Uniwersalna algebra obejmująca algebry Lie

na podstawie referatu Justyny Kosakowskiej

6 i 13 grudnia 2001

Niech K będzie ciałem. Przestrzeń liniową L nad ciałem K wraz z dwuliniową operacją $[-,-] : L \times L \to L$ nazywamy algebrą Lie, jeśli $[x,x] = 0$ oraz $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ dla dowolnych $x, y, z \in L$. Powyższe warunki implikują, że $[x,y] + [y,z] = 0$. Warunek ten jest równoważny warunkowi $[x,x] = 0$, gdy $\operatorname{char} K \neq 2$.

Dla podprzestrzeni liniowych $X, Y \subset L$ przez $[X,Y] \subset L$ oznaczać będziemy podprzestrzeń liniową generowaną przez elementy postaci $[x,y]$, $x \in X$, $y \in Y$.

Przekształcenie liniowe $f : L \to L'$ nazywamy homomorfizmem algebr Lie, jeśli $[f(x), f(y)] = f([x,y])$. Podprzestrzeń liniową $L' \subset L$ nazywamy podalgebrą Lie, jeśli $[L', L'] \subset L$. Podobnie, L' nazywamy ideałem, o ile $[L', L] \subset L'$ (równoważnie, $[L, L'] \subset L'$). Jeśli $f : L \to L'$ jest homomorfizmem algebr Lie, to $\operatorname{Ker} f$ jest ideałem, zaś $\operatorname{Im} f$ jest podalgebrą. Gdy $L' \subset L$ jest ideałem, to w przestrzeni L/L' mamy indukowaną strukturę algebry Lie. W iloczynie kartezjańskim $L_1 \times \cdots \times L_n$ działanie po współrzędnych określa strukturę algebry Lie, którą nazywamy produktem algebr $L_1, \ldots, L_n$. Algebrę Liego nazywamy abelową, jeśli $[x,y] = 0$ dla wszystkich x i y.

Ustalmy liczbę naturalną n. W algebrze macierzy $\mathbb{M}(n,K)$ określamy strukturę algebry Lie kładąc $[f,g] = fg - gf$. Powyższą algebrę oznaczać będziemy przez $\mathfrak{gl}(n,K)$ i nazywać główną liniową algebrą Lie. Podalgebrę $\mathfrak{sl}(n,K) := \{f \in \mathfrak{gl}(V) \mid \operatorname{tr} f = 0\}$ oznacza się też $\mathbb{A}_{n-1}$ i nazywa specjalną liniową algebrą Lie. Algebrę $\mathfrak{sp}(2n,K) := \{f \in \mathfrak{gl}(2n,k) \mid sf - f^{\mathrm{T}}s = 0\}$, gdzie $s := \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$, nazywamy symplektyczną algebrą Lie i oznaczamy $\mathbb{C}_n$. Podobnie, definiujemy $\mathbb{B}_n := \mathfrak{o}(2n+1,k) := \{f \in \mathfrak{gl}(2n+1,k) \mid sf - f^{\mathrm{T}}s = 0\}$, gdzie $s := \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$, oraz $\mathbb{D}_n := \mathfrak{o}(2n,k) := \{f \in \mathfrak{gl}(2n,k) \mid sf - f^{\mathrm{T}}s = 0\}$, gdzie $s := \left[\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Algebry powyższe nazywamy ortogonalnymi algebrami Liego.

Przez $\mathfrak{t}(n,k)$ oznaczać będzie algebrę macierzy górnotrójkątnych, przez $\mathfrak{n}(n,k)$ algebrę macierzy ściśle górnotrójkątnych oraz przez $\mathfrak{d}(n,k)$ algebrę macierzy diagonalnych. Mamy $\mathfrak{t}(n,k) = \mathfrak{n}(n,k) \oplus \mathfrak{d}(n,k)$ jako przestrzeń liniowa.

