O pewnej własności stabilnych równoważności typu Mority

na podstawie referatu Zygmunta Pogorzałego

9 marca 2000

1. Wstęp

Przez cały referat K będzie ustalonym ciałem, zaś przez algebrę będziemy rozumieć skończenie wymiarową łączną K-algebrę z 1. Jeśli C jest algebrą, to przez $\mathrm{mod}(C)$ oznaczamy kategorię wszystkich prawych C-modułów skończenie wymiarowych nad K. Niech $\mathcal{P}$ oznacza dwustronny ideał w $\mathrm{mod}(C)$ złożony z tych morfizmów które faktoryzują się przez moduły projektywne. Wtedy kategorię $\mathrm{mod}(C)/\mathcal{P}$ oznaczać będziemy przez $\underline{\mathrm{mod}}(C)$.

Jeśli A i B są algebrami, to mówimy, że istnieje **stabilna równoważność typu Mority**, jeśli istnieją A-B-bimoduł N i B-A-bimoduł M takie, że

(1) N jest projektywnym lewym A-modułem i projektywnym prawym B-modułem;

(2) M jest projektywnym prawym B-modułem i projektywnym lewym A-modułem;

(3) $N \otimes_B M \simeq A \oplus P$ jako A-bimoduł, gdzie P jest projektywnym A-bimodułem;

(4) $M \otimes_A N \simeq B \oplus Q$ jako B-bimoduł, gdzie Q jest projektywnym B-bimodułem;

(5) funktor $- \otimes_A N : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$ indukuje stabilną równoważność $\underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(B)$.

Jeśli spełnione są tylko warunki (1)-(4), to mówimy o **słabej Morita równoważności**.

Jeśli C jest algebrą, to przez C^o oznaczać będziemy algebrę dualną, zaś przez $C^e := C^o \otimes_K C$ algebrę obejmującą. Zauważmy, że C-bimoduły możemy utożsamiać z C^e-modułami. Ogólnie prawe $A^o \otimes_K B$-moduły odpowiadają A-B-bimodułom.

Jeśli A jest algebrą samoinjektywną, to funktor $\Omega_A : \underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A)$ jest równoważnością. Ponadto mamy algebrę kohomologii Hochszilda $HH(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A, A)$ wraz z mnożeniem indukowanym przez składanie rozszerzeń.

Lemat. *Jeżeli C jest samoinjektywną K-algebrą, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $M, N \in \mathrm{mod}(C)$ istnieje izomorfizm $\mathrm{Ext}^n_C(M, M) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_C(\Omega^n(M), N)$ jako K-przestrzeni liniowych.*

Zdefiniujmy algebrę $\underline{HH}(C) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \underline{\mathrm{Hom}}_{C^e}(\Omega^i C^e(C), C)$ wraz z mnożeniem $*$ danym wzorem

$$\underline{g} * \underline{f} = g \cdot \Omega^m_{C^e}(\underline{f}),$$

jeśli $\underline{f} \in \underline{\mathrm{Hom}}(\Omega^n_{C^e} C, C)$ i $\underline{g} \in \underline{\mathrm{Hom}}_{C^e}(\Omega^m_{C^e}(C), C)$.

Lemat. *K-algebry $HH(C)$ i $\underline{HH}(C)$ są izomorficzne.*

2. Motywacje i główny wynik

Twierdzenie (Richard)**.** *Jeżeli dwie algebry A i B są pochodnie równoważnie, to $HH(A) \simeq HH(B)$.*

Odtąd zakładamy, że wszystkie badane algebry są samoinjektywne oraz ich centra są izomorficzne z K.

Problem. Jeśli algebra jest A stabilnie równoważna z algebrą B, algebra C stabilnie równoważna z algebrą D, to czy $A \otimes_K B$ jest stabilnie równoważna z $C \otimes_K D$? Prostsza wersja, czy A^e jest stabilnie równoważna z B^e?

Oznaczmy przez $\underline{\mathrm{mod}}_A(A^e)$ pełną podkategorię w kategorii $\underline{\mathrm{mod}}(A^e)$ rozpiętą przez obiekty A, $\Omega_{A^e}(A)$, …, $\Omega^n_{A^e}(A)$, ….

Stwierdzenie. *Jeśli algebry A i B są samoinjektywne i słabo Morita równoważne, to istnieje równoważność $F : \underline{\mathrm{mod}}_A(A^e) \to \underline{\mathrm{mod}}_B(B^e)$ taka, że $F(A) \simeq B$, $F(\Omega^n_{A^e}(A)) \simeq \Omega^n_{B^e}(B)$ w $\underline{\mathrm{mod}}(B^e)$.*

Dowód. Dla dowodu trzeba rozważyć funktor indukowany przez $M \otimes_A - \otimes_A N : \mathrm{mod}(A^e) \to \mathrm{mod}(B^e)$ i wykorzystać fakt, że bimoduły A, $\Omega_{A^e} A$, …, są projektywne jako prawe i lewe A-moduły. □

Stąd mamy twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech A, B będą dwoma samoinjektywnymi K-algebrami, których centra są izomorficzne z K. Jeżeli A i B są słabo Morita równoważne, to $HH(A) \simeq HH(B)$.*

Niech A i B będą samoinjektywnymi K-algebrami, które są słabo Morita równoważne poprzez bimoduły ${}_BM_A$ i ${}_AN_B$. Czy jest naturalna maksymalna podkategoria w $\underline{\mathrm{mod}}(A^e)$, na której potrafimy skonstruować stabilną równoważność z jej odpowiednikiem w $\underline{\mathrm{mod}}(B^e)$?

A-B-bimoduł X nazywamy **podwójnie projektywnym**, o ile moduły ${}_AX$ i X_B są projektywne. Przez $\mathrm{dpmod}(A^o \otimes_K B)$ oznaczać będziemy kategoria podwójnie projektywnych A-B-bimodułów, zaś przez $\underline{\mathrm{dpmod}}(A^o \otimes_K B)$ stabilną kategorię podwójnie projektywnych A-B-bimodułów. Wtedy mamy równoważność $\underline{\mathrm{dpmod}}(A^e) \to \underline{\mathrm{dpmod}}(B^e)$.

Stwierdzenie. *Jeśli A jest algebrą samoinjektywną i $\mathcal{C}$ składową w Γ_{A^e}, to następujące warunki są równoważne:*

(1) *istnieje wierzchołek podwójnie projektywny w $\mathcal{C}^s$;*

(2) *$\mathcal{C}$ składa się tylko z wierzchołków podwójnie projektywnych.*

3. Uwagi

Twierdzenie (Richard)**.** *Jeśli A i B są samoinjektywnymi K-algebrami skończenie wymiarowymi, które są pochodnie równoważne, to A i B są stabilnie równoważne typu Morita.*

Przykład. Jeśli A jest algebrą samoinjektywną skończonego typu reprezentacyjnego typu$\mathbb{A}_n$ i B jest algebrą samoinjektywną stabilnie równoważną z A, to algebry A i B są stabilnie równoważne typu Morita.