O teorii koreprezentacji koalgebr

na podstawie referatu Daniela Simsona

17 października 2000 roku

1 Wstęp

Niech K będzie ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym. Jeśli C jest koalgebrą nad K z komnożeniem $\Delta : C \to C \otimes C$ i kojedynką $\varepsilon : C \to K$, to przez $C\,\mathrm{comod}$ oznaczać będziemy kategorię lewych skończenie wymiarowych C-komodułów, zaś przez $\mathrm{comod}\, C$ kategorię prawych skończenie wymiarowych C-komodułów. Przypomnijmy, że struktura lewego C-komodułu jest zadana na przestrzeni liniowej M przez odwzorowanie $\delta : M \to C \otimes M$

Dokładny K-liniowy funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pomiędzy K-kategoriami nazywamy reprezentacyjnym włożeniem, jeśli funktor F przeprowadza obiekty nierozkładalne w obiekty nierozkładalne i odbija klasy izomorfizmów. Algebrę R nazywamy dziką, gdy istnieje reprezentacyjne włożenie kategorii $\mathrm{mod}\, \Gamma_3(K)$ w kategorię $\mathrm{mod}\, R$, gdzie

$$\Gamma_3(K) = \begin{pmatrix} K & K^3 \\ 0 & K \end{pmatrix}.$$

Algebra R jest skończonego typu reprezentacyjnego, gdy istnieje skończenie wiele klas izomorfizmów nierozkładalnych R-modułów. Algebra R jest oswojona, gdy dla dowolnej liczby naturalnej $d \geq 1$ istnieją $K[t]$-R-bimoduły M_1, $\ldots$, M_{r_d} takie, że dla dowolnego nierozkładalnego R-modułu X wymiaru d istnieją $j \in \{1, \ldots, r_d\}$ i $\lambda \in K$ takie, że $X \simeq K[t]/(t - \lambda) \otimes_{K[t]} M_j$.

Łatwo jest zdefiniować dzikość dla K-kategorii abelowych, dla których przestrzenie endomorfizmów są skończenie wymiarowe nad K. Problemy pojawiają się przy próbie zdefiniowania typu oswojonego.

Twierdzenie. *Dla dowolnej K-kategorii abelowej $\mathcal{A}$ ze skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, która jest noetherowsko-artinowska, istnieją pełne podkategorie $\mathcal{A}_\beta$, $\beta \in \Omega$, gdzie Ω jest zbiorem skierowanych, oraz system odwrotny $\{R_\beta, u_{\beta,\gamma} R_\gamma \to R_\beta\}$ surjekcji skończenie skierowanych K-algebr takich, że spełnione są następujące warunki.*

1. *Kategoria $\mathcal{A}$ jest sumą skierowaną kategorii $\mathcal{A}_\beta$.*

2. *Dla każdego β kategorie $\mathcal{A}_\beta$ i $\operatorname{mod} R_\beta$ są równoważne.*

3. *Mamy diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\beta & \xrightarrow{\simeq} & \operatorname{mod} R_\beta \\ {\scriptstyle i_{\beta,\gamma}}\downarrow & & {\scriptstyle u^*_{\beta,\gamma}}\downarrow \\ \mathcal{A}_\gamma & \xrightarrow{\simeq} & \operatorname{mod} R_\gamma \end{array},$$

   gdzie $i_{\beta,\gamma}$ jest naturalnym włożeniem.

4. *$R = \varprojlim\{R_\beta, u_{\beta,\gamma}\}$ jest K-algebrą pseudozwartą, tzn. posiada topologię zadaną przez koskończone dwustronne ideały, która jest Hausdorffa i zupełna.*

Kategoria komodułów ma następujące własności. Niech C będzie koalgebrą. Wtedy $C \operatorname{comod}$ jest abelową K-kategorią noetherowsko-artinowską. Istnieje dualność pomiędzy kategoriami $C \operatorname{comod}$ i $\operatorname{comod} C$. Dowolny C-komoduł jest sumą skierowaną skończenie wymiarowych C-podkomodułów. Przestrzeń $C^* := \operatorname{Hom}_K(C, K)$ jest pseudozwartą K-algebrą w topologii $C^* = \varprojlim_\beta C^*/H_\beta^\perp$, gdzie $C = \bigcup_\beta H_\beta$ dla skierowanej sumy skończenie wymiarowych podkoalgebr H_β. Wiadomo, że kategoria wszystkich lewych C-komodułów jest równoważna z kategorią dyskretnych prawych C^*-modułów, tzn. takich modułów, które mają topologię dyskretną. Ta kategoria jest natomiast dualna z kategorią lewych pseudozwartych C^*-modułów.