Algebrę Lie nazywamy prostą, gdy nie jest abelowa oraz nie posiada nietrywialnych ideałów.

Twierdzenie. *Nad ciałem liczb zespolonych algebry $\mathbb{A}_l$, $l \geq 1$, $\mathbb{B}_l$, $l \geq 2$, $\mathbb{C}_l$, $l \geq 3$, $\mathbb{D}_l$, $l \geq 4$, $\mathbb{G}_2$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ są proste i każda prosta $\mathbb{C}$-algebra Lie jest izomorficzna z jedną z powyższych algebr.*

Przez $\mathscr{T}(V)$ oznaczać będziemy algebrą tensorową i $\mathscr{S}(V)$ algebrą symetryczną przestrzeni liniowej V. Niech $\sigma : \mathscr{T}(V) \to \mathscr{S}(V)$ będzie kanonicznym rzutem.

Uniwersalną algebrą obejmującą algebry Lie L nazywamy parę $(\mathscr{U}, i)$, gdzie $\mathscr{U}$ jest łączną algebrą z 1 oraz $i : L \to \mathscr{U}$ jest przekształceniem liniowym, przy czym $i([x,y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$, oraz dla każdej łącznej K-algebry z jedynką U oraz dowolnego przekształcenia liniowego $j : L \to U$ takiego, że $j([x,y]) = j(x)j(y) - j(y)j(x)$, istnieje dokładnie jeden homomorfizm algebr $\Phi : \mathscr{U} \to U$ taki, że $j = i\Phi$.

Twierdzenie. *Niech L będzie algebrą Lie nad ciałem K. Istnieje dokładnie jedna, z dokładnością do izomofizmu, uniwersalna algebra obejmująca algebry L, którą będziemy oznaczać $\mathscr{U}(L)$.*

Dowód. Dowód jedyności jest standardowy.

Niech J będzie dwustronnym ideałem w $\mathscr{T}(L)$ generowany przez wszystkie elementy postaci $x \otimes y - y \otimes x - [x,y]$, $x, y \in L$. Kładziemy $\mathscr{U}(L) := \mathscr{T}(L)/J$. Niech $\pi : \mathscr{T}(L) \to \mathscr{U}(L)$ będzie naturalnym rzutem oraz $i := \pi|_L$. Bezpośrednie rachunki pokazują, że spełnione są warunki z definicji uniwersalnej algebry obejmującej. □

Zauważmy, że gdy L jest abelową algebrą Lie, to $\mathscr{U}(L) = \mathscr{S}(L)$.

Niech S będzie zbiorem liniowo uporządkowanym takim, że x_s, $s \in S$, jest bazą algebry Lie L. Algebra $\mathscr{U}(L)$ jest generowana jako przestrzeń liniowa przez elementy $i(x_{s_1}) \cdots i(x_{s_n})$, $n \geq 0$.

Twierdzenie (Poincaré–Borkhoff–Witt)**.** *W powyższej sytuacji elementy $i(x_{s_1}) \cdots i(x_{s_n})$, $s_1 \leq \cdots \leq s_n$, $n \geq 0$, tworzą bazę algebry $\mathscr{U}(L)$.*

Dowód. Jednomianem będziemy nazywać każdy element postaci $x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}$, $p \geq 0$. Liczbę p nazywamy stopniem jednomianu p. Jeśli $s_1 \leq \cdots \leq s_p$, to mówimy, że jednomian $x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}$ jest standardowy. Dla każdego $p \geq 0$ niech T_0^p będzie przestrzenią liniową generowaną przez standardowe jednomiany stopnia p oraz $T_0 = \sum_p T_0^p$. Jeśli $t = x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}$ jest jednomianem, to przez $\mathrm{ind}(t)$ oznaczymy ilość takich par (r, s), że $r < s$ oraz $i_r > i_s$. Przez T_d^p będziemy oznaczać przestrzeń liniową generowaną przez jednomiany t stopnia p o własności $\mathrm{ind}(t) = d$.

