Bimoduły lewo-prawo projektywne

na podstawie referatu Zygmunta Pogorzałego

22 maja 2001

Niech K będzie ustalonym ciałem. Jeśli A jest skończenie wymiarową łączną K-algebrą z 1, to przez $\operatorname{mod} A$ oznaczać będziemy kategorię skończenie wymiarowych prawych A-modułów. Niech $\mathscr{P}$ będzie ideałem dwustronnym w $\operatorname{mod} A$ złożonym z morfizmów faktoryzujących się przez moduły projektywne. Kategorię ilorazową $\underline{\operatorname{mod}}\, A := \operatorname{mod} A/\mathscr{P}$ będziemy nazywać kategorią stabilną kategorii $\operatorname{mod} A$. Dwie algebry A i B nazywamy stabilnie równoważnymi, jeśli kategorie $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ i $\underline{\operatorname{mod}}\, B$ są równoważne.

Twierdzenie (Rickard)**.** *Niech A i B będą algebrami samoinjektywnymi pochodnie równoważnymi. Wtedy istnieją bimoduły ${}_BM_A$ i ${}_AN_B$ takie, że funktory $- \otimes_A N : \operatorname{mod} A \to \operatorname{mod} B$ i $- \otimes_B M : \operatorname{mod} B \to \operatorname{mod} A$ indukują wzajemnie odwrotne równoważności kategorii $\underline{\operatorname{mod}}\, A$ i $\underline{\operatorname{mod}}\, B$.*

Powiemy, że dwie algebry A i B są stabilnie równoważne typu Mority, jeśli istnieją bimoduły ${}_AN_B$ i ${}_BM_A$ takie, że:

(1) M i N są projektywnymi lewymi i projektywnymi prawymi modułami,

(2) $M \otimes_A N \simeq B \oplus \Pi$ jako B-B-bimoduł dla pewnego projektywnego B-B-bimodułu Π,

(3) $N \otimes_B M \simeq A \oplus \Pi'$ jako A-A-bimoduł dla pewnego projektywnego A-A-bimodułu Π'.

W naszych rozważaniach możemy dodatkowo założyć, że M i N nie są projektywnymi bimodułami i są skończenie wymiarowe. Ponadto wiadomo, że stabilna równoważność typu Mority jest równoważnością Mority wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza moduły proste w moduły proste. Naturalnym problemami związanym z zagadnieniem stabilnej równoważności typu Mority są próba opisania nierozkładalnych lewo-prawo projektywnych bimodułów oraz zrozumienie roli jaką odgrywa kategoria lewo-prawo projektywnych bimodułów.

Przypomnijmy, że A-B-bimoduły możemy utożsamiać z $B \otimes_K A^{\mathrm{op}}$-modułami. Przykładem A-A-bimodułu, który na ogół nie jest projektywny, ale jest lewo-prawo projektywny, jest bimoduł ${}_A A_A$. Zauważy, że jeśli algebry A i B są samoinjektywne, to algebra $B \otimes_K A^{\mathrm{op}}$ jest też samoinjektywna.

Niech $\operatorname{lrp} A^e$ oznacza pełną podkategorię w $\operatorname{mod} A^e$ złożoną z obiektów lewo-prawo projektywnych, gdzie $A^e = A \otimes_K A^{\mathrm{op}}$. Przez $\underline{\operatorname{lrp}}\, A^e$ oznaczać będziemy kategorię stabilną kategorii $\operatorname{lrp} A^e$, która jest podkategorią kategorii $\underline{\operatorname{mod}}\, A^e$.

Twierdzenie. *Niech A i B będą skończenie wymiarowymi K-algebrami. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *A i B są stabilnie równoważne typu Mority.*

(2) *Istnieje równoważność $\underline{\operatorname{lrp}}\, A^e \simeq \underline{\operatorname{lrp}}\, B^e$ o pewnych własnościach (zadana przez funktor ${}_B M_A \otimes_A \overline{-} \otimes_A N_B$).*

Twierdzenie. *Niech A i B będą samoinjektywnymi K-algebrami, z których co najmniej jedna nie jest półprosta. Niech $\mathscr{C}$ będzie składową w kołczanie Auslandera–Reiten $\Gamma_{B \otimes_K A^{\mathrm{op}}}$. Następujące warunki są równoważne.*

(1) *Istnieje wierzchołek składowej $\mathscr{C}$, który jest lewo-prawo projektywny i nie jest projektywny.*

