Test van den Driesa
i algebry reprezentacyjnie skierowane

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

24 i 31 maja 2001

Będziemy rozważać algebry ustalonego wymiaru d nad ciałami algebraicznie domkniętymi. Przez RN oznaczać będziemy klasę algebr reprezentacyjnie nieskończonych, przez NRS klasę algebr, które nie są reprezentacyjnie skierowane, zaś przez NGL klasę algebr nieskończonego globalnego wymiaru. Algebrę (K, R) będziemy często utożsamiać z układem stałych strukturalnych $(\gamma_{i,j,k}) \in K^{d^3}$. Wiadomo, że wyżej wymienione klasy algebr są skończenie aksjomatyzowalne. Z powyższej obserwacji oraz z twierdzenia Tarskiego o eliminacji kwantyfikatorów dla ciał algebraicznie domkniętych wynika następujący fakt.

Twierdzenie. *Jeśli $\mathscr{C}$ jest jedną z klas* RN, NRS *lub* NGL, *to istnieją wielomiany $F_{i,j}$, $G_i \in \mathbb{Z}[X_{s,t,u} \mid 1 \leq s,t,u \leq d]$ takie, że algebra (K, R) należy do $\mathscr{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla układu stałych strukturalnych γ algebry (K, R) istnieje indeks i taki, że $F_{i,j}(\gamma) = 0$ dla wszystkich j oraz $G_i(\gamma) \neq 0$.*

Pojawia się problem, czy z warunku w powyższym twierdzenia można pozbyć się warunku $G_i(\gamma) \neq 0$. Warunki tej postaci nazywa się bezkwantyfikatorowymi formułami pozytywnymi. Wiadomo, że odpowiedź jest pozytywna w przypadku, gdy $\mathscr{C}$ = NRS i $\mathscr{C}$ = NGL. Pozytywna odpowiedź w przypadku $\mathscr{C}$ = RN byłaby wzmocnieniem twierdzenia Gabriela.

Twierdzenie (van den Driesa). *Niech $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ będzie formułą ze zmiennymi $x_1, \ldots, x_n$. Wtedy istnieje pozytywna formuła bezkwantyfikatorowa ψ, która jest równoważna φ dla każdego ciała algebraicznie domkniętego, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ciał algebraicznie domkniętych K i L, dla dowolnego homomorfizmu $\varphi : V \to L$, gdzie $V \subset K$ jest pierścieniem waluacyjnym, oraz dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in V$ mamy*

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n) \Rightarrow \varphi(f(a_1), \ldots, f(a_l)).$$

Niech K będzie ciałem. Powiemy, że podpierścień $V \subset K$ jest pierścieniem waluacyjnym, jeśli $x \in V$ lub $x^{-1} \in V$ dla każdego $x \in K$, $x \neq 0$. Na przykład $\mathbb{Z}_{(p)}$ jest pierścieniem waluacyjnym w $\mathbb{Q}$.

Niech G będzie liniowo uporządkowaną grupą abelową, tzn. jeśli $\alpha \leq \beta$, to $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Odwzorowanie $v : K \to G \cup \{\infty\}$ nazywamy waluacją ciała K, jeśli $v(xy) = v(x) + v(y)$, $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$ oraz $v(x) = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Jeśli $v : K \to G \cup \{\infty\}$ jest waluacją ciała K, to $V_v = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ jest podpierścieniem ciała K. Łatwo pokazać, że V_v jest pierścieniem waluacyjnym. Mamy następującą charakteryzację pierścieni waluacyjnych.

Twierdzenie. *Niech V będzie podpierścieniem ciała K. Wtedy V jest pierścieniem waluacyjnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje waluacja $v : K \to G \cup \{\infty\}$ taka, że $V_v = V$.*

Dowód. Jeśli V jest pierścieniem waluacyjnym, to definiuje się grupę G wzorem $G := K^*/V^*$, w której porządek zadany jest warunkiem $xV^* \leq yV^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{y}{x} \in V$. $\square$

Niech $V = V_v$ będzie pierścieniem waluacyjnym odpowiadającym waluacji $v : V \to K$. Wtedy $\mathfrak{m} := \{x \in V \mid v(x) > 0\}$ jest jedynym ideałem maksymalnym w V. Ponadto każdy skończenie generowany ideał w V jest główny. Istotnie, jeśli ideał I jest generowany przez elementy $a_1, \dots, a_n$, to możemy założyć, że $v(a_1) = \min(v(a_1), \dots, v(a_n))$. Wtedy $I = (a_1)$, gdyż $\frac{a_i}{a_1} \in V$. Można też pokazać, że każdy skończenie generowany beztorsyjny V-moduł jest wolny i płaski.

