

O półniezmiennikach kołczanów z relacjami

na podstawie referatu Witolda Kraśkiewicza

19 grudnia 2000 roku i 16 stycznia 2001 roku

Niech $Q = (Q_0, Q_1)$ będzie lokalnie skończonym kołczanem bez zorientowanych cykli i k ustalonym ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki 0. Dla wektora wymiaru $d \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ ($d_x \geq 0$ dla każdego x oraz $\text{supp } d := \{x \in Q_0 \mid d_x \neq 0\}$ jest skończony) przez $\mathcal{R}(Q, d)$ oznaczajmy rozmaitość reprezentacji kołczanu Q o wektorze wymiaru d zdefiniowaną wzorem $\mathcal{R}(Q, d) := \prod_{a \in Q_1} \text{Hom}(k^{d_{ta}}, k^{d_{ha}})$, gdzie dla każdej strzałki $a \in Q_1$ przez ta oznaczamy jej początek, zaś przez ha jej koniec. Na rozmaitości $\mathcal{R}(Q, d)$ działa w naturalny sposób grupa $G(d) := \prod_{x \in Q_0} \text{GL}(d_x)$. Działanie to indukuje działanie grupy $G(d)$ na pierścieniu współrzędnych $k[\mathcal{R}(Q, d)]$ rozmaitości $\mathcal{R}(Q, d)$. Mamy też działanie podgrupy $G'(d) := \prod_{x \in Q_0} \text{SL}(d_x) \subset G(d)$. Pierścień $k[R(Q, d)]^{G'(d)}$ funkcji stałych ze względu na działanie grupy $G'(d)$ nazywać będziemy pierścieniem półniezmienników i oznaczać $\text{SI}(Q, d)$.

Twierdzenie (Skowroński–Weyman). *Kołczan Q jest oswojonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{SI}(Q, d)$ jest zupełnym przekrojem dla każdego wektora wymiaru d .*

Rozważmy kołczan ograniczony (Q, I) . Możemy zdefiniować rozmaitość $\mathcal{R}(Q, I, d)$ reprezentacji kołczanu Q spełniających relacje z I o wektorze wymiaru d . Zbiór $\mathcal{R}(Q, I, d)$ jest domkniętą podrozmaitością w $\mathcal{R}(Q, d)$.

Dla kołczanu $1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3$ ograniczonego przez ideał $I = (ba)$ i dla wektora wymiaru $d = (1, 1, 1)$ rozmaitość $\mathcal{R}(Q, I, d)$ jest sumą dwóch składowych opisanych przez równania $a = 0$ i $b = 0$. W ogólnym przypadku składowe rozmaitości $\mathcal{R}(Q, I, d)$ są opisane przez maksymalne pary $r = (r_a, r_b)$ takie, że $r_a + r_b \leq d_2$, $r_a \leq d_1$, $r_b \leq d_2$. Liczby r_a i r_b opisują rangi odwzorowań stowarzyszonych ze strzałkami a i b odpowiednio.

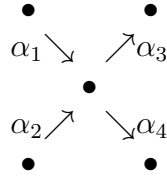
Ustalmy składową nieprzywiedlną X stowarzyszoną z parą (r_a, r_b) . Desingularyzację Z tej składowej nieprzywiedlnej otrzymujemy rozpatrując flagi $0 \subset R_1 \subset R_2 \subset k^{d_2}$, gdzie $\dim_k R_1 = r_a$, $\dim_k R_2 = d_2 - r_b$, i odwzorowania $f_a : k^{d_1} \rightarrow k^{d_2}$ i $f_b : k^{d_2} \rightarrow k^{d_3}$ takie, że $\text{Im } f_a \subset R_1$ i $\text{Ker } f_b \supset R_2$. Rozmaitość Z jest wiązką liniową nad przestrzenią odpowiednich flag. Zauważmy,

że rozmaiłość flag jest postaci G/P dla $G = \mathrm{GL}(d_2)$ i pewnej podgrupy parabolicznej P . Twierdzenie Botta pozwala nam wyliczyć $k[X]$. Otrzymujemy, że $k[X] = \bigoplus_{\lambda, \mu} S_\lambda(k^{d_1})^* \otimes S_{(\lambda|-\mu^t)}k^{d_2} \otimes S_\mu k^{d_3}$, gdzie λ i μ zależą od pary (r_a, r_b) .

