Kwantowa algebra obejmująca $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$

na podstawie referatu Piotra Malickiego

10 stycznia 2002

W algebrze Liego $\mathfrak{gl}(2) = \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ mamy bazę liniową

$$X := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ Y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } I := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nawias Liego w algebrze $\mathfrak{gl}(2)$ spełnia warunki

$$[X,Y] = H,\ [H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y \tag{1}$$

oraz

$$[I,X] = [I,Y] = [I,X] = 0.$$

Macierze ze śladem równym 0 tworzą podalgebrę Liego $\mathfrak{sl}(2) = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ z bazą X, Y, H spełniającą relacje (1). Algebra obejmująca $U = U(\mathfrak{sl}(2))$ algebry $\mathfrak{sl}(2)$ jest izomorficzna z algebrą generowaną przez X, Y, H z relacjami (1).

Lemat. *W algebrze obejmującej $U(\mathfrak{sl}(2))$ mają miejsce następujące równości dla dowolnych $p, q \geq 0$.*

(i) $X^pH^q = (H-2p)^qX^p$, $Y^pH^q = (H+2p)^qY^p$.

(ii) $[X,Y^p] = pY^{p-1}(H-p+1) = p(H+p-1)Y^{p-1}$.

(iii) $[X^p,Y] = pX^{p-1}(H+p-1) = p(H-p+1)X^{p-1}$.

Stwierdzenie. *Elementy $X^iY^jH^k$, $i,j,k \geq 0$, tworzą bazą liniową algebry U.*

Ustalmy element $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0, -1, 1$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ niech $[n] := \frac{q^n - q^{-n}}{q-q^{-1}}$. Przez $U_q = U_q(\mathfrak{sl}(2))$ oznaczać będziemy algebrę generowaną przez zmienne E, F, K, K^{-1} spełniające relacje

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1,$$
$$KEK^{-1} = q^2E,\ KFK^{-1} = q^{-2}F,$$
$$[E,F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

Lemat. *Niech $m \geq 0$ oraz $n \in \mathbb{Z}$. Następujące równości są spełnione w U_q.*

(i) $E^m K^n = q^{-2m} K^n E^m,\ F^m K^n = q^{2m} K^n F^m.$

(ii) $[E, F^m] = [m] F^{m-1} \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q-q^{-1}} = [m] \frac{q^{m-1}K - q^{-(m1)}K^{-1}}{q-q^{-1}} F^{m-1}.$

(iii) $[E^m, F] = [m] \frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q-q^{-1}} E^{m-1} = [m] E^{m-1} \frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q-q^{-1}}.$

Stwierdzenie. *Algebra U_q jest noetherowską algebrą bez dzielników zera. Elementy $E^i F^j K^l$, $i, j \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, tworzą bazę liniową algebry U_q.*

W dowodzie powyższego stwierdzenia wykorzystuje się pojęcie rozszerzeń Ore. Niech R będzie algebrą i $R[t]$ wolnym (lewym) R-modułem składającym się ze wszystkich wielomianów o współczynnikach w R. Jeśli α jest endomorfizmem algebry R, to przekształcenie liniowe $\delta : R \to R$ nazywamy α-derywacją, jeśli $\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b$ dla dowolnych $a, b \in R$. Jeśli R jest algebrą bez dzielników zera, α jest injektywnym endomorfizmem algebry R oraz δ jest α-derywacją, to wzór $ta = \alpha(a)t + \delta(a)$ zadaje w $R[t]$ strukturę R-algebry. Powyższą algebrę oznaczamy $R[t, \alpha, \delta]$ i nazywamy rozszerzeniem Ore algebry R. Można pokazać, że w $R[t]$ mamy strukturę algebrową S taką, że $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ dla dowolnych P, $Q \in R[t]$, w algebrze R nie ma dzielników zera oraz istnieje dokładnie jeden injektywny endomorfizm α algebry R oraz dokładnie jedna α-derywacja δ takie, że $S = R[t, \alpha, \delta]$.

Dla dowodu powyższego stwierdzenia wystarczy zauważyć, że mamy izomorfizm

$$U_q \simeq ((\mathbb{C}[K, K^{-1}])[F, \alpha_1, 0])[E, \alpha_2, \delta],$$

gdzie $\alpha_1(K) := q^2 K$, $\alpha_2(F) := F$, $\alpha_2(K) := q^{-2}(K)$, $\delta(F) := \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$ i $\delta(K) := 0$, oraz skorzystać z własności rozszerzeń Ore.

Stwierdzenie. *Algebra U_q jest izomorficzna z algebrą U_q' generowaną przez zmienne E, F, K, K^{-1}, L spełniające relacje*

(i) $KK^{-1} = K^{-1}K = 1.$

(ii) $KEK^{-1} = q^2 E,\ KFK^{-1} = q^{-2}F.$

(iii) $[E, F] = L,\ (q - q^{-1})L = K - K^{-1}.$

(iv) $[L, E] = q(EK + K^{-1}E),\ [L, F] = -q^{-1}(FK + K^{-1}F).$

Dowód. Izomorfizm zadają odwzorowania $\varphi : U_q \to U_q'$ i $\psi : U_q' \to U_q$ dane wzorami $\varphi(E) := E$, $\varphi(F) := F$, $\varphi(K) := K$ oraz $\psi(E) := E$, $\psi(F) := F$, $\psi(K) := K$ i $\psi(L) = [E, F]$. $\square$

Zauważmy, że mamy $U_1' \simeq U[K]/(K^2 - 1)$ oraz $U \simeq U_1'/(K - 1)$.