(2) *Każdy wierzchołek składowej $\mathscr{C}$ jest lewo-prawo projektywny.*

Niech A i B będą trójkątnymi algebrami Nakayamy. Załóżmy też, że ciało K jest algebraicznie domknięte. Wiemy, że $A \simeq KQ/I$ i $B \simeq KQ'/I'$, gdzie $Q = s \to s-1 \to \cdots \to 2 \to 1$ oraz $Q = t \to t-1 \to \cdots \to 2 \to 1$. Wtedy $B \otimes A^{\mathrm{op}} \simeq K\overline{Q}/\overline{I}$, gdzie $\overline{Q}$ jest kołczanem, którego wierzchołki są postaci (i,j), $i = 1, \ldots, t$, $j = 1, \ldots, s$, zaś strzałki są postaci $(i,j) \to (i, j+1)$ oraz $(i,j) \to (i-1, j)$. Ideał $\overline{I}$ jest generowany przez $Q'_0 \times I^{\mathrm{op}}$, $I' \times Q_0$ oraz przemienność kwadratów

$$\begin{array}{ccc} (i,j) & \to & (i,j+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (i-1,j) & \to & (i-1,j+1) \end{array}.$$

Lemat. *Niech A i B będą skończenie wymiarowymi K-algebrami i M B-modułem. Wtedy mamy izomorfizm*

$$\begin{bmatrix} K & M \\ 0 & B \end{bmatrix} \otimes_K A^{\mathrm{op}} \simeq \begin{bmatrix} A^{\mathrm{op}} & M \otimes_K A^{\mathrm{op}} \\ 0 & B \otimes_K A^{\mathrm{op}} \end{bmatrix}.$$

Niech

$$\Lambda := \begin{bmatrix} A^{\mathrm{op}} & M \otimes_K A^{\mathrm{op}} \\ 0 & B \otimes_K A^{\mathrm{op}} \end{bmatrix}.$$

Dzięki powyższemu izomorfizmowi możemy utożsamiać $X \in \operatorname{mod}\Lambda$ z układem $X = ({}_AX', {}_AX''_B, \varphi : X' \otimes_K M \to X'')$, gdzie φ jest odwzorowaniem A-B-bimodułów.

Lemat. *Niech $X = (X', X'', \varphi)$ będzie skończenie wymiarowym lewo-prawo projektywnym Λ-modułem. Wtedy X' i X'' są lewymi A-modułami projektywnymi.*

Okazuje się, że w ogólnej sytuacji nie można opisać wszystkich lewo-prawo projektywnych A-B-bimodułów. Skończenie wymiarowy nierozkładalny lewo-prawo projektywny A-B-bimoduł X nazywamy lewostronnie quasi-odwracalnym, jeśli $\operatorname{Hom}_A(X, A) \otimes_A X \simeq B \oplus \Pi$ jako B-B-bimoduł dla pewnego projektywnego B-B-bimodułu Π.

Lemat. *Niech $X = (X', X'', \varphi)$ będzie skończenie wymiarowym lewo-prawo projektywnym Λ-modułem. Jeśli X jest lewostronnie quasi-odwracalny, to X'' jest lewostronnie quasi-odwracalnym A-B-bimodułem, $\operatorname{Hom}_A(X'', A) \otimes_A X'$ jest izomorficzny z sumą prostą pewnej ilości kopii $D(M)$ i lewego projektywnego B-modułu, zaś $\operatorname{Hom}_A(X', A) \otimes_A X''$ jest izomorficzny z sumą prostą pewnej ilości kopii M i prawego projektywnego B-modułu.*

Lemat. *Niech A i B będą trójkątnymi algebrami Nakayamy. Jeśli X jest lewostronnie quasi-odwracalnym A-B-bimodułem, to $(\mathbf{dim}\, X)_x \leq 1$ dla każdego wierzchołka x. Ponadto $\operatorname{supp} X$ spełnia następujące warunki:*

(1) *jeśli $(i, j) \in \operatorname{supp} X$ oraz $i > 1$, to $(i-1, j) \in \operatorname{supp} X$;*

(2) *jeśli $(i, j) \in \operatorname{supp} X$, to $i \leq j$;*

(3) $(i, i) \in \operatorname{supp} X$.

Twierdzenie. *Niech A i B będą trójkątnymi algebrami Nakayamy. Istnieje co najwyżej skończenie wiele parami nieizomorficznych lewostronnie quasi-odwracalnych A-B-bimodułów.*