Algebry skończonego typu i formy kwadratowe

na podstawie referatu Justyny Kosakowskiej

26 kwietnia oraz 10 i 17 maja 2001

Referat został opracowany w oparciu o prace Klausa Bongartza „Criterion for finite representation type” i „Algebras and representation theory” oraz pracę Dietera Happela „The converse of Drozd’s theorem on quadratic forms podstawie pracy” . Celami referatu jest pokazanie związku S-warunku z istnieniem preprojektywnej składowej oraz przedstawienie charakteryzacji algebr skończonego typu posiadających preprojektywną składową.

Przez Λ oznaczać będziemy spójną skończenie wymiarową bazową k-algebrę, gdzie k jest ciałem algebraicznie domkniętym. Mamy przedstawienie $\Lambda \simeq kQ/I$ dla pewnego kołczanu ograniczonego (Q, I). Kategorię $\operatorname{mod}\Lambda$ prawych skończenie wymiarowych Λ-modułów możemy w tej sytuacji utożsamiać z kategorią $\operatorname{rep}(Q, I)$ reprezentacji kołczanu (Q, I). Algebrę Λ będziemy nazywać trójkątną, jeśli w kołczanie Q nie ma zorientowanych cykli. Algebrę Λ nazywamy schurowską, jeśli dla dowolnych wierzchołków x, y kołczanu Q mamy $\dim_k(e_x\Lambda e_y) \leq 1$. Odtąd będziemy zakładać, że rozważane algebry są trójkątne. W tej sytuacji w zbiorze wierzchołków Q_0 kołczanu Q możemy w tej sytuacji wprowadzić porządek pisząc $x \leq y$, jeśli istnieje w Q droga o początku x i końcu y.

Algebrę Λ możemy traktować jako skończoną k-kategorię, której obiektami są wierzchołki kołczanu Q, natomiast przestrzenie morfizmów są postaci $\Lambda(x, y) = e_x\Lambda e_y$. Dla ustalonego wierzchołka x kołczanu Q przez $\Lambda(x)$ oznaczać będziemy pełną podkategorię kategorii Λ, której obiektami są wszystkie wierzchołki $y \in Q_0$ o własności $y \not\leq x$. Wtedy $\Lambda(x) = \operatorname{End}_\Lambda(\bigoplus_{y\not\leq x} P(y))$. Zauważmy, że kategoria $\Lambda(x)$ nie musi być spójna. Wiadomo, że $\operatorname{rad} P(x) \simeq \bigoplus_{i=1}^m R_i(x)$ dla pewnego $m \geq 0$ oraz nierozkładalnych $\Lambda(x)$-modułów $R_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Dla każdego $i = 1, \ldots, m$ niech $B_i(x)$ będzie spójną składową kategorii $\Lambda(x)$ zawierającą nośnik modułu $R_i(x)$. Powiemy, że wierzchołek x jest separujący, jeśli dla dowolnych $i \neq j$ kategorie $B_i(x)$ i $B_j(x)$ są rozłączne.

Lemat 1. *Załóżmy, że algebra Λ jest schurowska i wszystkie wierzchołki kołczanu Q są separujące. Jeśli x jest wierzchołkiem kołczanu Q, który nie jest ujściem, to mamy następujące własności.*

(a) *Jeśli* $U \to P(y)$, $y \leq x$, *jest nieprzywiedlnym odwzorowaniem w* $\operatorname{mod} \Lambda$ *dla pewnego* $B_1(x)$*-modułu* U*, to* $y = x$ *oraz* $U \simeq R_1(x)$*.*

(b) *Niech* $\mathscr{C}$ *będzie preprojektywną składową w* $\Gamma(\operatorname{mod} B_1(x))$ *oraz niech* $U \in \mathscr{C}$ *będzie takim* $B_1(x)$*-modułem, że* $R_1(x)$ *nie jest jego właściwym poprzednikiem w* $\mathscr{C}$*. Wtedy:*

(i) *Każdy poprzednik* U *w* $\Gamma(\operatorname{mod} \Lambda)$ *należy do* $\mathscr{C}$*.*

(ii) *Jeśli* $U \neq R_1(x)$*, to* $\tau_\Lambda^{-1} U \simeq \tau_{B_1(x)}^{-1} U$*.*

Dowód. (a) Jeśli $y = x$, to teza jest oczywista, gdyż wierzchołek x jest separujący. Załóżmy zatem, że $x \neq y$. Wtedy istnieje droga $y = y_0 \to y_1 \to \cdots \to y_n = x$ w Q dla $n \geq 1$. Ponieważ U jest składnikiem prostym modułu $\operatorname{rad} P(y)$ oraz U jest $B_1(x)$-modułem, więc mamy strzałkę postaci $y \to y'$, $y' \in B_1(x)$, oraz $U_{y'} \neq 0$. Podobnie mamy strzałkę $x \to x'$, $x' \in B_1(x)$. Ustalmy i takie, że $U \simeq R_i(y)$. Z warunku separowania i spójności kategorii $B_1(x)$ wynika, że $y', y_1 \in B_i(y)$. Ponadto wtedy $U_{y_1} \neq 0$, co jest niemożliwe.