Wiadomo, że V jest całkowicie domknięty w K. Niech bowiem $a_{n-1}, \dots, a_0 \in V$ i $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ dla pewnego $x \in K$. Jeśli $x^{-1} \notin V$, to z definicji pierścienia waluacyjnego $x \in V$. Załóżmy zatem, że $x^{-1} \in V$. Mnożąc powyższe równanie przez x^{-n+1} otrzymujemy, że $x = -a_{n-1} - a_{n-2}x^{-1} - \dots - a_0x^{-n+1} \in V$.

Jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to $\operatorname{Im} v \subset G$ jest grupą podzielną. Jeśli bowiem $v(x) \in \operatorname{Im} v$ i n jest liczbą naturalna, to dla $y \in K$ takiego, że $y^n = x$, mamy $nv(y) = v(x)$. Ponadto ciało $R := V/\mathfrak{m}$ reszt pierścienia V jest algebraicznie domknięte. Niech bowiem $F \in R[X]$ będzie wielomianem stopnia dodatniego. Wtedy $F = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_0$, gdzie $b_i = a_i + \mathfrak{m}$. Wielomian $G := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ ma pierwiastek w K, który dzięki całkowitej domkniętości pierścienia V w K należy do V. Stąd warstwa tego pierwiastka jest pierwiastkiem wielomianu F. Na koniec dodajmy, że dowolna lokalizacja pierścienia waluacyjnego jest pierścieniem waluacyjnym.

Niech $v : K \to G \cup \{\infty\}$ będzie waluacją i $V := V_v$. Jeśli $\operatorname{Im} v \simeq \mathbb{Z}$, to pierścień V jest nazywany pierścieniem waluacji dyskretnej. Pierścień V

nazywamy zupełnym, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) elementów V takiego, że $v(x_{n+1} - x_n) > v(x_n - x_{n-1})$, istnieje element $x_0 \in V$ taki, że $v(x_0 - x_n) = v(x_{n+1} - x_n)$. Przykładem zupełnego pierścienia waluacji dyskretnej jest pierścień szeregów formalnych $K[[t]]$ wraz z waluacją, która szeregowi $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t_i$ przypisuje $\min\{i \mid a_i \neq 0\}$.

Twierdzenie. *Jeśli V jest pierścieniem waluacji dyskretnej wyznaczonym przez $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, to istnieją rozszerzenie $\hat{K}$ ciała K i waluacja $\hat{v} : \hat{K} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ takie, że $\hat{v}|_K = v$ oraz $\hat{V} := V_{\hat{v}}$ jest zupełny.*

Przypuśćmy, że $A = V^d$ jest V-modułem wolnym rangi d posiadającym strukturę V-algebry. Z modułem A stowarzyszamy d-wymiarową R-algebrę $A/\mathfrak{m}A \simeq A \otimes_V R$.

Twierdzenie. *Jeśli V jest zupełnym pierścieniem waluacji dyskretnej i $\varepsilon \in A/\mathfrak{m}A$ jest idempotentem, to istnieje idempotent $e \in A$ taki, że $e + \mathfrak{m}A = \varepsilon$.*

Dowód. Wiadomo, że istnieje $e_1 \in A$ taki, że $e_1 + \mathfrak{m}A = \varepsilon$. Jeśli $m_1 := e_1^2 - e_1$, to $m_1 \in \mathfrak{m}A$. Niech $e_2 := e_1 + m_1 - 2e_1 m_1$. Wtedy $e_2 + \mathfrak{m}A = \varepsilon$ i $e_2^2 - e_2 \in \mathfrak{m}^2 A$. Kontynuując tę procedurę i wykorzystując zupełność pierścienia V można skonstruować szukany idempotent e. □

Niech (K, v) będzie ciałem K wraz z waluacją v. Ciało L z waluacją w nazwiemy bezpośrednim rozszerzeniem ciała z waluacją (K, v), jeśli $K \subset L$, $w|_K = v$, $\operatorname{Im} v = \operatorname{Im} w$ i ciała reszt są takie same. Ciało K z waluacją v nazywamy maksymalnie zupełnym, jeśli nie ma właściwych bezpośrednich rozszerzeń.

