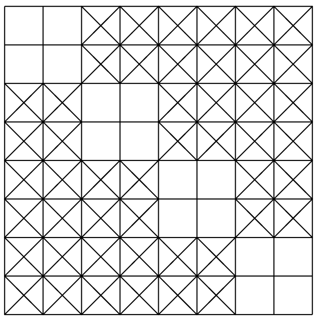
27. Oznaczmy przez s_n szukaną sumę. Mamy regułę rekurencyjną $s_n - s_{n-1} = n^4$, która wraz z warunkiem początkowym $s_0 = 0$ daje odpowiedź $s_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

28. Oznaczmy przez s_n szukaną ilość części. Mamy regułę rekurencyjną $s_n - s_{n-1} = 2(n-1)$. Powyższą regułą można udowodnić indukcyjnie wykorzystując przy tym fakt, że podział płaszczyzny przy pomocy n okręgów na maksymalną ilość części musi mieć własność, że część wspólna wnętrz wszystkich n okręgów jest niepusta i żadne trzy okręgi nie przecinają się w jednym punkcie. Ponieważ $s_1 = 2$, więc otrzymujemy wzór $s_n = (n-1)n+2$.

2.5 Wielomiany wieżowe

29. $1 + 14t + 64t^2 + 112t^3 + 68t^4 + 8t^5$.

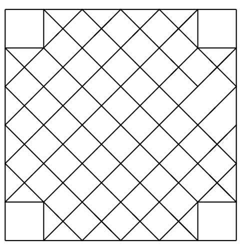
30. Negatyw wyjściowej szachownicy ma postać



,

więc jego wielomian wieżowy R jest równy r^4, gdzie $r = 1 + 4t + 2t^2$ jest wielomianem wieżowym pustej szachownicy o wymiarach 2×2. Ostatecznie $R = 1 + 16t + 104t^2 + 352t^3 + 664t^4 + 704t^5 + 416t^6 + 128t^7 + 16t^8$, skąd otrzymujemy odpowiedź $1 \cdot 8! - 16 \cdot 7! + 104 \cdot 6! - 352 \cdot 5! + 664 \cdot 4! - 704 \cdot 3! + 416 \cdot 2! - 128 \cdot 1! + 16 \cdot 0! = 4752$.

31. Negatyw wyjściowej szachownicy jest szachownicą o wymiarach $n \times n$ postaci



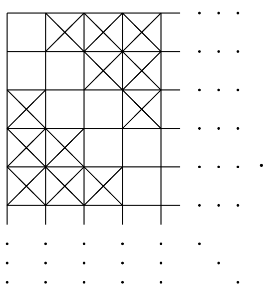
,

więc jego wielomian wieżowy R jest równy wielomianowi wieżowemu pustej szachownicy o wymiarach 2×2. Zatem $R = 1 + 4t + 2t^2$, skąd otrzymujemy odpowiedź $n! - 4(n-1)! + 2(n-2)!$.

32.(a). Oznaczmy przez $r^{(k)}_{n,m}$ współczynnik stojący w wielomianie $R_{n,m}$ przy t^k. Musimy pokazać, że $r^{(k)}_{n,m} = r^{(k)}_{n-1,m} + mr^{(k-1)}_{n-1,m-1}$ dla $k > 0$. Lewą stronę powyższej równości możemy oczywiście zinterpretować jako ilość rozstawień k wzajemnie nie atakujących się wież na pustej szachownicy o wymiarach $n \times m$. Rozstawienia te możemy podzielić na dwie rozłączne podzbiory. Pierwszy z nich składa się z tych rozstawień, dla których żadna z wież nie stoi w pierwszym wierszu, natomiast do drugiego podzbioru zaliczymy pozostałe rozstawienia. Zauważmy, że rozstawienia należące do pierwszego podzbioru możemy traktować jako rozstawienia k wzajemnie nie atakujących się wież na pustej szachownicy o wymiarach $(n-1) \times m$, skąd wynika, że takich rozstawień jest $r^{(k)}_{n-1,m}$. Rozstawienia należące do drugiego podzbioru możemy otrzymać stawiając najpierw jedną wieżę w pierwszym wierszu, a potem pozostałe $k-1$ wież na szachownicy powstałej z wyjściowej przez usunięcie pierwszego wiersza i kolumny w której stoi pierwsza wieża. Ponieważ w pierwszym wierszu wieżę możemy postawić na m sposobów, zaś ilość rozstawień $k-1$ wież na szachownicy powstałej z wyjściowej przez usunięcie pierwszego wiersza i kolumny w której stoi pierwsza wieża jest równa $r^{(k-1)}_{n-1,m-1}$, więc rozstawień należących do drugiego podzbioru jest $mr^{(k-1)}_{n-1,m-1}$, co kończy rozwiązanie.

