Wyniki konferencji ICRA 9 w Pekinie

na podstawie referatu Zygmunta Pogorzałego

24 października 2000

Referat oparty jest na wystąpieniu Davida Bensona zatytułowanym „The nucleus, and extensions between modules for a finite group".

Niech G będzie skończoną grupą i k ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki p, przy czym zakładamy, że p dzieli rząd grupy G.

Definiujemy algebrę $H^*(G,k)$ jako $\mathrm{Ext}^*_{kG}(k,k)$. Jest ona skończenie generowaną przemienną algebrą z gradacją. Przez V_G oznaczać będziemy spektrum maksymalne algebry $H^*(G,k)$. Jeśli M jest skończenie generowanym kG-modułem, to mamy odwzorowanie $-\otimes_k M : H^*(G,k) \to \mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$. Przez $I_G(M)$ oznaczymy jądro tego homomorfizmu, zaś przez $V_G(M)$ rozmaitość wyznaczoną przez ten ideał.

Rozmaitość ta ma następujące własności:

- Każda domknięta podrozmaitość jednorodna w V_G jest postaci $V_G(M)$ dla pewnego M.
- $V_G(M \oplus N) = V_G(M) \cup V_G(N)$.
- $V_G(M \otimes N) = V_G(M) \cap V_G(N)$.
- $V_G(M^*) = V_G(M)$.
- $V_G(M) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy moduł M jest projektywny.

Z powyższych własności wynika, że moduł $M \otimes_k N$ jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy $V_G(M) \cap V_G(N) = \{0\}$. Wiadomo, że gdy moduł $M \otimes_k N$ jest projektywny, to $\hat{\mathrm{Ext}}^*_{kG}(M,N) = \hat{H}(G, \mathrm{Hom}_k(M,N)) = 0$. Nie jest prawdą, że gdy $\hat{\mathrm{Ext}}^*_{kG}(M,N) = 0$, to $V_G(M) \cap V_G(N) = 0$.

Definiujemy nucleus Y_G przez następujące trzy równoważne definicje.

- Y_G jest sumą mnogościową $V_G(M) \cap V_G(N)$, gdzie M i N należą do bloku głównego oraz $\hat{\mathrm{Ext}}^*_{kG}(M,N) = 0$.

- Suma mnogościowa $V_G(M)$, gdzie M należy do bloku głównego oraz $\hat{H}^*(G, M) = 0$.
- Suma mnogościowa obrazów $\mathrm{Res}^*_{G,H} : V_H \to V_G$, gdzie H przebiega te podgrupy grupy G, dla których centralizator grupy G w H nie jest p-nilpotentny.

Tłusta podkategoria $\mathcal{C}$ w $\underline{\mathrm{mod}}\, kG$ to trójkątna podkategoria, która jest zamknięta ze względu na składniki proste.

Stwierdzenie (Benson, Carlson, Richard)**.** *Niech G będzie skończoną grupą. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Pełna podkategoria w $\underline{\mathrm{mod}}\, kG$ składająca się z modułów należących do bloku głównego jest generowana jako trójkątna kategoria przez moduł trywialny k.*

(2) *Jeżeli M jest skończenie generowanym kG-modułem, dla którego mamy równość $\hat{H}^*(G, M) = 0$, to żaden nieprojektywny składnik prosty w M nie należy do bloku głównego.*

(3) *Każdy element rzędu p w grupie G ma p-nilpotentny centralizator.*

Można pokazać, że Y_G jest domkniętą jednorodną podrozmaitością w $V_G(k)$. Ponadto Y_G jest trywialne dokładnie wtedy, gdy zachodzą równoważne warunki stwierdzenia.