Oswojone kategorie modułów z filtracją oraz podprojektywne reprezentacje posetów nad algebrą uniseryjną

na podstawie referatu Daniela Simsona

18 października 2001

Niech R będzie przemiennym artinowskim pierścieniem uniseryjnym. Dla pierścienia R przez m oznaczać będziemy najmniejszą liczba naturalną n taką, że $J(R)^n = 0$, gdzie $J(R)$ jest radykałem Jacobsona pierścienia R. Wtedy każdy ideał w R jest postaci $J(R)^j$ dla $j = 1, \dots, m$. Przykładami takich pierścieni są $\mathbb{Z}_{p^m}$ dla liczby pierwszej p oraz $F_m := K[t]/(t^m)$ dla ciała K.

Definiujemy kategorię $\mathscr{C}(s, R)$ s-łańcuchów, której obiektami są ciągi $C = (C_1 \subset \cdots \subset C_s)$ skończenie wymiarowych R-modułów, a morfizmy określone są w naturalny sposób. Celem jest opisanie typu reprezentacyjnego kategorii $\mathscr{C}(s, R)$ w zależności od s i m.

Można pokazać, że kategoria $\mathscr{C}(s, R)$ jest kategorią Krulla–Schmidta. Ponadto $\mathscr{C}(s, R)$ posiada dostatecznie wiele relatywnie injektywnych i relatywnie projektywnych obiektów, oraz obiekty relatywnie projektywne pokrywają się z obiektami relatywnie injektywnymi. Wiadomo też, że kategoria $\mathscr{C}(s, R)$ ma ciągi Auslandera–Reiten.

Zauważmy, że mamy pełne wierne i dokładne zanurzenie $E : \mathscr{C}(s, R) \to \mathbb{T}_s(R)$, gdzie $\mathbb{T}_s(R)$ jest algebrą górnotrójkątnych $s \times s$-macierzy. Gdy R jest skończenie wymiarową algebrą nad ciałem algebraicznie domkniętym K, to typ reprezentacyjny $\mathscr{C}(s, R)$ możemy zdefiniować jako typ obrazu funktora E. W tej sytuacji mamy twierdzenie o dychotomii.

Twierdzenie. *Kategoria $\mathscr{C}(s, R)$ jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków.*

(F1) $s = 1$.

(F2) $m \leq 5$ *i* $s = 2$.

(F3) $m \leq 3$ *i* $3 \leq s \leq 4$.

(F4) $m \leq 2$ *i* $s \geq 5$.

Twierdzenie. *Jeśli* $R = F_m$ *dla ciała algebraicznie domkniętego* K*, to kategoria* $\mathscr{C}(s, R)$ *jest dzikiego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków.*

(W1) $m \geq 7$ *oraz* $s \geq 2$

(W2) $m \geq 5$ *oraz* $s \geq 3$

(W3) $m \geq 4$ *oraz* $s \geq 5$.

(W4) $m \geq 3$ *oraz* $s \geq 6$.

Twierdzenie. *Jeśli* $R = F_m$ *dla ciała algebraicznie domkniętego* K*, to kategoria* $\mathscr{C}(s, R)$ *jest nieskończonego i oswojonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków.*

(T1) $m = 6$ *oraz* $s = 2$.

(T2) $m = 4$ *oraz* $3 \leq s \leq 4$.

(T3) $m = 3$ *oraz* $s = 5$.

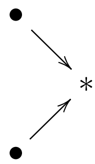
Niech I będzie skończonym posetem z jedynym elementem maksymalnym $*$. Przez $\mathrm{fspr}(I, R)$ oznaczać będziemy kategorię, której obiektami są takie układy $X = (X_i)_{i \in I}$, że X_i jest skończenie generowanym R-modułem, X_* jest projektywno–injektywny oraz $X_i \subset X_*$. Okazuje się, że typ reprezentacyjny kategorii $\mathscr{C}(s, R)$ jest taki sam jak $\mathrm{fspr}(\mathbb{A}_s^*, R)$.

Twierdzenie. *Jeśli* I *jest skończonym posetem, to* $\mathrm{fspr}(I, R)$ *jest skończonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, spełniony jest jeden z następujących warunków.*