(b) Dowód będzie indukcyjny, ze względu na liczbę $a(U)$ poprzedników U w $\mathscr{C}$. Jeśli $a(U) = 1$, to $U = P(z)$ jest prostym projektywnym $B_1(x)$-modułem, a więc też prostym projektywnym Λ-modułem i punkt (i) jest oczywisty. Jeśli dodatkowo $U \not\simeq R_1(x)$, to dla każdego odwzorowania nieprzywiedlnego postaci $U \to Y$ moduł Y jest projektywnym Λ-modułem. Pokażemy, że w tej sytuacji moduły Y jest $B_1(x)$-modułem, skąd wyniknie teza punktu (ii). Istotnie, jeśli $Y = P(y)$, to z punktu (a) wynika, że $y \not\leq x$, więc $y \in \Lambda(x)$. Ponadto istnienie odwzorowania $U \to P(y)$ implikuje istnienie strzałki $z \to y$, zatem $y \in B_1(x)$.

Załóżmy teraz, że $a(U) > 1$. Pokażemy, że dla każdego odwzorowanie nieprzywiedlnego $X \to U$ moduł X jest $B_1(x)$-modułem. Jeżeli U jest projektywnym $B_1(x)$-modułem, to teza jest oczywista, bo wtedy U jest też projektywnym Λ-modułem i X jest składnikiem prostym modułu $\operatorname{rad} U$, który jest $B_1(x)$-modułem. Załóżmy zatem, że U nie jest projektywnym $B_1(x)$-modułem. Stosując założenie indukcyjne dla $\tau_{B_1} U$ otrzymujemy, że $U \simeq \tau_{B_1(x)}^{-1} \tau_{B_1(x)} U \simeq \tau_\Lambda^{-1} \tau_{B_1(x)} U$, gdyż $\tau_{B_1(x)} U \neq R_1(x)$. Zatem ciąg $0 \to \tau_{B_1(x)} U \to * \to U \to 0$, który jest ciągiem Auslandera–Reiten w $\operatorname{mod} B_1(x)$ jest też ciągiem Auslandera–Reiten w $\operatorname{mod} \Lambda$, więc istotnie X jest $B_1(x)$-modułem. Na mocy założenie indukcyjnego mamy punkt (i).

Załóżmy teraz, że $U \neq R_1(x)$. Pokażemy, że jeśli $U \to Y$ jest nieprzywiedlnym odwzorowaniem w $\operatorname{mod} \Lambda$, to Y jest $B_1(x)$-modułem. Gdy Y nie jest projektywny, to na mocy poprzedniej części dowodu otrzymujemy, że $\tau_\Lambda Y$ jest $B_1(x)$-modułem, skąd na mocy założenie indukcyjnego mamy, że $Y \simeq \tau_\Lambda^{-1} \tau_\Lambda Y \simeq \tau_{B_1(x)}^{-1} \tau_\Lambda Y$, a więc jest $B_1(x)$-modułem. Gdy natomiast Y jest projektywny, to na mocy punktu (a) Y musi $B_1(x)$-modułem. Z powyższej własności otrzymujemy, że $\tau_\Lambda^{-1}U$ jest $B_1(x)$-modułem, a więc $\tau_\Lambda^{-1}U = \tau_{B_1(x)}^{-1}U$. □

Twierdzenie 2. *Jeśli algebra Λ jest schurowska i wszystkie wierzchołki kołczanu Q są separujące, to $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ posiada preprojektywną składową.*

Dowód. Dowód jest indukcyjny ze względu na $\dim\Lambda$. Załóżmy najpierw, że istnieje taki wierzchołek x kołczanu Q, że dla pewnego i moduł $R_i(x)$ nie należy do preprojektywnej składowej $\mathscr{P}'$ kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod} B_i(x))$. Wtedy $\mathscr{P}'$ jest składową preprojektywną kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ na mocy lematu 1 (b) (i).