Twierdzenie (Kaplansky)**.** *Ciało K z waluacją v jest maksymalnie zupełne, jeśli dla każdego odcinka Δ liczb porządkowych bez elementu ostatniego i dla każdego ciągu $(x_\gamma)_{\gamma \in \Delta} \subset K$ spełniającego warunek $v(x_\alpha - x_\beta) > v(x_\beta - x_\alpha)$ dla $\alpha > \beta > \gamma$, istnieje element $x \in K$ taki, że $v(x - x_\alpha) = v(x_{\alpha+1} - x_\alpha)$, $\alpha \in \Delta$.*

Twierdzenie (Kaplansky)**.** *Dla każdego ciała K z waluacją v istnieje bezpośrednie rozszerzenie $(\hat{K}, \hat{v})$, które jest maksymalnie zupełne.*

Twierdzenie. *Jeśli V jest maksymalnie zupełnym pierścieniem waluacji i $\varepsilon \in A/\mathfrak{m}A$ jest idempotentem, to istnieje idempotent $e \in A$ taki, że $e + \mathfrak{m}A = \varepsilon$.*

Niech φ będzie formułą bezkwantyfikatorową opisującą klasę NRS. Chcemy pokazać, że dla dowolnego homomorfizmu $f : K \supset V \to L$, gdzie K i L są algebraicznie domkniętymi ciałami, zaś V pierścieniem waluacyjnym, mamy $\varphi(a) \Rightarrow \varphi(f(a)) = 0$. Okazuje się, że zastępując V przez $V' := (V_{\operatorname{Ker} F}, (\operatorname{Ker} f)V_{\operatorname{Ker} f})$, można założyć, że $L = R$ i $f : V \to R$ jest rzutowaniem. Ponadto możemy przyjąć, że ciało z waluacją (K, v) jest maksymalnie zupełne. Dla V-algebry $A = V^d$ przez $A^{(K)}$ oznaczać będziemy K-algebrę $A \otimes_V K$. Okazuje się, że musimy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Niech (K, v) będzie maksymalnie zupełnym ciałem z waluacją, $V := V_v$ i $A = V^d$ będzie V-algebrą. Jeśli algebra $A/\mathfrak{m}A$ jest reprezentacyjnie skierowana, to algebra $A^{(K)}$ jest reprezentacyjnie skierowana.*

Funktor $- \otimes_V K : \operatorname{mod} V \to \operatorname{mod} K$ jest dokładny, podczas gdy funktor $-\otimes_V R : \operatorname{mod} V \to \operatorname{mod} R$ jest prawo dokładny i przeprowadza ciągi dokładne $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, gdzie Z jest beztorsyjny, w ciągi dokładne. Ponadto $X \otimes_V R \simeq X/\mathfrak{m}X$.

Dla przykładu zauważmy, że jeśli $A := \left[\begin{smallmatrix} V & V \\ 0 & V \end{smallmatrix}\right]$, to $A/\mathfrak{m}A = \left[\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right]$ i $A^{(K)} = \left[\begin{smallmatrix} K & K \\ 0 & K \end{smallmatrix}\right]$. Podobnie, gdy $A := VQ/I$, gdzie

$$Q := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ & \bullet \arrow[dl, "\gamma"] \\ \bullet & \end{tikzcd}$$

i $I = (m\alpha - \beta\gamma)$ dla $m \in \mathfrak{m}$, to $A/\mathfrak{m}A = RQ/(\beta\gamma)$, zaś $A^{(K)} = K(\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet)$. Ustalmy teraz $v, w \in V$ takie, że $vw \in \mathfrak{m}$. Jeśli $A := \begin{bmatrix} V & (v) \\ (w) & V \end{bmatrix}$, to $A \simeq VQ/I$, gdzie $Q = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "\alpha"] & \bullet \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$ i $I = (\alpha\beta - wve_1, \beta\alpha - vwe_2)$. Stąd $A/\mathfrak{m}A = RQ/(\alpha\beta, \beta\alpha)$, zaś $A^{(K)} = \left[\begin{smallmatrix} K & K \\ \mathfrak{m} & K \end{smallmatrix}\right]$. Załóżmy na koniec, że p jest nieparzystą liczbą pierwszą i $V := \mathbb{Z}_{(p)} \subset \mathbb{Q} =: K$. Jeśli $A := V[X]/(X^2 - X - p)$, to $A/\mathfrak{m}A = R[X]/(X^2 - X) \simeq R \times R$, gdzie $R := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Z drugiej strony $A^{(K)}$ jest ciałem. Zauważmy, że w uzupełnieniu V istnieje $\sqrt{1+4p} = 1 + 2p + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n (2n-3)!!}{n!} p^n$.