Drugie rozwiązanie tego zadania możemy otrzymać wykorzystując wzór $R_S = R_{S'} + tR_{S''}$, gdzie dla ustalonego pola dozwolonego s szachownicy S przez S' oznaczamy szachownicę otrzymaną z S przez zamianę pola s na zabronione, zaś przez S'' szachownicę powstałą z S przez usunięcie kolumny i wiesza zawierających s. Niech $R^{(l)}_{n,m}$ będzie wielomianem szachownicy otrzymanej z pustej szachownicy o wymiarach $n \times m$ przez zamianę l pól w pierwszym wierszu na zabronione. Mamy równości $R^{(0)}_{n,m} = R_{n,m}$ oraz $R^{(m)}_{n,m} = R_{n-1,m}$. Ponadto z przedstawionego powyższej wzoru wynika, że $R^{(l)}_{n,m} = R^{(l+1)}_{n,m} + tR_{n-1,m-1}$, co pozwala udowodnić indukcyjnie, że $R_{n,m} = R^{(l)}_{n,m} + ltR_{n-1,m-1}$. Podstawiając $l = m$ otrzymujemy żądany wzór.

33. Oznaczmy przez s_n wielomian wieżowy następującej szachownicy o wymiarach $n \times (n-1)$



Wykorzystując wzór przedstawiony w drugim rozwiązaniu zadania 32.(a) otrzymujemy, że $r_n = s_n + tr_{n-1}$ oraz $s_n = r_{n-1} + ts_{n-1}$ dla $n > 1$. W szczególności dla $n > 2$ mamy z pierwszej równości, że $s_n = r_n - tr_{n-1}$ oraz $s_{n-1} = r_{n-1} - tr_{n-2}$. Podstawiając otrzymane powyżej wzory na s_n i s_{n-1} do drugiej równości dostajemy żądaną zależność rekurencyjną postaci $r_n = (1+2t)r_{n-1} - t^2 r_{n-2}$.

Drugą część zadania dowodzimy indukcyjnie. Prawdziwość wzoru dla $n = 1, 2$ można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Krok indukcyjny dla $n > 2$ wykorzystuje powyższą zależność rekurencyjną oraz wzory $\binom{2n}{0} = \binom{2n-2}{0}$, $\binom{2n-1}{1} = \binom{2n-3}{1} + 2\binom{2n-2}{0}$, $\binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k-2}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1} - \binom{2n-2}{k-2}$, $k = 2, \ldots, n-1$, oraz $\binom{n}{n} = 2\binom{n-1}{n-1} - \binom{n-2}{n-2}$.

2.6 Funkcje tworzące

34.(a). Równaniem charakterystycznym dla rozważanego problemu jest równanie $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, którego pierwiastkiem podwójnym jest $\lambda = 2$. Stąd wynika, że $a_n = \mu_1 2^n + \mu_2 n 2^n$ dla pewnych liczb rzeczywistych μ_1 i μ_2. Podstawiając $n = 0$ i $n = 1$ wyliczamy, że $\mu_1 = 3$ i $\mu_2 = 1$, zatem $a_n = (3+n)2^n$.

34.(b). $a_n = 8 + 8n - 5 \cdot 2^n$.

34.(c). Wiadomo, że ciąg a_n ma postać $a_n = b_n + c_n$, gdzie b_n jest pewnym rozwiązaniem problemu jednorodnego $b_{n+3} - 6b_{n+2} + 12b_{n+1} - 8b_n = 0$, zaś c_n jest pewnym wielomianem stopnia nie większego niż 4 spełniającym warunek $b_{n+3} - 6b_{n+2} + 12b_{n+1} - 8b_n = n$. Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymujemy, że $a_n = (3-n)2^n - 3 - n$.

35.(a). Mnożąc przez t^{n+2} równość $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ oraz sumując otrzymane w ten sposób wyrażenia dla $n \geq 0$ dostajemy równość $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}t^{n+2} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+2} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = 0$. Zauważmy, że mamy równości $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}t^{n+2} = \sum_{n=2} a_n t^n = A(t) - a_1 t - a_0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+2} = t(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n) = t(A(t) - a_0)$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+2} = t^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = t^2 A(t)$, a więc powyższa równość przyjmuje postać $A(t) - 8t - 3 - 4tA(t) + 12t + 4t^2 A(t) = 0$, skąd $A(t) = \frac{3-4t}{1-4t+4t^2}$.

35.(b). $A(t) = \frac{3-9t+7t^2}{1-4t+5t^2-2t^3}$.

35.(c). Podobnie jak w poprzednich zadaniach dochodzimy do równości $(1 - 6t + 12t^2 - 8t^3)A(t) + t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n+3}$. Mamy $\sum_{n=0}^{\infty} nt^{n+3} = t^4 \sum_{n=0}^{\infty} nt^{n-1} = t^4 \sum_{n=0}^{\infty} (t^n)' = t^4 (\sum_{n=0}^{\infty} t^n)' = t^4 (\frac{1}{1-t})' = t^4 \frac{1}{(1-t)^2}$, skąd $A(t) = \frac{2t^3-t^2}{(1-6t+12t^2-8t^3)(1-t)^2}$.

