O związkach hipotezy nakryciowej z problemem aksjomatyzowania dzikiego typu

na podstawie referatu Stanisława Kasjana

9 maja 2002

Niech A będzie skończenie wymiarową bazową algebrą nad algebraicznie domkniętym ciałem K. Przy ustalonym wyborze parami ortogonalnych prymitywnych idempotentów $e_1, \ldots e_n$, można traktować A jako K-kategorię, której obiektami są idempotenty $e_1, \ldots, e_n$, zaś morfizmy zdefiniowane są wzorami $A(e_i, e_j) = e_j A e_i$. Kategoria ta jest lokalnie ograniczona, tzn. obiekty tej kategorii są parami nieizomorficzne, ich algebry endomorfizmów są lokalne oraz $\sum_{j=1}^{n} \dim_K A(e_i, e_j) < \infty$ i $\sum_{j=1}^{n} \dim_k A(e_j, e_i) < \infty$ dla każdego i. W tej sytuacji A-moduły możemy utożsamiać z K-liniowymi funktorami z A do kategorii przestrzeni liniowych.

Niech $\tilde{A}$ będzie lokalnie ograniczoną K-kategorią. Jeśli G jest podgrupą grupy $\mathrm{Aut}(\tilde{A})$ działającą w sposób wolny (tzn. stabilizatory elementów są trywialne) na obiektach kategorii $\tilde{A}$, to można zdefiniować kategorię $A = \tilde{A}/G$, której obiektami są orbity przy działaniu grupy G na obiektach kategorii $\tilde{A}$. Jeśli Gx i Gy są dwoma obiektami kategorii A, to $A(Gx, Gy) = (\prod_{x' \in Gx, y' \in Gy} \tilde{A}(x', y'))^G$. Równoważnie $A(Gx, Gy) = \bigoplus_{g \in G} \tilde{A}(x, g^{-1}y)$.

Mamy funktor nakrycia $F : \tilde{A} \to A$ dany wzorami $F(x) = Gx$ oraz $F(a : x \to y) = (a'_{gx,hy} : gx \to hy)$, gdzie $a'_{gx,hy} = ga$, gdy $g = h$, oraz $a'_{gx,hy} = 0$, gdy $g \neq h$. Funktor F wyznacza funktory podnoszenia $F_\circ : \mathrm{MOD}\, A \to \mathrm{MOD}\, \tilde{A}$ i opuszczania $F_\lambda : \mathrm{MOD}\, \tilde{A} \to \mathrm{MOD}\, A$. Funktor podnoszenia dany jest wzorem $F_\circ(M) = M \circ F$. Zauważmy, że $F_\circ(M)(x) = M(Fx)$. Dla funktora opuszczania mamy wzór $(F_\lambda M)(Gx) = \bigoplus_{x' \in Gx} M(x')$. Wiadomo, że $\mathrm{Hom}_A(F_\lambda M, N) = \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(M, F_\circ N)$. Zatem $\mathrm{Hom}_A(F_\lambda F_\circ N, N) = \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(F_\circ N, F_\circ N)$. Niech $\nabla_N : F_\lambda F_\circ N \to N$ będzie odwzorowaniem odpowiadającym odwzorowaniu $\mathrm{id}_{F_\circ N}$. Wtedy $\nabla_N(x) : \bigoplus_{g \in G} N(x) \to N(x)$ dane jest wzorem $[\nabla_N(x)](n_g)_{g \in G} = \sum_{g \in G} n_g$.

Twierdzenie (Gabriel)**.** *Załóżmy, że grupa G działa wolno na $\mathrm{ind}\, \tilde{A}/ \simeq$. Wtedy kategoria $\tilde{A}$ jest lokalnie skończonego typu wtedy i tylko wtedy, gdy kategoria A jest lokalnie skończonego typu.*

Założenie o wolnym działaniu grupy G jest spełnione, gdy grupa G jest beztorsyjna. Hipoteza nakryciowa głosi, że jeśli grupa G jest beztorsyjna, to kategoria $\tilde{A}$ jest oswojonego typu wtedy i tylko wtedy, gdy kategoria A jest oswojona. Wiadomo, że oswojoność kategorii A implikuje oswojoność $\tilde{A}$.

Załóżmy teraz, że rząd grupy G jest skończony. Wtedy istnieje odwzorowanie $\Delta_N : N \to F_\lambda F_\circ N$ dane wzorem $[\Delta_N(x)](n) = (n)_{g\in G}$. Zauważmy, że $\nabla_N \Delta_N = |G| \, \mathrm{id}_N$. Stąd wynika, że gdy charakterystyka ciała K nie dzieli $|G|$, to N jest składnikiem prostym modułu $F_\lambda F_\circ N$. W szczególności, jeśli $\tilde{A}$ jest lokalnie skończonego typu, to A jest lokalnie skończonego typu. Podobnie, gdy $\tilde{A}$ jest oswojonego typu, to A jest oswojonego typu.

