O zbiorach i funkcjach konstruktywnych

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

11 październik 2001

Twierdzenie (Tarski). *Niech $\phi(x_1,\dots,x_n)$ będzie formułą 1. rzędu zapisaną w języku teorii ciał ze zmiennymi wolnymi x_1, …, x_n. Wtedy istnieją wielomiany $F_{i,j}$, $G_i \in \mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$, $i = 1,\dots,s$, $j = 1,\dots,r_i$, takie, że dla dowolnego algebraicznie domkniętego ciała K oraz dla dowolnego układu $a = (a_1,\dots,a_n) \in K^n$ formuła $\phi(a)$ jest spełniona w K wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego i mamy $F_{i,1}(a) = \dots = F_{i,r_i}(a) = 0$ i $G_i(a) \neq 0$.*

Dla przykładu rozważmy formułę $\phi(x)$ postaci $\exists_y x_n y^n + \dots + x_1 y + x_0 = 0$. Formuła $\phi(a)$ jest spełniona w ciele algebraicznie domkniętym K wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 = 0$ lub $a_i \neq 0$, $i = 1,\dots,n$.

Niech $\phi(x)$ będzie formułą $\exists_y(y^2 + x = 0 \wedge xy - 1 = 0)$. Wtedy $\phi(a)$ jest spełnione w ciele algebraicznie domkniętym wtedy i tylko wtedy, gdy $a \neq 0$ i $a^3 + 1 = 0$.

Zbiór $C \subset K^n$ nazywamy konstruktywnym, jeśli istnieją wielomiany $S_{i,j}$, $T_i \in K[X_1,\dots,X_n]$ takie, że C jest zbiorem tych $a \in K^n$, dla których istnieje i takie, że $S_{i,j}(a) = 0$ i $T_i(a) \neq 0$. Jeśli C jest zbiorem konstruktywnym, to C jest skończoną sumą zbiorów, które są przekrojami zbiorów nieprzywiedlnych domkniętych i zbiorów głównych otwartych.

Zbiór $D \subset K^n$ nazywamy elementarnie definiowalnym przy pomocy układu $b = (b_1,\dots,b_m) \in K^m$, o ile istnieje formuła $\phi(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ taka, że D jest zbiorem tych $a \in K^n$, dla których spełniona jest formuła $\phi(a,b)$. Z twierdzenia Tarskiego wynika, że zbiory konstruktywne w K^n to dokładnie zbiory elementarnie definiowalne. Istotnie, jeśli D jest zbiorem elementarnie definiowalnym przy pomocy stałych b i ϕ jest stosowną formułą definiująca zbiór D, to wtedy na mocy twierdzenia Tarskiego zbiór $(\alpha,\beta) \in K^{n+m}$ spełniających $\phi(\alpha,\beta)$ jest zbiorem konstruktywnym. Stąd łatwo wynika konstruktywność zbioru D.

Niech A będzie skończenie wymiarową algebra z bazą liniową r_1, …, r_l. Wtedy dla ustalonej liczby naturalnej d mamy rozmaitość $\mathrm{mod}_A(d)$ A-modułów wymiaru d. Niech $\mathrm{ind}_A(d)$ będzie podrozmaitością modułów nierozkładalnych w $\mathrm{mod}_A(d)$. Zauważmy, że $M \in \mathrm{mod}_A(d)$ należy do $\mathrm{ind}_A(d)$

wtedy i tylko wtedy, gdy $f^d = 0$ dla każdego nieodwracalnego endomorfizmu modułu M, co można zapisać jako formułę 1. rzędu. Zatem zbiór $\mathrm{ind}_A(d)$ jest elementarnie definiowalny, a więc konstruktywny.

Konstruktywność zbioru $\mathrm{ind}_A(d)$ pokazuje się zwykle wykorzystując następujące twierdzenie.

