Algebry skończonego typu reprezentacyjnego – nakrycia, standardowość.

na podstawie referatu Piotra Dowbora

16 listopada 2000 roku

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Przez algebrę rozumieć będziemy skończenie wymiarową i bazową K-algebrę. Dla ustalonej algebry Λ $\operatorname{Mod}\Lambda$ oznacza kategorię prawych Λ-modułów, zaś $\operatorname{mod}\Lambda$ podkategorię modułów skończenie generowanych. Przez $\operatorname{ind}\Lambda$ oznaczymy podkategorię skończenie generowanych modułów nierozkładalnych, natomiast przez $\operatorname{proj}\Lambda$ podkategorię skończenie generowanych nierozkładalnych modułów projektywnych.

Z algebrą Λ skończonego typu reprezentacyjnego możemy stowarzyszyć algebrę Auslandera $E = E_\Lambda := \operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{X\in\operatorname{ind}\Lambda} X)$. Algebra E jest bazowa. Kołczan Gabriela Q_E algebry E jest kołczanem Auslander–Reiten algebry Λ. Algebrę Λ można odtworzyć z E w następujący sposób. Dla dowolnej algebry E niech $\Lambda_E := \operatorname{End}(\bigoplus_{P\in\operatorname{proj} E, \operatorname{pd}_E \operatorname{rad} P\leq 1} P)$. Wtedy $\Lambda \simeq \Lambda_E$ o ile $E := E_\Lambda$.

Algebrę Λ nazywamy standardową, gdy $\operatorname{ind}\Lambda \simeq k(\Gamma_\Lambda)$, gdzie $k(\Gamma_\Lambda)$ oznacza kategorię sieciową kołczanu Γ_Λ. Chcemy pokazać, że dla każdej algebry skończonego typu Λ reprezentacyjnego istnieje standardowa algebra $\overline{\Lambda}$ taka, że $\Gamma_\Lambda \simeq \Gamma_{\overline{\Lambda}}$ i $\overline{\Lambda}$ jest degeneracją algebry Λ.

1 Lokalnie skończone kategorie

K-kategorię Λ nazwiemy lokalnie skończenie wymiarową, gdy dla każdego x w Λ pierścień $\Lambda(x,x)$ jest lokalny, jeśli $x \simeq y$, to $x = y$ oraz dla wszystkich x i y mamy $\dim_K \Lambda(x,y) < \infty$. Gdy dodatkowo spełnione są warunki $\sum_y \dim_K \Lambda(x,y) < \infty$ i $\sum_y \dim_K \Lambda(y,x) < \infty$ dla każdego x, to kategorię Λ nazywamy lokalnie ograniczoną. Przez $\operatorname{Mod}\Lambda$ rozumiemy kategorię funktorów z Λ^{op} do kategorii przestrzeni liniowych. Podobnie jak powyżej możemy zdefiniować kategorie $\operatorname{mod}\Lambda$, $\operatorname{ind}\Lambda$ i $\operatorname{proj}\Lambda$. Skończone lokalnie ograniczone kategorie odpowiadają algebrom z ustalonym wyborem idempotentów prymitywnych.

Lokalnie ograniczona kategoria Λ jest lokalnie skończonego typu reprezentacyjnego, jeśli dla każdego x istnieje skończenie wiele, z dokładnością do izomorfizmu, $M \in \operatorname{ind} \Lambda$ dla których $M(x) \neq 0$.

Kategorię Λ możemy włożyć w kategorię $\operatorname{mod} \Lambda$ przy pomocy włożenia Yonedy, $x \mapsto \Lambda(-, x)$. Wtedy $\Lambda \simeq \operatorname{proj} \Lambda$. Gdy kategoria Λ jest lokalnie ograniczona, to także kategoria $\operatorname{inj} \Lambda := \{D\Lambda(x, -)\}$ jest izomorficzna z Λ.

Załóżmy, że kategoria Λ jest lokalnie ograniczona. Gdy Λ jest skończona, to Λ jest lokalnie reprezentacyjnie skończona wtedy i tylko wtedy, gdy jest reprezentacyjnie skończona. Kategoria Λ jest lokalnie reprezentacyjnie skończona wtedy i tylko wtedy, gdy kategoria $\operatorname{ind} \Lambda$ jest lokalnie ograniczona. Wiemy, że $\Lambda \simeq KQ_\Lambda / I$, gdzie $I \subset KQ_\Lambda^{(2)}$ i dla każdego x istnieje n_x takie, że $I(x, -) \supset KQ_\Lambda^{(n_x)}(x, -)$ oraz $I(-, x) \supset KQ_\Lambda^{(n_x)}(-, x)$. Kategoria $\operatorname{mod} \Lambda$ ma ciągi Auslandera–Reiten. Jeśli kategoria Λ jest lokalnie reprezentacyjnie skończona, to Λ i $\operatorname{ind} \Lambda$ są wolne od kwadratów, to znaczy ich kołczany nie zawierają kołczanu, który jest podwójną strzałką.

Kategorię Σ nazwiemy kategorią Auslandera, gdy istnieje lokalnie reprezentacyjnie skończenie kategoria Λ taka, że $\Sigma \simeq \operatorname{ind} \Lambda$.

