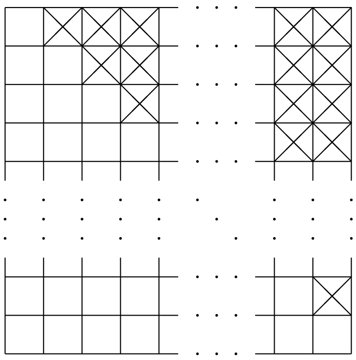
Matematyka dyskretna II
Zestaw 7 – Liczby Stirlinga, Bella i wielomiany Gaussa

1. Wyliczyć $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ i $\left\{ {n \atop n-2} \right\}$.

2. Pokazać, że

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left\{ {j \atop k-1} \right\}.$$

3. Udowodnić, że wielomian wieżowy następującej szachownicy wymiaru $n \times n$



jest równy

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} t^k.$$

4. Niech

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} t^k$$

będzie wielomianem Stirlinga. Udowodnić, że:

- $P_n(t) = t[P'_{n-1}(t) + P_{n-1}(t)]$;
- $P_n(t) = t \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} P_j(t)$;
- $P'_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} P_j(t)$.

5. Niech $f(n,k)$ oznacza ilość tych k-elementowych podzbiorów zbioru liczb naturalnych od 1 do n, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb naturalnych. Udowodnić, że

$$f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}.$$

6. Udowodnić, że $b_n \leq n!$, gdzie b_n oznacza n-tą liczbę Bella.

7. Udowodnić następujące własności wielomianów Gaussa.

- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{0} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n} = 1$.
- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{n-m}$.
- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{m} + t^{n-m}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{m-1}$.
- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m} = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{m-1} + t^{m}\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n-1}{m}$.
- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m}$ jest wielomianem stopnia $(n-m)m$.
- $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m}(1) = \binom{n}{m}$.

8. Niech $G(k,l)$ będzie funkcją generującą dla ciągu $p(n,k,l)$. Pokazać, że $G(k,l) = \genfrac{[}{]}{0pt}{}{k+l}{l}$.

9. Udowodnić, że ilość m-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{F}_q^n$ jest równa $\genfrac{[}{]}{0pt}{}{n}{m}(q)$.

10. Udowodnić, że

$$\prod_{i=0}^{n-1}(1+q^i) = \sum_{r=0}^{n} q^{\frac{r(r-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}.$$