Załóżmy teraz, że dla dowolnego wierzchołka x i dla dowolnego i moduł $R_i(x)$ należy do preprojektywnej składowej w $\Gamma(\operatorname{mod} B_i(x))$. Konstruujemy indukcyjnie pełne podkołczany $\mathscr{P}_n$ kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ spełniające następujące warunki:

(i) dla każdego n kołczan $\mathscr{P}_n$ jest skończony, spójny, nie zawiera zorientowanych cykli oraz jest zamknięty ze względu na branie poprzedników w $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$;

(ii) $\tau^{-1}\mathscr{P}_n \cup \mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$.

Wtedy $\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{P}_n$ jest szukaną składową preprojektywną.

Z definicji przyjmujemy, że $\mathscr{P}_0$ składa się z prostego Λ-modułu projektywnego S. Przypuśćmy, że $n \geq 0$ i kołczan $\mathscr{P}_n$ mający powyższe własności został zdefiniowany. Niech $M_1, \ldots, M_t$ będą wszystkimi Λ-modułami w $\mathscr{P}_n$ takimi, że $\tau^{-1}M_i$ nie należy do $\mathscr{P}_n$. Załóżmy dodatkowo, że jeśli M_i jest poprzednikiem M_j to $i \leq j$. Skonstruujemy pełne podkołczany $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \ldots, t$, kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ spełniające warunek (i) oraz takie, że $\mathscr{D}_0 = \mathscr{P}_n$ i $\mathscr{D}_i \cup \{\tau^{-1}M_{i+1}\} \subset \mathscr{D}_{i+1}$. Wtedy wystarczy przyjąć $\mathscr{P}_{n+1} = \mathscr{D}_t$.

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już kołczan $\mathscr{D}_i$, $i \in \{0, \ldots, t-1\}$. Rozważmy ciąg Auslandera–Reiten $0 \to M_{i+1} \to X \to \tau^- M_{i+1} \to 0$. Definiujemy $\mathscr{D}_{i+1}$ jako pełny podkołczan kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ zawierający $\mathscr{D}_i$ oraz wszystkie poprzedniki w $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ oraz wszystkie poprzedniki $\tau^- M_{i+1}$. Z definicji widać, że kołczan $\mathscr{D}_{i+1}$ jest zamknięty na poprzedniki.

Aby pokazać, że kołczan $\mathscr{D}_{i+1}$ jest skończony i nie zawiera zorientowanych cykli wystarczy pokazać, że każdy nierozkładalny składnik prosty Y modułu X ma skończenie wiele poprzedników oraz żaden z nich nie leży na zorientowanym cyklu. Jeśli Y nie jest projektywny, to τY należy do $\mathscr{P}_n$, gdyż jest poprzednikiem $M_{i+1} \in \mathscr{P}_n$. Stąd Y musi należeć do $\mathscr{D}_i$, co kończy dowód w tym przypadku. Istotnie, jeśli bowiem $Y \notin \mathscr{P}_n$, to $\tau Y = M_j$ dla $j \leq i$. Załóżmy teraz, że Y jest projektywny. Wtedy $Y = P(x)$ dla pewnego wierzchołka x kołczanu Q. Ponieważ moduły $R_i(x)$ należą do preprojektywnych składowych kołczanów $\Gamma(\operatorname{mod} B_i(x))$ oraz każdy właściwy poprzednik modułu Y jest poprzednikiem jednego z modułów $R_i(x)$, te zaś na mocy Lematu (1) (b) (i) należą do składowych preprojektywnych, więc musi ich być skończenie wiele. Z tego samego powody wynika, że żaden z poprzedników Y nie leży na zorientowanym cyklu. $\square$

Łatwo wskazać przykłady algebr schurowskich (nawet skończonego typu reprezentacyjnego), które nie spełniają S-warunku i posiadają preprojektywną składową.

Twierdzenie 3. *Niech Λ będzie algebrą. Przypuśćmy, że kołczan Auslandera–Reiten $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ zawiera preprojektywną składową. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(a) *Algebra Λ jest skończonego typu reprezentacyjnego.*

(b) *Przyporządkowanie $M \mapsto \mathbf{dim}\, M$ indukuje bijekcję pomiędzy klasami izomorfizmów nierozkładalnych Λ-modułów i zbiorem dodatnich pierwiastków formy Titsa.*

(c) *Forma Titsa algebry Λ jest słabo dodatnia.*

Warto podkreślić, że implikacja (a) $\Rightarrow$ (c) jest prawdziwa bez założenie istnienia preprojektywnej składowej.

Dowód. Przed przystąpieniem do dowodu przypomnijmy, że moduły preprojektywne są kierujące, a więc w szczególności są one pierwiastkami formy Eulera. Ponadto, ponieważ nośniki modułów preprojektywnych są wypukłe w Λ oraz algebra nośnikowa modułu preprojektywnego jest odwrócona, więc są też one pierwiastkami formy Titsa.

