Matematyka dyskretna II
Zestaw 6 – Podziały

W poniższych zadaniach stosujemy następujące oznaczenia:

- $P(n)$ – ilość podziałów liczby n.
- $P(n,k)$ – ilość podziałów liczby n na dokładnie k części.
- $p(n,k)$ – ilość podziałów liczby n na co najwyżej k części.
- $P(n,k,l)$ – ilość podziałów liczby n na dokładnie k części, z których każda jest nie większa niż l.
- $p(n,k,l)$ – ilość podziałów liczby n na co najwyżej k części, z których każda jest nie większa niż l.

1. Wyliczyć $p(n,1,l)$, $p(n,2,l)$ i $p(n,3)$.

2. Wyliczyć $P(n,n-2)$.

3. Wykorzystując wzór

$$P(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left[P\left(n-\frac{m(3m-1)}{2}\right)+P\left(n-\frac{m(3m+1)}{2}\right)\right],$$

gdzie $P(n)=0$ dla $n<0$, $P(0)=1$, wyliczyć wartości $P(n)$, $n\le 20$.

4. Udowodnić, że

$$\frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \le P(n,k) \le \binom{n-1}{k-1}.$$

5. Udowodnić następujące równości.

(a) $P(n+k,k)=p(n,k)$.

(b) $P(n,3)=P(2n,3,n-1)$.

(c) $P(2n,n)=P(n)$.

(d) $P(n,k)=P(n-1,k-1)+P(n-k,k)$.

6. Udowodnić, że ilość podziałów liczby n na parzyste części równa się liczbie podziałów liczby n, w których każda liczba występuje parzystą ilość razy.

7. Pokazać, że liczba podziałów liczby n takich, że żadna część nie pojawia się więcej niż $k-1$ razy, jest równa liczbie podziałów liczby n na części niepodzielne przez k.

8. Niech $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ i $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ będą dwoma podziałami. Przez $\lambda + \mu$ oznaczać będziemy podział $(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots)$, natomiast przez $\lambda \circ \mu$ podział otrzymany przez uporządkowanie ciągu $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots)$. Udowodnić, że

$$(\lambda + \mu)^{\sim} = \lambda^{\sim} \circ \mu^{\sim},$$

gdzie $\nu^{\sim}$ oznacza podział dualny do podziału ν.

9. Niech $F(t)$ oznacza funkcję generującą ciągu $(P(n))$, zaś $G(t)$ funkcję generującą ciągu $(Q(n))$, gdzie $Q(n)$ oznacza ilość podziałów liczby n na różne części. Udowodnić, że $F(t) = G(t)F(t^2)$. Wykorzystać tę równość do udowodnienia wzoru

$$P(n) = Q(n) + Q(n-2)P(1) + Q(n-4)P(2) + Q(n-6)P(3) + \cdots .$$

Uzasadnić powyższy wzór w bezpośredni sposób.