Ponieważ A jest skończenie generowanym wolnym V-modułem, więc $A = \varepsilon_1 A \oplus \cdots \oplus \varepsilon_n A$, gdzie moduły $\varepsilon_i A$, $i = 1, \ldots, n$, są nierozkładalne. Możemy założyć, że moduły $\varepsilon_1 A, \ldots, \varepsilon_m A$ stanowią pełny układ reprezentantów klas izomorfizmów modułów $\varepsilon_1 A, \ldots, \varepsilon_n A$. Wtedy $A/\mathfrak{m}A = (\varepsilon_1 + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A) \oplus \cdots \oplus (\varepsilon_n + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A)$ oraz z maksymalnej zupełności pierścienia V wynika, że moduły $(\varepsilon_i + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A)$, $i = 1, \ldots, n$, są nierozkładalne. Ponadto moduły $(\varepsilon_1 + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A), \ldots, (\varepsilon_m + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A)$ stanowią pełny układ reprezentantów klas izomorfizmów modułów $(\varepsilon_1 + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A), \ldots, (\varepsilon_n + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A)$. Niech $\varepsilon = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m$ oraz $B = \varepsilon A \varepsilon$. Wtedy $B/\mathfrak{m}B \simeq (\varepsilon + \mathfrak{m}A)(A/\mathfrak{m}A)(\varepsilon + \mathfrak{m}A)$ i jest to algebra bazowa Morita równoważna z $A/\mathfrak{m}A$. Zatem istnieją kołczan Q i ideał dopuszczalny I w RQ takie, że $B/\mathfrak{m}B \simeq RQ/I$.

Ustalmy epimorfizm $\pi : RQ \to B/\mathfrak{m}B$. Definiujemy $p : VQ \to B$ kładąc $p(e_i) = \varepsilon_i$ oraz $p(\alpha) = \varepsilon_{s(\alpha)} b_\alpha \varepsilon_{t(\alpha)}$ o ile $\pi(\alpha) = b_\alpha + \mathfrak{m}B$. Wiadomo, że $\operatorname{Im} p + \mathfrak{m}B = B$, więc z lematu Nakayamy wynika, że p jest surjekcją, zatem $B \simeq VQ/J$, gdzie $J := \operatorname{Ker} p$.

Musimy pokazać, że J jest ideałem dopuszczalnym w VQ, o ile algebra $B/\mathfrak{m}B$ jest reprezentacyjnie skierowana. Zauważmy, że $J = I + \mathfrak{m}B$, gdyż moduł B jest beztorsyjny. Ponieważ algebra $B/\mathfrak{m}B$ jest schurowska, więc $\operatorname{rk}_V \varepsilon_i B \varepsilon_j \leq 1$ dla dowolnych i, j. Zatem dla dowolnych dróg ω_1 i ω_2 z i do j istnieją ρ_1, $\rho_2 \in V$ takie, że $\rho_1\omega_1 + \rho_2\omega_2 \in J$. Jeśli $v(\rho_2) \geq v(\rho_1)$, to $\frac{\rho_2}{\rho_1} \in V$ oraz $\rho_1(\omega_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\omega_2) \in J$. Ponieważ moduł B jest beztorsyjny, więc $\omega_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}u_2 \in J$. Podobnie, $\omega_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2}\omega_1 \in J$, gdy $v(\rho_1) \geq v(\rho_2)$.

Pokażemy najpierw, że $J \subset VQ_1$. Załóżmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje relacja należąca do J o tym samym początku i końcu i. Z poprzednich uwag wynika, że możemy założyć, iż ta relacja jest postaci $\rho\omega$ dla pewnej drogi ω. Ponieważ $p(e_x) = \varepsilon_x \neq 0$, więc $e_x \notin J$, skąd $\rho = 0$, gdyż moduł B jest beztorsyjny.

