Matematyka dyskretna II
Zestaw 8 – Twierdzenie Halla

1. Wyliczyć liczbę kwadratów łacińskich rozmiaru 1, 2, 3 i 4.

2. Ile systemów reprezentantów posiada rodzina $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,4\}$?

3. Niech $(X_1,\dots,X_n)$ oraz $(Y_1,\dots,Y_n)$ będą dwoma rozkładami zbioru A na n równolicznych rozłącznych podzbiorów. Udowodnić, że istnieje system reprezentantów x_1, ..., x_n wspólny dla obu rozkładów, tzn. dla pewnej permutacji σ zbioru $\{1,\dots,n\}$ mamy $x_i \in X_i$ oraz $x_i \in Y_{\sigma(i)}$.

4. Niech $A=(a_{ij})$ będzie $n\times n$ macierzą taką, że istnieje μ o własności $\sum_{i=1}^n a_{i,j}=\mu$ dla każdego j i $\sum_{j=1}^n a_{i,j}=\mu$ dla każdego i. Udowodnić, że macierz A jest kombinacją liniową macierzy permutacji, tzn. istnieją macierze permutacji A_1, ..., A_k oraz liczby rzeczywiste λ_1, ..., λ_k takie, że $\lambda_1 A_1+\cdots+\lambda_k A_k=A$.

5. Obliczyć wymiar podprzestrzeni liniowej w $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ rozpiętej przez macierze permutacji.

6. Udowodnić, że w dowolnej macierzy o współczynnikach liczbowych minimalna ilość kolumn i wierszy zawierających wszystkie niezerowe elementy jest równa maksymalnej ilości niezerowych elementów, z których żadne dwa nie znajdują się w jednym wierszy i w jednej kolumnie.

7. Udowodnić, że jeśli w macierzy kwadratowej wymiaru m jest zawarta zerowa podmacierz wymiaru $s\times t$, gdzie $s+t>m$, to wyznacznik tej macierzy jest równy 0.

8. Niech $(A_1,\dots,A_n)$ będzie rodziną podzbiorów zbioru $\{1,\dots,n\}$. Niech $a_{i,j}=1$, gdy $i\in A_j$ oraz $a_{i,j}=0$ w przeciwnym wypadku. Załóżmy, że macierz $(a_{i,j})$ jest odwracalna. Pokazać, że rodzina $(A_1,\dots,A_n)$ posiada system reprezentantów.