36.(a). Mnożąc równość $a_{n+1} = b_n$ przez t^{n+1} oraz sumując otrzymane w ten sposób wyrażenia dla $n \geq 0$ dostajemy równość $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}$. Ponieważ mamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = A(t) - a_0$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1} = t\sum_{n=0} b_n t^n = tB(t)$, więc odpowiedzią jest równość $A(t) - a_0 = tB(t)$.

36.(b). Podobnie jak w poprzednim punkcie dochodzimy do równości $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} nb_n t^n$, które lewa strona jest równa $A(t)$. Zarazem mamy $\sum_{n=0}^{\infty} nb_n t^n = t\sum_{n=0}^{\infty} nb_n t^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty}(b_n t^n)' = tB'(t)$, więc $A(t) = tB'(t)$.

36.(c). Mamy równość $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} b_i t^n$, której lewa strona jest równa $A(t)$. Ponadto mamy równości $\sum_{n=0}^{\infty} b_i t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} b_i t^i t^{n-i} = \sum_{i=0}^{\infty}(b_i t^i \sum_{j=0}^{\infty} t^j) = (\sum_{j=0}^{\infty} t^j)(\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i) = \frac{1}{1-t}B(t)$, skąd wynika, że $A(t) = \frac{B(t)}{1-t}$.

37. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ będą wszystkimi parami różnymi pierwiastkami wielomianu $t^k + c_1 t^{k-1} + \cdots + c_k$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ krotnościami tych pierwiastków odpowiednio. Dla każdego $j = 1, \ldots, k$ niech $(a_n^{(j)})$ będzie ciągiem danym wzorem $a_n^{(j)} := n^{j-(1+\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1})}\lambda_i^n$, jeśli $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1} < j \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$. Pokażemy najpierw, że ciąg (b_n) spełnia warunek $b_{n+k} + c_1 b_{n+k-1} + \cdots + c_k b_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kombinacją liniową ciągów $(b_n^{(j)})$. Niech V będzie przestrzenią ciągów (b_n) spełniających warunek $b_{n+k} + c_1 b_{n+k-1} + \cdots + c_k b_n = 0$, zaś U przestrzenią liniową generowaną przez ciągi $(a_n^{(j)})$. Wiemy już, że $V \subset U$, musimy zatem pokazać przeciwne zawieranie. Zauważmy, że przestrzeń V ma wymiar k, gdyż każdy ciąg $(b_n) \in V$ jest jednoznacznie wyznaczony przez wyrazy $b_0, \ldots, b_{k-1}$. Z drugiej strony przestrzeń U ma wymiar nie większy niż k. Ponieważ $V \subset U$, więc otrzymujemy $V = U$, co chcieliśmy pokazać.

Udowodnimy teraz tezę zadania. Ponieważ stopień wielomianu W jest mniejszy niż k oraz $1 + c_1 t + \cdots + c_k t^k = \prod_{i=0}^{l}\prod_{j=1}^{\alpha_i}(1 - \lambda_i t)^j$, więc $A(t) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{A_{i,j}}{(1-\lambda_i t)^j} = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{\alpha_i}(A_{i,j}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\lambda^n t^n)$ dla pewnych $A_{i,j}$, skąd $a_n = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=1}^{\alpha_i} A_{i,j}\binom{n+j-1}{j-1}\lambda^n$, a więc $(a_n) \in U = V$.

38.(a). Podobnie jak w zadaniu 36.(c) otrzymujemy, że $A(t) - 1 = \frac{tA(t)}{1-t} + \frac{t}{1-t}$, skąd $A(t) = \frac{1}{1-2t}$. Z poprzedniego zadania wynika zatem, że ciąg (a_n) spełnia warunek $a_{n+1} - 2a_n = 0$.

38.(b). Posługując się metodami analogicznymi do tych zaprezentowanych w rozwiązaniu zadania 36 mamy $A(t) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}a_i t^{n+1} + \frac{t}{1-t}$. Zauważmy, że mamy $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} 2^{n-i}a_i t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} ta_i t^i(2t)^{n-i} =$

$t\sum_{i=0}^{\infty}(a_it^i\sum_{j=0}^{\infty}(2t)^j) = t(\sum_{j=0}^{\infty}(2t)^j)(\sum_{i=0}^{\infty}a_it^i) = t\frac{1}{1-2t}A(t)$, skąd $A(t)-1 = \frac{tA(t)}{1-2t}+\frac{t}{1-t}$. Otrzymujemy zatem, że $A(t) = \frac{1-2t}{(1-3t)(1-t)} = \frac{1-2t}{1-4t+t^2}$ oraz zależność rekurencyjną $a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n = 0$.

38.(c)**.** Podobnie jak w poprzednim zadaniu otrzymujemy, że $A(t)-1 = tF(t)A(t)+\frac{t}{1-t}$, gdzie $F(t)$ jest funkcją generującą ciągu Fibnonacciego. Ponieważ $F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$, więc dostajemy, że $A(t) = \frac{1-t-t^2}{1-2t-t^2+2t^3}$ i zależność $a_{n+3}-2a_{n+2}-a_{n+1}+2a_n = 0$.