2 Kołczany i koalgebry dróg

Niech $Q = (Q_0, Q_1)$ będzie lokalnie skończonym kołczanem. Dla każdej liczby naturalnej m oznaczmy przez Q_m zbiór wszystkich dróg długości m w kołczanie Q. Dla każdego wierzchołka i kołczanu Q oznaczmy przez η_i długości trywialną w wierzchołku i. Niech $KQ := \bigoplus_{m=0}^\infty KQ_m$. Wtedy KQ jest algebrą z gradacją. Gdy zbiór Q_0 jest skończony, to algebra ta ma jedynkę. W algebrze KQ wprowadzamy strukturę koalgebry wzorami $\varepsilon(\omega) = 1$, gdy ω jest drogą trywialną, oraz $\varepsilon(\omega) = 0$ w przeciwnym wypadku. Komnożenie $\Delta(\omega)$ definiujemy jako sumę $\sum \omega_1 \otimes \omega_2$ po wszystkich możliwych przedstawieniach $\omega = \omega_1\omega_2$.

Dla dowolnego kołczanu przez Q^* oznaczamy kołczan przeciwny do Q. Reprezentację (V_x, V_α) kołczanu Q nazywamy nilpotentną, gdy istnieje liczba naturalna m taka, że $V_\omega = 0$ dla każdej drogi ω długości m.

Twierdzenie. *Kategorie* KQ^* comod *i kategoria nilpotentnych reprezentacji skończonej długości reprezentacji kołczanu* Q *są równoważne. W szczególności jeśli w kołczanie* Q *nie ma zorientowanych cykli, to kategoria* KQ^* comod *jest równoważna z kategorią reprezentacji skończonej długości kołczanu* Q*.*

Podobne twierdzenie można udowodnić dla kołczanów z relacjami.

Koalgebrę C nazwiemy koalgebrą dzikiego typu komodułowego wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje reprezentacyjne włożenie $\Gamma_3(K)\,\mathrm{comod} \to C\,\mathrm{comod}$. Można pokazać, że jest to równoważne istnieniu reprezentacyjnego włożenia $K\langle X, Y\rangle\,\mathrm{comod}$ w $C\,\mathrm{comod}$.

Zauważmy, że cokół koalgebry C traktowanej jako lewy C-komoduł jest sumą prostą prostych C-komodułów $S(j)$, $j \in I_C$, przy czym otrzymujemy w ten sposób wszystkie klasy izomorfizmów prostych C-komodułów. Koalgebrę C nazwiemy bazową, gdy każdy moduł występuje z krotnością jeden w tym rozkładzie. Można pokazać, że dla każdej koalgebry C istnieje dokładnie jedna koalgebra bazowa, której kategoria komodułów jest równoważna z kategorią C-komodułów.

Niech $K_0(C)$ będzie grupą Grothendiecka $K_0(C\,\mathrm{comod})$. Mamy wtedy funkcję $\mathbf{dim} : K_0(C) \to \mathbb{Z}^{(I_C)}$, która zadaje izomorfizm. Koalgebra bazowa C jest oswojonego typu komodułowego, jeśli dla dowolnego wektora $\mathbf{d} \in K_0(C)$ istnieją C-$K[t]$-bimoduły $M_1, \ldots, M_{r_\mathbf{d}}$ wolne skończenie generowana nad $K[t]$ takie, że dla dowolnego nierozkładalnego C-komodułu X o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$ istnieją j i λ takie, że $X \simeq M_i \otimes_{K[t]} K[t]/(t-\lambda)$.

Można pokazać, że koalgebra KQ^* jest oswojona, gdy kołczan Q jest kołczanem Dynkina lub lokalnie kołczanem Dynkina, a więc wtedy i tylko wtedy, gdy jego forma jest słabo dodatnia.

Twierdzenie. *Dla każdej kategorii* $\mathcal{A}$ *jak wyżej istnieje dokładnie jedna koalgebra* C *taka, że* $\mathcal{A}$ *jest równoważna z* C comod*.*

Wykorzystując to twierdzenie możemy przenieść definicje dzikości i oswojoności na dowolne kategorie.