Twierdzenie (Auslander)**.** *Niech Σ będzie lokalnie skończenie wymiarowe K-kategorią. Wtedy Σ jest kategorią Auslandera wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki*

(a) *Σ jest lokalnie ograniczona.*

(b) $\operatorname{gldim} \Sigma \leq 2$.

(c) *dla każdego $P \in \operatorname{proj} \Sigma$ istnieje ciąg dokładny $0 \to P \to I_0 \to I_1$ taki, że moduły I_0 i I_1 są projektywno-injektywne i skończenie generowane.*

2 Kołczany z translacją

Kołczanem z translacją nazwiemy każdą parę $\Gamma = (\Gamma, \tau)$, gdzie $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ jest lokalnie skończonym kołczanem bez pętli i podwójnych strzałek, zaś $\tau : \Gamma_0' \subset \Gamma_0 \to \Gamma_0$ jest funkcją różnowartościową taką, że dla każdego $x \in \Gamma_0'$ zbiór bezpośrednich poprzedników wierzchołka x pokrywa się ze zbiorem bezpośrednich następników wierzchołka τx. Dla każdej strzałki $\beta : z \to x$ mamy wtedy strzałkę $\sigma(\beta) : \tau x \to z$.

Przejściem w kołczanie Γ nazwiemy dowolną niezorientowaną drogę w kołczanie $\hat{\Gamma}$, który powstaje z kołczanu Γ przez dołączenie strzałek $\tau_x : \tau x \to x$. Przez W oznaczymy zbiór wszystkich przejść w Γ.

Relacją homotopii nazwiemy relację równoważności $\sim$ w zbiorze W, generowaną przez warunki $\alpha^{-1}\alpha \sim e_x \sim \beta\beta^{-1}$ dla każdej strzałki α o początku w x i każdej strzałki β o końcu w x, gdzie e_x oznacza drogę trywialną w x. Ponadto $\alpha\sigma(\alpha) \simeq \tau_x$ dla każdej strzałki o końcu w x oraz relacja $\sim$ musi być kongruencją.

Jeśli Γ jest kołczanem i x jego wierzchołkiem, to przez $\Pi(\Gamma, x)$ oznaczamy grupą podstawową kołczanu Γ w punkcie x, a więc zbiór klas homotopii dróg zaczynających się i kończących w punkcie x. Działanie w grupie $\Pi(\Gamma, x)$ indukowane jest przez składanie dróg.

Dla kołczanu Γ konstruujemy jego nakrycie uniwersalne $\tilde{\Gamma}$, którego zbiorem wierzchołków są klasy homotopii dróg startujących w punkcie x. Strzałki i translacja pochodzą od strzałek i translacji w kołczanie Γ. Definiujemy $\pi : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$, które klasie abstrakcji drogi przyporządkowuje jej koniec. Jest to morfizm kołczanów z translacją, natomiast grupa $\Pi(\Gamma, x)$ działa na $\tilde{\Gamma}$ z prawej strony.

Morfizm kołczanów z translacją $f : \Delta \to \Gamma$ nazywamy nakryciem, gdy dla każdego punktu $x \in \Delta_0$ morfizm f implikuje bijekcję zbioru bezpośrednich następników (odpowiednio poprzedników) punktu p i zbioru bezpośrednich następników (odpowiednio poprzedników) punktu $f(p)$. Ponadto przeciwobrazy wierzchołków nieinjektywnych (odpowiednio nieprojektywnych) muszą być nieinjektywne (odpowiednio nieprojektywne). Nakrycia Γ odpowiadają $\Pi(\Gamma, x)$-zbiorom. Nakryciu f przyporządkowujemy zbiór $f^{-1}(x)$.

Kołczan Γ jest jednospójny, jeśli jest spójny i $\Pi(\Gamma, x) = \{1\}$ dla pewnego $x \in \Gamma_0$. Kołczan $\Gamma = (\Gamma, \tau)$ nazywamy kołczanem Riedtmann wtedy i tylko wtedy, gdy kategoria sieciowa $k(\Gamma)$ jest kategorią Auslandera.

Twierdzenie. *Jeżeli Γ jest kołczanem z translacją, to następujące warunki są równoważne.*

(1) Γ *jest kołczanem Auslandera–Reiten pewnej algebry.*

(2) Γ *jest kołczanem Riedtmann.*

(3) $\tilde{\Gamma}$ *jest kołczanem Riedtmann.*

Dowód opiera się na konstrukcji funktorów nakryć $F : (\tilde{\Gamma}) \to \operatorname{ind} \Lambda$ i $G : k(\tilde{\Gamma}) \to k(\Gamma)$, które zachowują warunki z twierdzenia Auslandera. Trudną częścią jest konstrukcja funktora F.

Twierdzenie. *Gdy Λ jest lokalnie skończonego typu reprezentacyjnego, to grupa podstawowa $\Pi(\Gamma_\Lambda, x)$ jest wolna.*

Twierdzenie. *Gdy Λ jest lokalnie skończonego typu reprezentacyjnego, to $k(\Gamma_\Lambda)$ jest izomorficzna z $\mathrm{Gr}(\operatorname{ind} \Lambda)$.*