Przypuśćmy teraz, że $J \not\subset VQ_2$. Wtedy istnieje relacja należąca do J zawierająca pewną strzałkę α. Podobnie jak poprzednio możemy założyć, że relacja ta jest postaci jednej z postaci $\alpha + \rho\omega$ lub $\rho\alpha + \omega$ dla $\rho \in V$ i pewnej drogi ω. W pierwszym przypadku otrzymujemy, że $\alpha + (\rho + \mathfrak{m}B)\omega \in I$, co jest sprzeczne z dopuszczalnością ideału I. W drugim przypadku mamy, że $(\rho + \mathfrak{m}B)\alpha + \omega \in I$. Dopuszczalność ideału I implikuje, że $\rho \in \mathfrak{m}B$, więc $\omega \in I$, ale taka konfiguracja dróg nie może się pojawić w kołczanie algebry skierowanej $\overline{B}$.

Zauważmy, że algebra $B^{(K)}$ jest Morita równoważna z $A^{(K)}$. Dla dowodu twierdzenia wystarczy zatem udowodnić, że jeśli algebra $B/\mathfrak{m}B$ jest reprezentacyjnie skierowana, to $B^{(K)}$ także. Ponadto mamy $B = VQ/J$, $B/\mathfrak{m}B = RQ/I$ i $B^{(K)} = KQ/J^{(K)}$.

Niech (Q, I) będzie takim kołczanem ograniczonym, że algebra $C := LQ/I$ jest schurowska. Niech $\operatorname{rad} e_x C = M_{x,1} \oplus \cdots \oplus M_{x,m_x}$, $x \in Q_0$ będzie rozkładem na sumę prostą modułów nierozkładalnych. Wtedy układ $(\mathbf{dim}\, e_x C, \{\mathbf{dim}\, M_{x,j}\})_{x \in Q_0}$ będziemy nazywali danymi kombinatorycznymi algebry C.

Lemat. *Jeśli algebra $B/\mathfrak{m}B$ jest reprezentacyjnie skierowana, to dane kombinatoryczne algebr $B/\mathfrak{m}B$ i $B^{(K)}$ są takie same.*

Dowód. Ustalmy wierzchołek i. Oczywiście mamy równość $\mathbf{dim}\, e_i B/\mathfrak{m}B = \mathbf{dim}\, e_i B^{(K)}$. Niech $\operatorname{rad} e_i B/\mathfrak{m}B = M_{x,1} \oplus \cdots \oplus M_{x,m_i}$ i $\operatorname{rad} e_i B^{(K)} = N_{x,1} \oplus \cdots \oplus N_{x,n_i}$. Zbiór $\{\mathbf{dim}\, M_{x,j}\}$ zależy jedynie od zbioru $\{\alpha : y \to z \mid y, z \in \operatorname{supp} e_i B/\mathfrak{m}B, (-) \cdot \alpha : e_i(B/\mathfrak{m}B)e_j \to e_i(B/\mathfrak{m}B)e_k = 0\}$. Podobnie zbiór

$\{\mathbf{dim}\, N_{x,j}\}$ zależy jedynie od zbioru $\{\alpha : y \to z \mid y, z \in \operatorname{supp} e_i B^{(K)}, (-) \cdot \alpha : e_i B^{(K)} e_j \to e_i B^{(K)} e_k = 0\}$. Przypuśćmy, że istnieje strzałka α, która należy tylko do jednego z powyższych zbiorów. Wtedy istnieją $y, z \in \operatorname{supp} \operatorname{rad} e_i B/\mathfrak{m}B$ takie, że $\alpha : e_i(B/\mathfrak{m}B)e_j \to e_i(B/\mathfrak{m}B)e_k$ jest zerowe. Istnieją drogi ω_1 z x do y i ω_2 z x do z takie, że $\omega_2 \notin J$, zaś $\alpha\omega_1 \in I$, co jest niemożliwe, gdyż algebra $B/\mathfrak{m}B$ jest reprezentacyjnie skierowana. □

Mamy też następujący fakt.

Twierdzenie. *Niech (L, C) i (L', C') będą algebrami bazowymi nad ciałami algebraicznie domkniętymi L i L' z takim samym kołczanem Gabriela i równymi danymi kombinatorycznymi. Wtedy $e_x C$ należy do składowej preprojektywnej $\mathscr{P}_x(C)$ kołczanu $\Gamma(C)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_x C'$ należy do preprojektywnej składowej $\mathscr{P}_x(C')$ kołczanu $\Gamma(C')$. Ponadto istnieje izomorfizm kołczanów z translacją $\mathscr{P}_x(C) \to \mathscr{P}_x(C')$ zachowujący wektory wymiarów.*

Powyższe twierdzenie kończy dowód.