40. Zauważmy, że ilość a_n rozwiązań równania $x_1+2x_2+4x_4 = n$ w liczbach całkowitych dodatnich jest równa ilości przedstawień jednomianu t^n jako iloczynu potęg jednomianów t, t^2 i t^4. Stąd mamy, że $A(t) = (\sum_{i=0}^{\infty}t^i)(\sum_{i=0}^{\infty}(t^2)^i)(\sum_{i=0}^{\infty}(t^4)^i)$, gdzie $A(t)$ jest funkcją tworzącą ciągu (a_n). Z powyższej równości dostajemy $A(t) = \frac{1}{1-t}\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{(1-t)^3(1+t)^2(1-it)(1+it)} = \frac{9}{32(1-t)}+\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{1}{8(1-t)^3}+\frac{5}{32(1+t)}+\frac{1}{16(1+t)^2}+\frac{1-i}{16(1-it)}+\frac{1+i}{16(1+it)} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{9}{32}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n+2)}{16}+\frac{5(-1)^n}{32}+\frac{(-1)^n(n+1)}{16}+\frac{(1-i)i^n}{16}+\frac{(1+i)(-i)^n}{16})t^n$, a więc $a_n = \frac{9}{32}+\frac{n+1}{4}+\frac{(n+1)(n+2)}{16}+\frac{5(-1)^n}{32}+\frac{(-1)^n(n+1)}{16}+\frac{(1-i)i^n}{16}+\frac{(1+i)(-i)^n}{16}$.

41. Zbiór ciągów $(x_1,\ldots,x_k)$ spełniających warunki: $x_i \in \{1,\ldots,n\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$, możemy podzielić na dwa rozłączne podzbiory. Pierwszy podzbiór składa się z tych ciągów $(x_1,\ldots,x_k)$ powyższej postaci, dla których $x_k = n$, drugi zaś z pozostałych. Jeśli ciąg $(x_1,\ldots,x_k)$ należy do pierwszego podzbioru, to wtedy $(x_1,\ldots,x_{k-1})$ spełnia warunki: $x_i \in \{1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$. Na odwrót, gdy ciąg $(x_1,\ldots,x_{k-1})$ spełnia warunki: $x_i \in \{1,\ldots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$, to ciąg $(x_1,\ldots,x_{k-1},n)$ należy do pierwszego podzbioru. Stąd wynika, że do pierwszego podzbioru należy $s_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ podzbiorów. Z drugiej strony ciąg $(x_1,\ldots,x_k)$ należy do drugiego podzbioru wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i \in \{1,\ldots,n-1\}$ i $x_{i+1} \geq 2x_i$, a więc podzbiór ten ma s_{n-1} elementów, co kończy rozwiązanie pierwszej części zadania.

Mnożąc równość $s_n = s_{n-1}+s_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ przez t^n i sumując otrzymane w ten sposób wyrażenia dla $n \geq 1$, dostajemy $\sum_{n=1}^{\infty}s_nt^n = \sum_{n=1}^{\infty}s_{n-1}t^n+\sum_{n=1}^{\infty}s_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}t^n$. Mamy $\sum_{n=1}^{\infty}s_nt^n = S(t)-s_0 = S(t)-1$ i $\sum_{n=1}^{\infty}s_{n-1}t^n = t\sum_{n=0}^{\infty}s_nt^n = tS(t)$. Ponadto $\sum_{n=1}^{\infty}s_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}t^n = s_0t+\sum_{n=1}^{\infty}s_n(t^2)^n(1+t) = (1+t)(\sum_{n=0}^{\infty}s_n(t^2)^n)-s_0 = (1+t)S(t^2)-1$. Wykorzystując powyższe wzory otrzymujemy żądaną równość.

2.7 Podziały

42. Ponieważ mamy dokładnie jeden podział liczby n na co najwyżej 1 część postaci (n), więc $p(n,1,l) = \begin{cases}0 & l < n\\ 1 & l \geq n\end{cases}$.

Podziały liczby n na co najwyżej dwie części są postaci $(k, n-k)$ dla $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \dots, n$, przy czym części podziału $(k, n-k)$ są nie większe od l wtedy i tylko wtedy, gdy $k \leq l$. Zatem $p(n, 2, l) = 0$, gdy $l < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ oraz $p(n, 2, l) = n - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ dla $l \geq n$. Jeśli $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \leq l \leq n$, to $p(n, 2, l) = l - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$.