Twierdzenie (Chevalley)**.** *Jeśli $f : K^m \to K^n$ jest odwzorowaniem regularnym i $C \subset K^m$ zbiorem konstruktywnym, to $f(C)$ też jest zbiorem konstruktywnym.*

Dowód. Istotnie, jeśli C jest zdefiniowany przy użyciu stałych a przez formułę $\phi(x, a)$, to $f(C)$ jest zdefiniowany przez formułę $\exists_{b \in K^m} \phi(b, a) \wedge y = f(b)$. Zatem $f(C)$ jest elementarnie definiowalny przy użyciu stałych a i współczynników funkcji f. $\square$

Przypuśćmy, że w rozmaitości $\mathrm{mod}_A(d)$ mamy ciągłą rodzinę modułów $K \ni \lambda \in M_\lambda$. Chcemy skonstruować funkcję częściową $p : \mathrm{mod}_A(d) \to K$ taką, że $M_\lambda \mapsto \lambda$.

Niech A będzie algebrą dróg kołczanu $\alpha \circlearrowright \cdot \circlearrowleft \beta$ modulo relacje $\alpha^2 = \beta^2 = \alpha\beta = \beta\alpha = 0$. Wiemy, że $\mathrm{mod}_A(2)$ jest zbiorem tych par 2×2 macierzy (X, Y), dla których $X^2 = Y^2 = XY = YX = 0$. Mamy parametryzację $K \ni \lambda \mapsto \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) \in \mathrm{mod}_A(2)$. Przeciwne odwzorowanie można zadać wzorem $p(X, Y) = \begin{cases} \frac{y_{12}}{x_{12}} & \text{gdy } x_{12} \neq 0, \\ \frac{y_{21}}{x_{21}} & \text{gdy } x_{21} \neq 0. \end{cases}$

Funkcję częściową $f : K^n \to K$, która jako podzbiór $K^n \times K$ jest konstruktywna, nazywać będziemy funkcją konstruktywną. Dziedzinę funkcji f oznaczać będziemy przez $\mathrm{Dom}\, f$. Jeśli C jest podzbiorem K^n to możemy mówi o obcięciu $f|_C$ funkcji f do zbioru C, której dziedziną jest $C \cap \mathrm{Dom}\, f$.

Fakt. *Niech A będzie algebrą nieskończonego typu. Wtedy istnieje liczba naturalna d i funkcja konstruktywna f taka, że* $\mathrm{Dom}\, f \subset \mathrm{mod}_A(d)$, $\mathrm{Dom}\, f$ *jest* $\mathrm{Gl}(d)$*-niezmienniczy, funkcja f jest* $\mathrm{Gl}(d)$*-niezmiennicza oraz zbiór wartości f jest koskończony w K.*

Dowód. Z teorii reprezentacji algebr nieskończonego typu reprezentacyjnego wynika, że dla pewnej liczby naturalnej d i wielomianu h istnieje $K[T]_h$-A-bimoduł M taki, że funktor $(-) \otimes_{K[T]_h} M : \mathrm{ind}_{K[T]_h}(1) \to \mathrm{mod}_A(d)$ przeprowadza moduły nieizomorficzne w nieizomorficzne. Funktor $(-) \otimes_{K[T]_h} M$ indukuje odwzorowanie $m : \mathcal{U}_h \to \mathrm{mod}_A(d)$.

Definiujemy f jako zbiór tych par $(x, \lambda) \in \mathbb{M}(d, d, K)^d \times K$, dla których $x \in \mathrm{mod}_A(d)$, $h(\lambda) \neq 0$ oraz istnieje $g \in \mathrm{Gl}(d)$ takie, że $gxg^{-1} = m(\lambda)$. Zbiór ten jest elementarnie definiowalny przy pomocy stałych strukturalnych algebry A oraz współczynników funkcji h i m. $\square$

Twierdzenie. *Jeśli* $f : K^n \to K$ *jest funkcją konstruktywną, to* $\operatorname{Dom} f = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$*,gdzie* D_i *jest nieprzywiedlnym zbiorem konstruktywnym oraz istnieją wielomiany* A_i*,* $B_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ *takie, że* $f|_{D_i} = \frac{A_i}{B_i}$*, gdy* $\operatorname{char} K = 0$ *lub* $f(x) = \sqrt[p^{n_i}]{\frac{A_i}{B_i}}$ *dla pewnego* $n_i \geq 0$*, gdy* $\operatorname{char} K = p > 0$.