Wyniki konferencji ICRA 9 w Pekinie

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

24 października 2000

Referat jest oparty na wystąpieniu Clausa M. Ringela zatytułowanym „Krull–Remak–Schmidt fails for artinian modules over local rings".

Twierdzenie (Krull–Remak–Schmidt)**.** *Niech R będzie pierścieniem z 1, zaś M_i, $i = 1, \dots, m$, N_j, $j = 1, \dots, n$, modułami nierozkładalnymi skończonej długości nad R. Jeśli $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m \simeq N_1 \oplus \cdots N_n$, to $m = n$ i istnieje permutacja $\sigma \in S_n$ taka, że $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$.*

W 1932 roku Krull zadał pytanie czy wystarczy by moduły M_i, N_j były artinowskie. W 1995 roku Facchini–Herbera–Levy–Vamos podali odpowiedź negatywną. W 2000 roku Pimenov–Yakovlev podali inne przykłady, które są prostsze. W 1998 Facchini zapytał czy twierdzenie Krulla–Remaka–Schmidta zachodzi dla modułów artinowskich nad pierścieniami lokalnymi. Ringel pokazał, że nie.

Konstrukcja Pimenova–Yakovleva opierała się na następującej obserwacji. Niech $\mathcal{F}$ będzie kategorią beztorsyjnych grup abelowych skończonej rangi, które są podzielne przez prawie wszystkie liczby pierwsze. Grupę F nazywamy podzielną przez liczbę p, gdy $pF = F$. Wiadomo, że twierdzenie Krulla–Remaka–Schmidta nie zachodzi w kategorii $\mathcal{F}$.

Ustalmy $F \in \mathcal{F}$. Niech $0 \to F \to \mathbb{Q}^n \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Q}^n/F \to 0$ będzie rezolwentą injektywną modułu F. Wiadomo, że $\mathbb{Q}^n/F$ jest skończoną sumą grupy torsyjnych. Odwzorowanie γ możemy traktować jako moduł nad pierścieniem $S := \begin{bmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ poprzez wzór :

$$\begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ w_2 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 v \\ \gamma(w_2 v) + zc \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy w ten sposób funktor $\Phi : \mathcal{F} \to \operatorname{Mod} S$, którego obraz zawarty jest w podkategorii modułów artinowskich. Funktor Φ jest pełny i wierny. Stąd wynika, że twierdzenie Krulla–Remaka–Schmidta nie zachodzi dla modułów artinowskich nad pierścieniem S.

Ustalmy wielomiany nierozkładalne $p_1, \ldots, p_n$ postaci $p_i = X - a_i$, $a_i \in K$, $i = 1, \ldots, n$. Niech $\mathcal{F}$ oznacza kategorię zredukowanych beztorsyjnych $K[X]$-modułów skończonej rangi podzielnych przez wszystkie wielomiany nierozkładalne spoza zbioru $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Moduł F nazywamy zredukowanym, jeśli $K(X)$ nie jest podmodułem modułu F.

Niech V_i oznacza lokalizację pierścienia wielomianów $K[X]$ względem ideału (p_i). Definiujemy pierścień S wzorem

$$S = \begin{bmatrix} K(X) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ K(X) & V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ K(X) & 0 & V_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ K(X) & 0 & \cdots & 0 & V_n \end{bmatrix}.$$

Z modułem F stowarzyszamy $\gamma : I(F) \to C$,gdzie $I(F) = K(X)^m$ jest powłoką injektywną, zaś $C = I(F)/F$ jest skończona sumą prostą $\bigoplus_{i=1}^n N_i$. Epimorfizm γ możemy tratować jako moduł nad pierścieniem S. Otrzymujemy w ten sposób funktor $\Phi_0 : \mathcal{F} \to \operatorname{Mod} S$.

Załóżmy, że ciało K jest izomorficzne z $K(X)$ (np. $K = k(t_1, t_2, \ldots)$). Mamy odwzorowanie $\epsilon_i : V_i \to K(X)$ będący złożeniem epimorfizmu $V_i \to K$ i izomorfizmu $K \simeq K(X)$. Wtedy $\operatorname{Ker} \epsilon_i = (p_i)$. Przez R oznaczymy zbiór tych macierzy

$$\begin{bmatrix} a & & & \\ a_1 & b_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & b_n \end{bmatrix} \in S,$$

dla których $\epsilon_i b_i = a$. R jest pierścieniem lokalnym, którego jedyny $J(R)$ ideał maksymalny jest zadany przez warunek $a = 0$. Mamy włożenie $i : \operatorname{Mod} S \to \operatorname{Mod} R$. Niech $\Phi = i \circ \Phi_0$. Można pokazać, że obraz funktora Φ jest zawarty w modułach artinowskich.

Niech t_i będzie macierzą powyższej postaci, dla której $a_i = 1$, zaś pozostałe współczynniki są równe 0. Jeśli $M \in \operatorname{Mod} R$, to $\operatorname{rad} M := J(R)M \subset \operatorname{Ker} ft_i$, gdzie f_i jest odwzorowaniem indukowanym przez mnożenie przez t_i. Niech $\Psi(M) = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker}(t_i)/\operatorname{rad} M$. Okazuje się, że $\Psi(M)$ ma strukturę $K[X]$-modułu i Ψ można rozszerzyć do funktora z $\operatorname{Mod} R$ do $\operatorname{Mod} K[X]$.

Twierdzenie. *Mamy następujące własności.*

(1) $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$.

(2) *Jeśli* $F, F' \in \mathcal{F}$ *i* $f : \Phi(F) \to \Phi(F')$, $\Psi(f) = 0$, *to wtedy* $\operatorname{Im} f$ *jest półprosty.*

Można pokazać, że moduły proste nie należą do obrazu Φ. Z powyższego twierdzenia wynika, że przestrzeń $\mathrm{Hom}_R(\Phi(F), \Phi(F'))$ jest sumą prostą przestrzeni $\Phi\,\mathrm{Hom}_{K[X]}(F, F')$ i podprzestrzeń homomorfizmów faktoryzujących się przez moduły półproste.

Wniosek. *Funktor $\Phi : \mathcal{F} \to \mathrm{Mod}\, R$ zachowuje nierozkładalność i nieizomorficzność. W szczególności twierdzenie Krulla–Remaka–Schmidta nie zachodzi dla modułów artinowskich nad R, bo nie zachodzi w $\mathcal{F}$.*

Ważne rolę odgrywa fakt, że jeśli $f \in \mathrm{End}\, M$ i $\mathrm{Im}\, f$ jest półprosty, to $f \in \mathrm{rad}\,\mathrm{End}_R(M)$ dla $M \in \mathrm{Im}\,\Phi$.