Musimy pokazać, że $\mathscr{T}$ jako przestrzeń liniowa jest równa $T_0 \oplus J$. Pokażemy najpierw, ze $\mathscr{T} = T_0 + J$. W tym celu wystarczy pokazać, że $T^p L \subset T_0 + J$. Ten fakt jest oczywisty dla $p = 0$ i $p = 1$. Załóżmy zatem, że $p \geq 2$. Ponieważ $T^p L = \sum_{d \geq 0} T_d^p$, więc wystarczy uzasadnić, że $T_d^p \subset T_0 + J$. Dla $d = 0$ teza jest oczywista. Niech $d > 0$ oraz $t = x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p} \in T_d^p$. Ustalmy indeks r taki, że $s_r > s_{r+1}$ oraz położmy $t' = x_{s_1} \cdots x_{s_{r-1}} x_{s_{r+1}} x_{s_r} x_{s_{r+2}} \cdots x_{s_p}$. Wtedy $t - t' \in J$ oraz $t' \in T_{d-1}^r \subset T_0 + J$ na mocy założenia indukcyjnego, co kończy pierwszą część dowodu.

Pokażemy teraz, ze $T_0 \cap J = 0$. Skonstruujemy endomorfizm liniowy $f : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ taki, że $f|_{T_0} = \mathrm{Id}_{T_0}$ oraz $f|_J = 0$. Ten drugi warunek będzie spełniony, jeśli pokażemy, że $f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}) = f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_{r+1}} \otimes x_{s_r} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}) + f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes [x_{s_r}, x_{s_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{s_p})$.

Konstrukcja f jest indukcyjna. Kładziemy $f(t) := t$ dla $t \in T^0 L + T^1 L$. Aby zdefiniować f na $T^p L$, $p \geq 2$, wystarczy zdefiniować f dla jednomianów $t \in T^p L$. Gdy $\mathrm{ind}(t) = 0$, to definiujemy $f(t) = t$. Gdy $\mathrm{ind}(t) > 0$ dla $t = x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}$, to istnieje indeks r taki, że $\mathrm{ind}(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_{r+1}} \otimes x_{s_r} \cdots \otimes x_{s_p}) = d - 1$. Ponieważ w powyższej sytuacji $x_{s_1} \otimes \cdots \otimes [x_{s_r}, x_{s_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{s_p} \in T^{p-1} L$, więc musimy położyć $f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}) := f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_{r+1}} \otimes x_{s_r} \otimes \cdots \otimes x_{s_p}) + f(x_{s_1} \otimes \cdots \otimes [x_{s_r}, x_{s_{r+1}}] \otimes \cdots \otimes x_{s_p})$. Trzeba sprawdzić, że powyższa definicja nie zależy od wyboru r. $\square$

Mamy $\mathscr{U}(\mathfrak{gl}(2, k)) = K[X, Y, Z, T]/(XY - YX - Y, XZ - ZX + Z, XT - TX, YZ - ZY - X - T, YT - TY - Y, ZT - TZ + Z)$. Ogólniej, jeśli L jest skończenie wymiarową algebrą Lie z bazą $x_1, \ldots, x_n$, oraz a_{ij}^k są stałymi strukturalnymi algebry L, tzn. mamy $[x_i, x_j] = \sum_k a_{ij}^k x_k$, to $\mathscr{U}(L) = K[X_1, \ldots, X_n]/(X_i X_j - X_j X_i - \sum_k a_{ij}^k X_k)$.

Niech $\rho' : L \to \mathrm{End}_K(V)$ będzie reprezentacją algebry Lie L w przestrzeni liniowej V. Z własności uniwersalności algebry obejmującej istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\rho : \mathscr{U}(L) \to \mathrm{End}_K(V)$ taki, że $\rho' = \rho i$. Z drugiej strony, dla każdej reprezentacji $\rho : \mathscr{U}(L) \to \mathrm{End}_K(V)$ mamy reprezentację $\rho' := \rho i$ algebry L. W ten sposób otrzymujemy izomorfizm kategorii $F : \mathrm{Rep}(\mathscr{U}(L)) \to \mathrm{Rep}(L)$.

