

## Matematyka dyskretna II

### Zestaw 4 – Rekurencja

1. Znaleźć wzór jawny ciągu  $(a_n)$  spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

- (a)  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, a_0 = 2, a_1 = 5;$
- (b)  $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, a_0 = 0, a_1 = 1;$
- (c)  $a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, a_0 = 6, a_1 = 5, a_2 = 16.$

2. Znaleźć wzór jawny ciągu  $(a_n)$  spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

- (a)  $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + n + 2, a_0 = 0;$
- (b)  $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 1, a_0 = 0, a_1 = 1.$
- (c)  $a_{n+1} - 2a_n = n^2 + 2n - 2, a_0 = 1.$
- (d)  $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = -6n + 1, a_0 = 3, a_1 = 5.$

3. Udowodnić następujące własności ciągu Fibonacciego:

- (a)  $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n-1};$
- (b)  $\sum_{i=0}^n F_i = F_{n+2} - 1;$
- (c)  $F_{n+m} = F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1}.$

4. Na ile sposobów można pokonać  $n$  stopni, jeżeli możemy poruszać się o 1 bądź 2 stopnie do góry?

5. Ile można utworzyć  $n$ -elementowych ciągów złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedyńki nie stały obok siebie?

6. Ile można utworzyć  $n$ -elementowych ciągów złożonych z 0, 1 i 2 tak, by żadne dwie jedyńki ani żadne dwie dwójki nie stały obok siebie?

7. Niech  $D_n$  oznacza ilość permutacji  $n$ -elementowych bez punktów stałych. Udowodnić, że  $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$  dla  $n > 2$  i wywnioskować stąd, że  $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ .

8. Na ile maksymalnie części można podzielić płaszczyznę przy pomocy  $n$  okręgów?

9. Wyznaczyć wzór na sumę czwartych potęg liczb naturalnych od 1 do  $n$ .

10. Znaleźć wzór jawny ciągu  $(a_n)$  spełniającego następujące równanie rekurencyjne:

- (a)  $(n-1)a_n - na_{n-1} = 3n^2(n-1), a_1 = 3;$
- (b)  $a_{n+2} = 5\frac{n+1}{n+2}a_{n+1} - 6\frac{n}{n+2}a_n, a_1 = 5, a_2 = 6, 5.$