Aby wyliczyć $p(n, 3)$ zauważmy, że $p(n, 3)$ jest równe ilości podziałów liczby n, których żadna część nie przekracza 3. Jeśli λ jest podziałem liczby n, którego żadna część nie przekracza 3, i przez x_i oznaczmy ilość części podziału λ równych i, $i = 1, 2, 3$, to $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. Z drugiej strony, jeśli (x_1, x_2, x_3) jest rozwiązaniem równania $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$ w liczbach całkowitych dodatnich, to $\lambda := (3^{x_3}, 2^{x_2}, 1^{x_1})$ jest podziałem liczby n, którego żadna część nie przekracza 3. Zatem ilość podziałów liczby n, których żadna część nie przekracza 3, równa jest ilości rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich równania $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = n$. Postępując podobnie jak w rozwiązaniu zadania 40 otrzymujemy, że $p(n, 3) = \frac{17}{72} + \frac{n+1}{4} + \frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{\varepsilon^n + \varepsilon^{2n}}{9}$, gdzie ε jest pierwotnym pierwiastkiem stopnia 3 z 1.

43. Wykorzystując zadanie 46.(a) wiemy, że $P(n, n-2) = p(2, n-2)$. Mamy dwa podziały liczby 2: (2) i $(1, 1)$, zatem $P(n, n-2) = 2$, gdy $n-2 \geq 2$, oraz $P(3, 1) = 1$.

44. Korzystając z odpowiedniego wzoru otrzymujemy

$$
\begin{array}{lr}
P(1) = P(0) = & 1 \\
P(2) = P(1) + P(0) = & 2 \\
P(3) = P(2) + P(1) = & 3 \\
P(4) = P(3) + P(2) = & 5 \\
P(5) = P(4) + P(3) - P(0) = & 7 \\
P(6) = P(5) + P(4) - P(1) = & 11 \\
P(7) = P(6) + P(5) - P(2) - P(0) = & 15 \\
P(8) = P(7) + P(6) - P(3) - P(1) = & 22 \\
P(9) = P(8) + P(7) - P(4) - P(2) = & 30 \\
P(10) = P(9) + P(8) - P(5) - P(3) = & 42 \\
P(11) = P(10) + P(9) - P(6) - P(4) = & 56 \\
P(12) = P(11) + P(10) - P(7) - P(5) + P(0) = & 77 \\
P(13) = P(12) + P(11) - P(8) - P(6) + P(1) = & 101 \\
P(14) = P(13) + P(12) - P(9) - P(7) + P(2) = & 135 \\
P(15) = P(14) + P(13) - P(10) - P(8) + P(3) + P(0) = & 176
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(16) &= P(15)+P(14)-P(11)-P(9)+P(4)+P(1) = & 231\\
P(17) &= P(16)+P(15)-P(12)-P(10)+P(5)+P(2) = & 297\\
P(18) &= P(17)+P(16)-P(13)-P(11)+P(6)+P(3) = & 385\\
P(19) &= P(18)+P(17)-P(14)-P(12)+P(7)+P(4) = & 490\\
P(20) &= P(19)+P(18)-P(15)-P(13)+P(8)+P(5) = & 627
\end{aligned}
$$

45. Przypomnijmy, że $\binom{n-1}{k-1}$ jest ilością rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich równania $x_1+\cdots+x_k = n$. Każdy podział liczby n na dokładnie k części jest takim rozwiązaniem, co dowodzi nierówności $P(n,k) \leq \binom{n-1}{k-1}$. Z drugiej strony, parze (σ, λ), gdzie σ jest permutacją zbioru $\{1,\dots,k\}$, zaś λ jest podziałem liczby n na dokładnie k części, możemy przyporządkować rozwiązanie $(\lambda_{\sigma(1)},\dots,\lambda_{\sigma(k)})$ równania $x_1+\cdots+x_k = n$ w liczbach całkowitych dodatnich. Otrzymujemy w ten sposób wszystkie możliwe takie rozwiązania, gdyż rozwiązanie $(x_1,\dots,x_k)$ jest obrazem przy powyższym przekształceniu pary $(\sigma,(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)}))$, gdzie σ jest dowolną permutacją zbioru $\{1,\dots,k\}$, dla której ciąg $(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)})$ jest nierosnący. Powyższe obserwacje kończą dowód nierówności $\binom{n-1}{k-1} \leq k!P(n,k)$.

46.(a)**.** Przyporządkowanie $(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \mapsto (\lambda_1-1,\dots,\lambda_k-1)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby $n+k$ na dokładnie k części i podziałami liczby n na co najwyżej k części.

46.(b)**.** Przyporządkowanie $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mapsto (n-\lambda_3, n-\lambda_2, n-\lambda_1)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby n na dokładnie 3 części i podziałami liczby $2n$ na dokładnie 3 części, z których każda jest nie większa niż $n-1$. Przyporządkowanie odwrotne dane jest wzorem $(\mu_1,\mu_2,\mu_3) \mapsto (n-\mu_3, n-\mu_2, n-\mu_1)$. Zauważmy, że jeśli $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ jest podziałem liczby n na dokładnie 3 części, to warunek $\lambda_i \geq 1$ implikuje, że $n-\lambda_i \leq n-1$. Ponadto $\lambda_i < n$, więc $n-\lambda_i > 0$, a więc istotnie $(n-\lambda_3, n-\lambda_2, n-\lambda_1)$ jest podziałem liczby $2n$ na dokładnie 3 części, z których każda jest nie większa niż $n-1$. Podobnie uzasadniamy, że $(n-\mu_3, n-\mu_2, n-\mu_1)$ jest podziałem liczby n na dokładnie 3 części, jeśli (μ_1,μ_2,μ_3) jest podziałem liczby $2n$ na dokładnie 3 części, z których każda jest nie większa niż $n-1$.