Udowodnimy najpierw implikację (a) $\Rightarrow$ (b). Jeśli algebra Λ jest skończonego typu reprezentacyjnego, to $\Gamma(\operatorname{mod}\Lambda)$ jest równa swej składowej preprojektywnej. Stąd odwzorowanie $[M] \mapsto \mathbf{dim}\, M$ prowadzi do zbioru pierwiastków dodatnich formy Titsa. Ponadto jest ono injekcją, gdyż nieizomorficzne nierozkładalne moduły preprojektywne mają różne wektory wymiaru. Z drugiej strony niech $\mathbf{d}$ będzie dodatnim pierwiastkiem formy Titsa. Ponieważ algebra Λ jest skończonego typu reprezentacyjnego, więc w rozmaitości $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ istnieje orbita $\mathscr{O}(M)$ o własności $\dim \mathscr{O}(M) = \dim \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$. Mamy ciąg nierówności $\dim \mathrm{GL}(\mathbf{d}) - 1 = \dim \mathrm{GL}(\mathbf{d}) - q_\Lambda(\mathbf{d}) \le \dim \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d}) = \dim \mathscr{O}(M) = \dim \mathrm{GL}(\mathbf{d}) - \dim_K \operatorname{End}_\Lambda(M) \le \dim \mathrm{GL}(\mathbf{d}) - 1$. Stąd otrzymujemy, że $\dim_K \operatorname{End}_\Lambda(M) = 1$, więc M jest modułem nierozkładalnym.

Dla dowodu implikacji (b) $\Rightarrow$ (c) zauważmy, że w rozważanej sytuacji dla każdego wektora wymiaru $\mathbf{d}$ istnieje skończenie wiele klas izomorfizmów Λ-modułów o wektorze wymiaru $\mathbf{d}$. W związku z tym w rozmaitość $\operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$ jest sumą skończonej ilości orbita, skąd $\dim \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d}) < \dim \operatorname{GL}(\mathbf{d})$. Ponieważ $q_\Lambda(\mathbf{d}) \geq \dim \operatorname{GL}(\mathbf{d}) - \dim \operatorname{mod}_\Lambda(\mathbf{d})$, więc kończy to dowód.

Aby udowodnić implikację (c) $\Rightarrow$ (a) zauważmy, że jeśli forma Titsa q_Λ jest słabo dodatnia, to na mocy wyniku Drozda posiada ona tylko skończenie wiele dodatnich pierwiastków. Stąd składowa preprojektywna jest skończona, gdyż wektory wymiarów nierozkładalnych modułów preprojektywnych są są parami różnymi dodatnimi pierwiastkami formy Titsa. Na mocy wyniku Auslandera musi być to jedyna składowa kołczanu $\Gamma(\operatorname{mod} \Lambda)$, co kończy dowód. $\square$

Twierdzenie 4. *Niech $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ będzie formą kwadratową postaci*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{i,j} x_i x_j.$$

Jeśli forma q posiada skończenie wiele pierwiastków, to jest słabo dodatnia.

Dowód. Przypuśćmy, że forma q nie jest słabo dodatnia. Wtedy oczywiście $n > 1$. Wybierzmy $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^n$ taki, że $q(\mathbf{x}) \leq 0$, który jest minimalnym wektorem o tej własności. Bez straty ogólności możemy założyć, że wektor $\mathbf{x}$ jest wierny. Niech $\mathbf{y}$ będzie maksymalnym dodatnim pierwiastkiem formy q. Oznaczymy przez $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ wektory jednostkowe oraz niech $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2) - q(\mathbf{d}_1) - q(\mathbf{d}_2))$. Ponieważ wektor $\mathbf{y}$ jest maksymalnym pierwiastkiem formy q, więc $(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) \geq 0$, gdyż inaczej $\mathbf{y} - 2(\mathbf{e}_i, \mathbf{y})\mathbf{e}_i$ byłby dodatnim pierwiastkiem formy q większym od $\mathbf{y}$. Ponadto istnieje i takie, że $(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) > 0$, ponieważ $1 = (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \sum_i y_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{y})$. Wtedy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i x_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) > 0$, gdyż $\mathbf{x}$ jest wiernym dodatnim wektorem. Z nierówności $0 < (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i y_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)$ wynika istnienie i takiego, że $(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) > 0$. Wtedy $\mathbf{x} - \mathbf{e}_i$ jest dodatnim wektorem mniejszym od $\mathbf{x}$ o własności $q(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \leq 0$, co prowadzi do sprzeczności. $\square$