Niech (Q, I) będzie gałęzią z relacjami. Rozmaiłość $\mathcal{R}(Q, I, d)$ jest produktem rozmaiłości rozważanych w poprzednim przykładzie. Zatem pierścień współrzędnych tej rozmaiłości jest iloczynem tensorowym pierścieni opisanych powyżej. Korzystając z reguły Littlewooda–Richardsona można opisać półniezmienniki.

Ustalmy niezorientowaną drogi δ w Q . Niech $\delta_1, \dots, \delta_k$ będą kolejnymi maksymalnymi odcinkami drogi δ zgodnie zorientowanymi. Oznaczmy początek drogi δ_j przez i_{j-1} , zaś jej koniec przez i_j . Załóżmy przy tym, że $d_{i_0} + d_{i_2} + \dots = d_{i_1} + d_{i_3} + \dots$. Wtedy dla każdego $V \in \mathcal{R}(Q, I, d)$ mamy odwzorowanie liniowe pomiędzy $k_{d_{i_0}+d_{i_2}+\dots}$, a $k^{d_{i_1}+d_{i_3}+\dots}$ indukowane przez reprezentację V . Ponieważ powyższe przestrzenie są tego samego wymiaru, więc możemy policzyć wyznacznik tego odwzorowania. Traktując ten wyznacznik jako funkcję do V otrzymujemy półniezmiennik. Wybierając odpowiednie drogi (zależne od składowej i spełniające warunek elementarności) otrzymujemy, że stowarzyszone z nimi półniezmienniki są wolnymi generatorami pierścienia półniezmienników dla danej składowej nieprzywiedlnej.

Rozważmy kołczan Q postaci

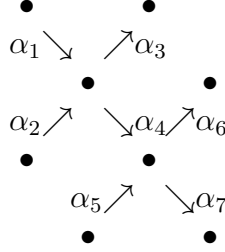


ograniczony przez relacje $\alpha_3\alpha_1$ i $\alpha_4\alpha_2$ oraz wektor wymiaru $d = \begin{smallmatrix} n & n \\ n & n \end{smallmatrix}$. Dla danej reprezentacji

$$\begin{array}{ccc}
 k^n & & k^n \\
 V(\alpha_1) \searrow & & \nearrow V(\alpha_3) \\
 & k^{2n} & \\
 V(\alpha_2) \nearrow & & \searrow V(\alpha_4) \\
 k^n & & k^n
 \end{array}$$

rozważamy funkcje $\delta_1 := \det(V(\alpha_4)V(\alpha_1))$, $\delta_2 := \det(V(\alpha_3)V(\alpha_2))$, $\delta_3 := \det(V(\alpha_1) + V(\alpha_2))$ i $\delta_4 := \det(V(\alpha_3) + V(\alpha_4))$. Mamy relację $\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4 = 0$. Można pokazać, że są to półniezmienniki generujące algebrę półniezmienników. Więcej, mamy $\mathrm{SI}(Q, I, d) \simeq K[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]/(\delta_1\delta_2 - \delta_3\delta_4)$.