46.(c)**.** Korzystając z zadania 46.(a) mamy $P(2n,n) = p(n,n) = P(n)$.

46.(d)**.** Przyporządkowanie

$$
(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \mapsto \begin{cases} (\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}) & \lambda_k = 1\\ (\lambda_1-1,\dots,\lambda_k-1) & \lambda_k > 1 \end{cases}
$$

ustala odpowiedniość pomiędzy odpowiednimi zbiorami podziałów.

47. I sposób. Przyporządkowanie podziałowi λ podziału dualnego $\lambda^{\sim}$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy podziałami liczby n na części parzyste oraz podziałami liczby n, w których każda część występuje parzystą ilość razy. Aby to sprawdzić należy skorzystać z obserwacji, że ilość wystąpień liczby k w podziale $\lambda^{\sim}$ wynosi $\lambda_k - \lambda_{k+1}$, co jest konsekwencją faktu $\lambda_i^{\sim} = |\{j \mid \lambda_j \geq i\}| = \max\{j \mid \lambda_j \geq i\}$.

II sposób. Niech a_n oznacza ilość podziałów liczby n na parzyste części, zaś b_n ilość podziałów liczby n, w których każda liczba występuje parzystą ilość razy. Oznaczmy przez $A(t)$ i $B(t)$ funkcje generujące ciągów (a_n) i (b_n) odpowiednio. Z wykładu wiemy, że $A(t) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2i}}$. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że $b_n = 0$ gdy n jest liczbą nieparzystą, oraz $b_n = P(\frac{n}{2})$, gdy n jest liczbą parzystą. Stąd $B(t) = F(t^2)$, gdzie $F(t)$ jest funkcją generującą ciągu $(P(n))$. Ostatecznie $B(t) = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2i}} = A(t)$.

48. Niech a_n oznacza ilość podziałów liczby, w których każda część występuje co najwyżej $k-1$ razy, zaś b_n ilość podziałów liczby n na części niepodzielne przez k. Oznaczmy przez $A(t)$ i $B(t)$ funkcje generujące ciągów (a_n) i (b_n) odpowiednio. Z wykładu wiemy, że $B(t) = \prod_{k \nmid i} \frac{1}{1-t^i}$. Pokażemy, że $A(t) = B(t)$. Z definicji ciągu (a_n) wynika, że $A(t) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + t^i + \cdots + (t^i)^{k-1})$. Wykorzystując równość $1 + t^i + \cdots + (t^i)^{k-1} = \frac{1-(t^i)^k}{1-t^i}$ otrzymujemy, że $A(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-t^{ik}}{1-t^i} = \prod_{k \nmid i} \frac{1}{1-t^i} = B(t)$.

49. Przypomnijmy, że $\lambda_i^{\sim} = \max\{j \mid \lambda_j \geq i\}$. Zatem $\lambda_i^{\sim} = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_k \geq i > \lambda_{k+1}$. Stąd ilość wystąpień liczby k jako części podziału $\lambda^{\sim}$ jest równa $\lambda_k - \lambda_{k+1}$. Wykorzystując powyższą obserwację otrzymujemy, że ilość wystąpień liczby k w podziale $(\lambda + \mu)^{\sim}$ jest równa $(\lambda + \mu)_k - (\lambda + \mu)_{k+1} = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + (\mu_k - \mu_{k+1})$. Z drugiej strony, ilość wystąpień liczby k jako części podziału $\lambda^{\sim} \circ \mu^{\sim}$ jest sumą ilości wystąpień liczby k w podziale $\lambda^{\sim}$ i ilości wystąpień liczby k w podziale $\mu^{\sim}$, co daje nam $(\lambda_k - \lambda_{k+1}) + (\mu_k - \mu_{k+1})$ i kończy dowód.

50. Równość $F(t) = G(t)F(t^2)$ otrzymujemy korzystając ze związku $1-t^{2i} = (1-t^i)(1+t^i)$ oraz ze wzorów $F(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^i}$ i $G(t) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+t^i)$ udowodnionych na wykładzie. W tej sytuacji równość

$$P(n) = Q(n) + Q(n-2)P(1) + Q(n-4)P(2) + Q(n-6)P(3) + \cdots.$$

otrzymujemy porównując współczynniki przy t^n w $F(t)$ oraz w iloczynie $G(t)F(t^2)$. Bezpośredni dowód powyższego wzoru otrzymujemy związując z każdym podziałem $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = (1^{i_1}, 2^{i_2}, \ldots)$ parę podziałów μ i ν w następujący sposób. Podział μ składa się z tych części podziału λ, które występują w nim nieparzystą ilość razy, zaś podział μ dany jest wzorem $\mu = (1^{\lfloor \frac{i_1}{2} \rfloor}, 2^{\lfloor \frac{i_2}{2} \rfloor}, \ldots)$.