Rozważmy nakrycie Galois $F : \tilde{A} \to A$ z grupą G. Nakrycie F wyznacza gradację $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ taką, że $\bigoplus_{g\neq 1} A_g \subset J(A)$. Gradacja ta jest konsekwencją równości $A = \bigoplus_{Gx,Gy} A(Gx, Gy) = \bigoplus_{Gx,Gy} \bigoplus_{g\in G} \tilde{A}(x, g^{-1}y)$. Z drugiej strony, gdy mamy gradację $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ taką, że $\bigoplus_{g\neq 1} A_g \subset J(A)$, to można wybrać w A układ idempotentów jednorodnych. Wtedy mamy nakrycie $F : \tilde{A} \to A$, gdzie $\mathrm{ob}\, \tilde{A} = G \times \mathrm{ob}\, A$, $\tilde{A}((g, x), (h, y)) = A_{h^{-1}g}(x, y)$. W powyższej sytuacji $\mathrm{MOD}\, \tilde{A} \simeq \text{gr-MOD}^G(A)$. Jeśli $S \subset G$, to $A(S)$ jest pełną podkategorią wyznaczona przez $S \times \mathrm{ob}\, A$. Kategoria $\tilde{A}$ jest oswojona wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego skończonego podzbioru S kategoria $A(S)$ jest oswojona.

Ustalmy liczbę naturalną d. Klasa układów $(K, A, G, (a_i)_{i=1}^d, (g_i)_{i=1}^d)$, w których K jest ciałem algebraicznie domkniętym, A jest d-wymiarową K algebrą z gradacją taką, że elementy $a_1, \ldots, a_d$ tworzą bazę i są jednorodne stopni $g_1, \ldots, g_d$, odpowiednio, oraz $\bigoplus_{g\neq 1} A_g \subset J(A)$, jest aksjomatyzowalna. Przez Gralg oznaczać klasę takich układów, zaś przez Gralg^p te układy, dla których charakterystyka ciała K jest równa p. Przez Tgr oznaczymy te układy należące do Gralg, dla których kategoria $\text{gr-MOD}^G(A)$ jest oswojona, zaś przez Wgr te, dla których jest dzika. Możemy też mówić o Tgr^p i Wgr^p. Jeśli G' i G'' są dwiema grupami zawierającymi elementy $g_1, \ldots, g_d$, to $(K, A, G', (a_i), (g_i)) \in \mathrm{Tgr}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(K, A, G'', (a_i), (g_i)) \in \mathrm{Tgr}$.

Twierdzenie. *Klasa* Tgr *jest aksjomatyzowalna.*

Grupę G nazywamy residualnie skończoną, o ile dla każdego $g \in H$, $g \neq 1$, istnieje dzielnik normalny H taki, że $g \notin H$ oraz $[G : H] < \infty$. Grupa G jest p-residualnie skończona, jeśli możemy dodatkowo założyć, że $[G : H] = p^n$. Przykładami grup p-residualnie skończonych są grupy wolne i grupy abelowo wolne. Jeśli grupa G jest p-residualnie skończona i skończenie generowana, to istnieje zstępujący ciąg podgrup normalnych G_i taki, że $|G/G_i| = p^{n_i}$ oraz $\bigcap G_i = 1$.

Twierdzenie. *Załóżmy, że klasa* Wgr^p *jest aksjomatyzowalna. Jeśli grupa* G *jest wolna lub abelowo wolna oraz* $(K, A, G, (a_i), (g_i)) \in \mathrm{Tgr}^p$*, to wtedy* $(K, A, 1, (a_i), (1)) \in \mathrm{Tgr}^p$.

Dowód. Niech (G_i) będzie zstępującym ciągiem podgrup normalnych takich, że $|G/G_i| = q^{n_i}$, $q \neq p$, $\bigcap G_i = \{1\}$. Załóżmy, że $(K, A, 1, (a_i), (g_i)) \in \mathrm{Wgr}^p$. Ponieważ p nie dzieli $|G/G_j|$, więc $(K, A, G/G_j, (a_i), (g_iG_j)) \in \mathrm{Wgr}^p$. Ponieważ klasa Wgr^p jest aksjomatyzowalna, więc jest zamknięta na ultraprodukty. Niech $\mathscr{F}$ będzie ultrafiltrem na $\mathbb{N}$, który nie zawiera zbiorów skończonych. Wtedy $\prod_{j\in\mathbb{N}}(K, A, G/G_j, (a_i), (g_iG_j))/\mathscr{F} \in \mathrm{Wgr}^p$. Niech $L = K^{\mathbb{N}}/\mathscr{F}$ oraz $H = (\prod_{j\in\mathbb{N}}(G/G_j))/\mathscr{F}$. Wtedy $\prod_{j\in\mathbb{N}}(K, A, G/G_j, (a_i), (g_iG_j))/\mathscr{F} = (L, A\otimes_K L, H, (a_i \otimes 1), ((g_iG)^{\mathscr{F}}))$. Mamy naturalne odwzorowanie grup $G \to H$, $g \mapsto ((gG_i)^{\mathscr{F}})$, które jest monomorfizmem. Stąd $(L, A \otimes_K L, G, (a_i \otimes 1), (g_i)) \in \mathrm{Wgr}$, co kończy dowód, gdyż rozszerzenie ciała bazowego K algebry A do L zachowuje oswojony i dziki typ. $\square$