Rozważmy kołczan Q postaci



ograniczony przez relację $\alpha_3\alpha_1$, $\alpha_4\alpha_2$, $\alpha_6\alpha_4$ i $\alpha_7\alpha_5$. Dla wektora wymiaru $d = \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n \\ n & n \end{pmatrix}$ niech X będzie składową rozmaitości $R(Q, d)$ opisaną przez równania $\text{rk } V(\alpha_i) \leq n$ dla każdego i . Rozważmy funkcje

$$\begin{aligned} \delta_1(V) &:= \det(V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_3), \\ \delta_2(V) &:= \det(V_2 \rightarrow V_4), \\ \delta_3(V) &:= \det(V_5 \rightarrow V_7), \\ \delta_4(V) &:= \det(V_6 \rightarrow V_7 \oplus V_8), \\ \delta_5(V) &:= \det(V_1 \oplus V_5 \rightarrow V_6), \\ \delta_6(V) &:= \det(V_1 \rightarrow V_8), \\ \delta_7(V) &:= \det(V_3 \oplus V_5 \rightarrow V_4 \oplus V_6), \\ \delta_8(V) &:= \det(V_3 \rightarrow V_4 \oplus V_8). \end{aligned}$$

Mamy równości $\delta_4\delta_5 - \delta_3\delta_6 = 0$, $\delta_1\delta_7 - \delta_2\delta_5 = 0$, $\delta_2\delta_6 - \delta_1\delta_8 = 0$, $\delta_8\delta_5 - \delta_7\delta_6 = 0$, $\delta_4\delta_7 - \delta_3\delta_8 = 0$. Zauważmy, że lewe strony powyższych równości są pfaffianami następującej macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & -\delta_8 & -\delta_7 & -\delta_2 & 0 \\ \delta_8 & 0 & 0 & -\delta_4 & -\delta_6 \\ \delta_7 & 0 & 0 & -\delta_3 & -\delta_5 \\ \delta_2 & \delta_4 & \delta_3 & 0 & -\delta_1 \\ 0 & \delta_6 & \delta_5 & \delta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując powyższe obserwacje można pokazać, że pierścień $\text{SI}(X)$ jest izomorficzny z pierścieniem $K[\delta_1, \dots, \delta_8]$ podzielony przez ideał generowany przez powyższe relacje. W szczególności pierścień ten nie jest zupełnym przekrojem. W obu powyższych przypadkach korzystamy z szeregów Poincaré'a.

Niech Q będzie kołczanem bez zorientowanych cykli i V nierozkładalną reprezentacją kołczan Q . Definiujemy $c^V(W) := \det(\text{Hom}_{KQ}(P_0, W) \rightarrow \text{Hom}_{KQ}(P_1, W))$, gdzie $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow V \rightarrow 0$ jest rezolwentą projektywną

modułu V . Derksen–Weyman pokazali, że półniezmienniki c^V zdefiniowane przez Schoefield generują pierścień półniezmienników.

Ustalmy kołczan (Q, I) . Wtedy $R(Q, I, d)$ jest podrozmainością w $R(Q, d)$. Mamy odwzorowanie pierścieni współrzędnych $K[R(Q, d)] \rightarrow K[R(Q, I, d)]$, które jest epimorfizmem. To odwzorowanie indukuje epimorfizm na pierścieniach półniezmienników. Obrazy półniezmienników c^V generują pierścień półniezmienników $SI(Q, d)$.

Ustalmy $W \in R(Q, I, d)$ i $V \in R(Q, d)$. Rozważmy standardową rezolwentę $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow V \rightarrow 0$ modułu V , gdzie $P_0 := \bigoplus_{x \in Q_0} V_x \otimes P_x$, zaś $P_1 := \bigoplus_{x \rightarrow y} V_y \otimes P_x$. Wtedy, że $\det(\text{Hom}_{KQ}(P_0, W) \rightarrow \text{Hom}_{KQ}(P_1, W)) = \det(\text{Hom}_{KQ/I}(P'_0, W) \rightarrow \text{Hom}_{KQ/I}(P'_1, W))$, gdzie $P'_i := P_i \otimes kQ/I$. Zauważmy, że $P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow V' \rightarrow 0$ jest prezentacją projektywną modułu $V' := V \otimes KQ/I$