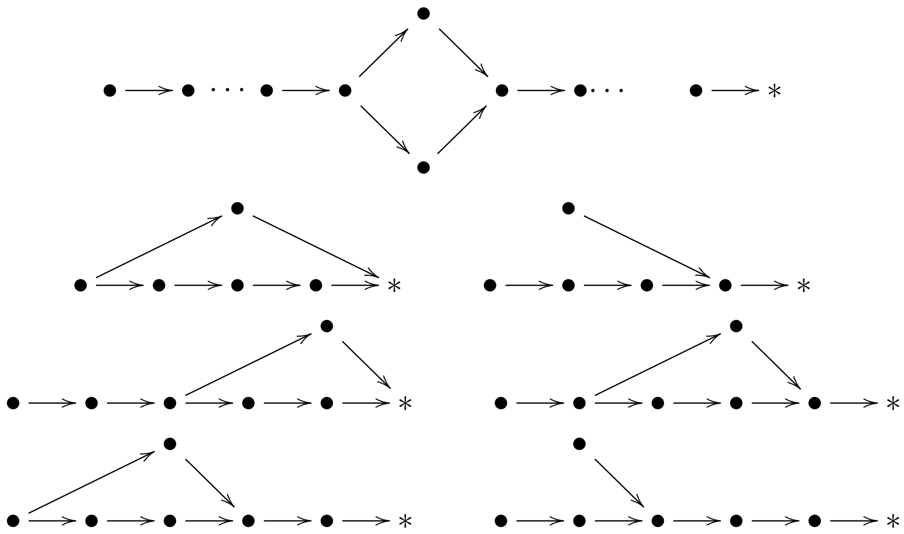
(1) $|I| = 1$ *oraz* $m \geq 1$*, lub* $m = 1$ *oraz* I *nie zawiera posetów krytycznych* $\mathscr{K}(1, 1, 1, 1)$, $\mathscr{K}(2, 2, 2)$, $\mathscr{K}_3$, $\mathscr{K}_4$ *i* $\mathscr{K}_5$ *z listy Kleinera.*

(2) *Poset* I *jest liniowy,* $|I| \geq 2$ *oraz para* $(m, |I| - 1)$ *spełnia jeden z warunków (F1)–(F4).*

(3) *Poset* I *nie jest liniowy oraz para* (m, I) *spełnia jeden z warunków (F5)–(F6).*

(F5) $m = 3$ *oraz* $I =$  .

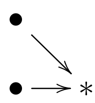
(F6) $m = 2$ *oraz* I *jest jednopikowym podposetem jednego z następujących posetów.*

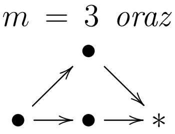
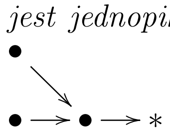


Twierdzenie. *Jeśli* I *jest skończonym posetem oraz* $m \geq 2$*, to* $\operatorname{fspr}(I, F_m)$ *jest nieskończonego i oswojonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jeden z następujących warunków.*

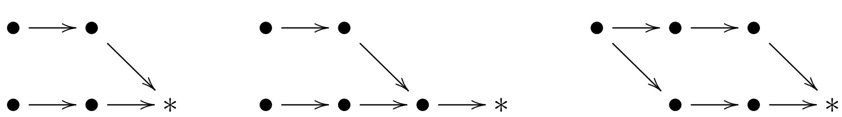
(1) *Poset* I *jest liniowy oraz* $(m, |I|)$ *jest jedną z par* $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(4, 5)$, $(3, 6)$.

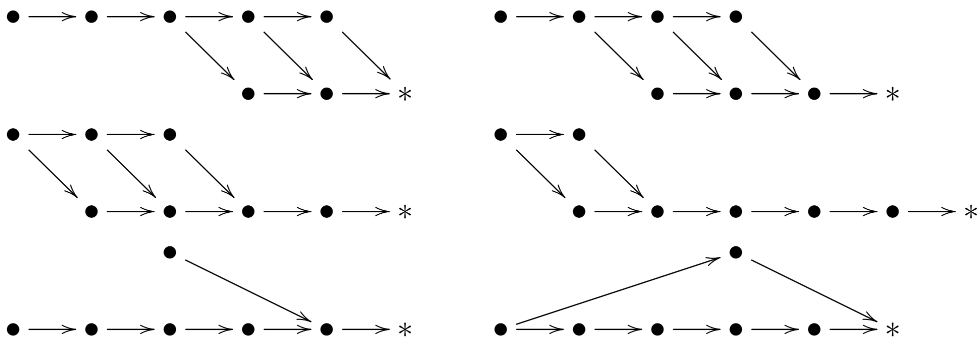
(2) *Poset* I *nie jest liniowy oraz para* $(m, |I|)$ *spełnia jeden z poniższych warunków.*

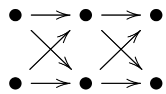
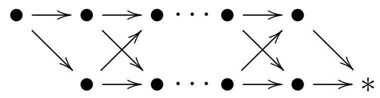
   (a) $m = 4$ *oraz* $I =$  .

   (b) $m = 3$ *oraz* I *jest jednopikowym podposetem jednego z posetów*  *i*  .

   (c) $m = 2$ *oraz* I *jest jednopikowym podposetem jednego z posetów*





Twierdzenie. *Jeśli I jest skończonym posetem i $m \geq 2$, to* $\mathrm{fspr}(I, F_m)$ *jest niewielomianowego oswojonego typu reprezentacyjnego wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 2$ oraz*  $\subset I \subset$  .