2.8 Liczby Stirlinga

51. $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$, gdyż wśród $n-1$ zbiorów jeden musi być 2-elementowy, pozostałe zaś 1-elementowe. Zbiór 2-elementowy możemy wybrać na $\binom{n}{2}$ sposobów, pozostałe $n-2$ elementy w jednoznaczny sposób tworzą zbiory 1-elementowe. Podobnie $\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{n-4}$.

52. Zauważmy, że zbiór $\{1, \ldots, n+1\}$ możemy podzielić na k niepustych podzbiorów w następujący sposób: wybieramy najpierw podzbiór A zawierający $n+1$, a następnie dzielimy pozostałe elementy dzielimy na $k-1$ niepustych podzbiorów. Przy ustalonym zbiorze A możemy to zrobić na $\left\{ {n+1-l \atop k-1} \right\}$ sposobów, gdzie $l = l(A)$ jest ilością elementów zbioru A. Ponieważ przy ustalonym l zbiór A możemy wybrać na $\binom{n}{l-1}$ sposobów oraz możliwe wartości l to $1, \ldots, n$ (gdy $l > n-k-2$, to $\left\{ {n+1-l \atop k-1} \right\} = 0$), więc wzór otrzymujemy podstawiając $j = n+1-l$ i korzystając z tożsamości $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

53. Niech $a_{n,k}$ będzie ilością rozstawień k wież na rozważanej szachownicy. Oczywiście $a_{n,0} = 1 = \left\{ {n+1 \atop n+1} \right\}$ oraz $a_{n,n} = 1 = \left\{ {n+1 \atop 1} \right\}$. Dla $k = 1, \ldots, n-1$ otrzymujemy, że $a_{n,k} = a_{n-1,k} + (n+1-k)a_{n-1,k-1}$. Istotnie, pierwszy składnik wyrażenia po prawej stronie odpowiada tym rozstawieniom k wież, w których żadna z wież nie stoi w pierwszej kolumnie, zaś drugi pozostałym. Korzystając z założenia indukcyjnego oraz wzoru $\left\{ {m \atop l} \right\} = \left\{ {m-1 \atop l-1} \right\} + l\left\{ {m-1 \atop l} \right\}$ udowodnionego na wykładzie, otrzymujemy, że $a_{n,k} = \left\{ {n \atop n-k} \right\} + (n+1-k)\left\{ {n \atop n+1-k} \right\} = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\}$.

54. Porównanie współczynników stojących przy t^k w pierwszym wzorze daje tożsamość $\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ udowodnioną na wykładzie. Podobnie druga równość sprowadza się do wzoru $\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left\{ {j \atop k-1} \right\}$ pokazanego w zadaniu 52. Ostatni wzór jest konsekwencją dwóch poprzednich. Istotnie, z pierwszego wzoru mamy $tP_n'(t) = P_{n+1}(t) - tP_n(t)$. Podstawiając z drugiego wzoru $P_{n+1}(t) = t\sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j} P_j(t)$ i dzieląc otrzymaną równość przez t, kończymy dowód. Zauważmy, że ostatni wzór daje nam tożsamość $(k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k} \right\}$, którą można też uzasadnić bezpośrednio.

2.9 Systemy reprezentantów

55. Niech A_i będzie zbiorem mężczyzn, których zna kobieta i. Warunki zadania mówią, że ciąg $(A_1, \ldots, A_n)$ spełnia warunek Halla, zatem istnieje dla tego ciągu system reprezentantów, to znaczy każdą kobietę możemy połączyć w parę ze znajomym mężczyzną tak, aby różne kobiety były połączone w pary z różnymi mężczyznami. Jeśli wśród wybranych mężczyzn nie ma A, to wprowadzamy go na miejsce mężczyzny, który został przyporządkowany jednej z kobiet znanej przez A.

56. Możemy założyć, że $a_{i,j} \geq 0$ dla wszystkich i, j. Istotnie, macierz J złożona z samych jedynek jest w trywialny sposób kombinacją liniową macierzy permutacji oraz macierz $A + \mu J$ ma współczynniki nieujemne dla dostatecznie dużego μ. Dowód będzie indukcyjny ze względu na ilość m par (i, j) takich, że $a_{i,j} > 0$. Gdy $m = 0$, to teza jest oczywista. Przypuśćmy zatem, że $m > 0$. Dla każdego $i = 1, \dots n$ niech X_i będzie zbiorem tych indeksów j, dla których $a_{i,j} > 0$. Pokażemy, że ciąg $(X_1, \dots, X_n)$ spełnia warunek Halla. Ustalmy $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ i niech $k = |X|$, gdzie $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Wtedy $|I|\mu = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in X} a_{i,j} = \sum_{j \in X} \sum_{i \in I} a_{i,j} \leq k\mu$, skąd $|I| \leq k$. Niech $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ będzie system reprezentantów ciągu $(X_1, \dots, X_n)$ oraz $P = (p_{i,j})$, gdzie $p_{i,j} = \delta_{\sigma_i, j}$. Wtedy P jest macierzą permutacji oraz $A - \lambda P$ jest kombinacją liniową macierzy permutacji na mocy założenia indukcyjnego, gdzie $\lambda = \min\{a_{i,\sigma_i} \mid i = 1, \dots, n\}$.