Opiszemy teraz reprezentacje algebry $\mathfrak{sl}(2, K)$ w sytuacji, gdy K jest ciałem algebraicznie domkniętym i $\mathrm{char}\, K = 0$. W $\mathfrak{sl}(2, K)$ mamy następującą bazę $e = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $f = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $h = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Mamy równości $[e, f] = h$, $[e, h] = -2e$ i $[f, h] = 2f$.

Dla każdego $r \geq 0$ określamy reprezentację $\rho_r : \mathfrak{sl}(2, k) \to \mathbb{M}(r + 1, K)$

poprzez warunki

$$\rho_r(h) := \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -r \end{pmatrix}, \ \rho_r(f) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\rho_r(e) := \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mu_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mu_i := i(r-i+1)$, $i = 1, \dots, r$.

Wtedy reprezentacja ρ_r jest prosta oraz dowolna $(r+1)$-wymiarowa prosta reprezentacja algebry $\mathfrak{sl}(2,k)$ jest równoważna z ρ_r.

Istotnie, niech $W \neq 0$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na ρ_r. Ustalmy $w \in W$, $w \neq 0$. Istnieje $m \geq 0$ takie, że $\rho(f)^m(w) = \lambda e_{r+1}$ dla $\lambda \neq 0$. Ponieważ $\rho(e)^{r+1-i} e_{r+1} = \mu e_i$, $\mu \neq 0$, więc $W = K^{r+1}$.

Przypuśćmy teraz, że $\rho : \mathfrak{sl}(2,K) \to \operatorname{End}_K(V)$ jest reprezentacją algebry $\mathfrak{sl}(2,K)$. Jeśli v jest wektorem własnym odwzorowania $\rho(h)$ z wartością własną μ, to $\rho(h)\rho(e)v = (\mu+2)\rho(e)v$, $\rho(h)\rho(f)v = (\mu-2)\rho(f)v$. Ponadto, gdy $\rho(e)v = 0$ i $v_i := \rho(f)^i v$, $i \geq 0$, to $\rho(e)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$ dla $i > 0$.

Załóżmy teraz, że reprezentacja ρ jest prosta i $\dim_K V = r+1$. Istnieje wektor własny v odwzorowania $\rho(h)$, gdyż ciało K jest algebraicznie domknięte. Istnieje $m \geq 0$ takie, że $\rho(e)^m v = 0$, w przeciwnym bowiem wypadku otrzymalibyśmy nieskończony ciąg $\rho(e)^m v$ wektorów własnych odwzorowania $\rho(h)$ należących do różnych wartości własnych. Bez straty ogólności możemy założyć, że $m = 0$. Niech $v_i := \rho(f)^i v$, $i \geq 0$. Podobnie jak poprzednio istnieje $n \geq 0$ takie, że $v_n \neq 0$ i $v_{n+1} = 0$. Mamy $\rho(h)v_i = (\mu - 2i)v_i$, $\rho(e)v_i = i(\mu - i + 1)v_{i-1}$, $i > 0$, zatem podprzestrzeń generowana przez wektory v_i jest niezmiennicza, co wobec prostoty ρ oznacza, że jest równa V. Ponieważ v_0, …, v_n są wektorami własnymi odwzorowania $\rho(h)$ należącymi do różnych wartości własnych oraz $v_i = 0$ dla $i > n$, więc wektory v_0, …, v_n tworzą bazę przestrzeni V. W szczególności $m = r$. Ponadto $0 = \rho(e)v_{r+1} = (r+1)(\mu - r)v_r$, zatem $\mu = r$. Odwzorowanie $v_i \mapsto e_{i+1}$, $i = 0, \dots, r$, ustala równoważność reprezentacji ρ i ρ_r.