57. Z poprzedniego zadania wiemy, że rozważana podprzestrzeń liniowa jest zbiorem rozwiązań układu równań $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$, $j = 2, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} a_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}$, $j = 2, \dots, n$, zatem jej wymiar jest równy $n^2 - 2(n - 1) = (n-1)^2 + 1$.

58. Ustalmy macierz $A = (a_{i,j})$ oraz oznaczmy przez N minimalną ilość wierszy i kolumn zawierających wszystkie niezerowe elementy macierzy A, zaś przez M maksymalną liczbę niezerowych elementów macierzy A, z których żadne dwa nie stoją w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Pokażemy najpierw, że $M \leq N$. Niech $i_1, \dots, i_p$ oraz $j_1, \dots, j_q$ będą numerami wierszy i kolumn zawierających wszystkie niezerowe elementy macierzy A. Przypuśćmy ponadto, że $a_{k_1,l_1}, \dots, a_{k_r,l_r}$ są niezerowymi elementami macierzy A, z których żadne dwa nie stoją w jednym wierszu ani w jednej kolumnie. Wtedy dla każdego s, $k_s \in \{i_1, \dots, i_p\}$ lub $l_s \in \{j_1, \dots, j_q\}$. Ponieważ indeksy $k_1, \dots, k_r$ są parami różne, i podobnie ma się rzecz z indeksami $l_1, \dots, l_r$, więc stąd wynika, że $r \leq p + q$, co kończy dowód nierówności $M \leq N$.

Udowodnimy teraz, że $M \geq N$. Podobnie jak powyżej oznaczmy przez $i_1, \dots, i_p$ oraz $j_1, \dots, j_q$ numery wierszy i kolumn zawierających wszystkie niezerowe elementy macierzy A. Załóżmy przy tym, że $p + q = N$. Dla każdego $s = 1, \dots, p$ niech A_s będzie zbiorem tych indeksów $l \notin \{j_1, \dots, j_q\}$, dla których $a_{i_s,l} \neq 0$. Ciąg $(A_1, \dots, A_p)$ spełnia warunek Halla. Gdyby bowiem tak nie było, to istniałyby parami różne indeksy $s_1, \dots, s_r$ takie, że $|A_{s_1} \cup \dots \cup A_{s_r}| < r$. Wtedy jednak zastępując wiersze $i_{s_1}, \dots, i_{s_r}$ kolumnami, których numery należą do zbioru $A_{s_1} \cup \cdots \cup A_{s_r}$, otrzymalibyśmy mniej niż N wierszy i kolumn zawierających wszystkie niezerowe elementy macierzy A, co jest niemożliwe. Podobnie pokazujemy, że jeśli B_t jest zbiorem tych indeksów $k \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$ dla których $a_{k,j_t} \neq 0$, to ciąg $(B_1, \ldots, B_q)$ spełnia warunek Halla. Oznaczmy przez Niech $l_1, \ldots, l_p$ będzie system reprezentantów ciągu $(A_1, \ldots, A_p)$, oraz $k_1, \ldots, k_q$ system reprezentantów ciągu $(B_1, \ldots, B_q)$. Wtedy $a_{i_1,l_1}, \ldots, a_{i_p,l_p}, a_{k_1,j_1}, \ldots, a_{k_q,j_q}$ jest układem niezerowych elementów macierz A, z których żadne dwa nie leżą w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie. Zatem $M \geq p + q = N$.

59. Oznaczmy przez A wyjściową macierz. Niech N będzie minimalną ilości wierszy i kolumn macierzy A zawierających wszystkie niezerowe elementy. Z założeń wynika, że $N \leq (m-s)+(m-t) = 2m-(s+t) < 2m-m = m$. Korzystając z poprzedniego zadania otrzymujemy zatem, że maksymalna ilość niezerowych elementów macierzy, z których żadne dwa nie stoją w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie, jest mniejsza niż m. Zatem każde wyrażenie postaci $a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{m,\sigma(m)}$ jest równe 0, o ile σ jest dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, m\}$. Stąd $\det A = \sum_\sigma \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{m,\sigma(m)} = 0$.

60. Dla każdej pary i, j przez b_{ij} oznaczmy ilość elementów zbioru $X_i \cap Y_j$. Z twierdzenia Birkhoffa wynika, że macierz $B = (b_{ij})$ jest sumą n macierzy permutacji. W szczególności istnieje permutacja σ taka, że $b_{i,\sigma(i)} > 0$. To oznacza, że istnieją x_i takie, że $x_i \in X_i$ i $x_i \in Y_{\sigma(i)}$.

61. 1, 2, 12, 576.