# Homologiczne charakteryzacje algebr artinowskich

na podstawie referatu Andrzeja Skowrońskiego

16 maja 2002

Wszystkie rozważane algebry będą algebrami artinowskimi nad ustalonym pierścieniem przemiennym $R$.

Niech $H$ będzie algebrą dziedziczną typu $\Delta$ oraz $T$ odwracającym $H$-modułem. Algebrę $A = \operatorname{End}_H(T)$ nazywamy algebrą odwróconą typu $\Delta$. Niech $\mathscr{F}(T) = \{X \in \operatorname{mod} H \mid \operatorname{Hom}_H(T, X) = 0\}$, $\mathscr{G}(T) = \{X \in \operatorname{mod} H \mid \operatorname{Ext}_H^1(T, X) = 0\}$, $\mathscr{X}(T) = \{Y \in \operatorname{mod} A \mid Y \otimes_A T = 0\}$ i $\mathscr{Y}(T) = \{Y \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Tor}_1^A(Y, T) = 0\}$. Zgodnie z twierdzeniem Brenner–Butler funktory $\operatorname{Hom}_H(T, -) : \mathscr{G}(T) \to \mathscr{Y}(T)$ i $\operatorname{Ext}_H^1 : \mathscr{F}(T) \to \mathscr{X}(T)$ są równoważnościami. Wiadomo, że jeśli $Y \in \operatorname{ind} A$, to $Y \in \mathscr{X}(T)$ lub $Y \in \mathscr{Y}(T)$. Ponadto $\operatorname{gldim} A \leq 2$ oraz $\operatorname{pd}_A Y \leq 1$ lub $\operatorname{id}_A Y \leq 1$ dla dowolnego nierozkładalnego $A$-modułu $Y$.

Niech $\mathscr{C}$ będzie spójnym wartościowanym kołczanem z translacją. Pełny wartościowany podkołczan $\Delta$ kołczanu $\mathscr{C}$ nazywamy sekcją, jeśli kołczan $\Delta$ nie ma zorientowanych cykli i jest wypukły w $\mathscr{C}$, oraz $|\Delta \cap \mathscr{O}| = 1$ dla dowolnej $\tau$-obity $\mathscr{O}$ w $\mathscr{C}$. Można pokazać, że moduły $\operatorname{Hom}_H(T, I)$, gdzie $I$ przebiega wszystkie klasy izomorfizmów nierozkładalnych $H$-modułów injektywnych, tworzą sekcję w pewnej składowej $\mathscr{C}_T$ kołczanu $\Gamma_A$. Składowe postaci $\mathscr{C}_T$ nazywamy składowymi łączącymi. Twierdzenie Liu–Skowroński orzeka, że spójna algebra jest odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan $\Gamma_A$ posiada spójną składową $\mathscr{C}$ z dokładną sekcją $\Delta$ taką, że $\operatorname{Hom}_A(X, \tau_A Y) = 0$ dla dowolnych $X, Y \in \Delta$. Ponadto w tej sytuacji $\mathscr{C} = \mathscr{C}_T$ dla pewnego modułu odwracającego $T$ nad algebrą dziedziczną $H$.

Dla dowolnej algebry $A$ przez $\mathscr{L}_A$ oznaczać będziemy pełną podkategorię kategorii $\operatorname{ind} A$ składającą się tych modułów nierozkładalnych $X$, dla których $\operatorname{pd}_A Y \leq 1$ dla dowolnego poprzednika $Y$ modułu $X$ w kategorii $\operatorname{ind} A$. Dualnie definiujemy podkategorię $\mathscr{R}_A$.

Niech $\mathscr{H}$ będzie abelową $R$-kategorią dziedziczną ze skończenie generowanymi przestrzeniami Hom i $\operatorname{Ext}^1$. Obiekt $T$ kategorii $\mathscr{H}$ nazywamy odwracającym, o ile $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,T) = 0$ oraz warunki $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(T,X) = 0$ i $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(T,X) = 0$ implikują $X = 0$. Algebry postaci $\mathrm{End}_{\mathscr{H}}(T)$ dla pewnego obiektu odwracającego $T$ w dziedzicznej $R$-kategorii $\mathscr{H}$ nazywamy algebrami quasi-odwróconymi. Happel, Reiten i Smalø pokazali, że algebra $A$ jest quasi-odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{gldim} A \leq 2$ oraz $\operatorname{pd}_A X \leq 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leq 1$ dla każdego nierozkładalnego $A$-modułu $X$. Równoważnie można też powiedzieć, że $\mathscr{L}_A$ zawiera wszystkie nierozkładalne moduły projektywne, lub że $\mathscr{R}_A$ zawiera wszystkie nierozkładalne moduły injektywne.

Algebry quasi-odwrócone kanonicznego typu, to algebry, w których kołczanie Auslandera–Reiten występuje separująca rodzinę półregularnych rur (zawierająca rury stabilne, promieniowe lub kopromieniowe). Happel i Reiten udowodnili, że każda spójna algebra quasi-odwrócona jest algebrą odwróconą lub jest kanonicznego typu.

Warto wspomnieć, że Skowroński udowodnił, że algebra $A$ jest odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{gldim} A \leq 2$, $\mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A = \operatorname{ind} A$ oraz kategoria $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{R}_A$ zawiera moduł kierujący. Wiadomo, że algebra $A$ jest quasi-odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{gldim} A \leq 2$ oraz $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$.

Jeżeli $\operatorname{pd}_A X \leq 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leq 1$ dla każdego nierozkładalnego $A$-modułu $X$, to $\operatorname{gldim} A \leq 3$. Ogólnie, jeśli istnieje liczba naturalna $n$ taka, że $\operatorname{pd}_A X \leq n$ lub $\operatorname{id}_A X \leq n$ dla wszystkich $X \in \operatorname{ind} A$, to $\operatorname{gldim} A \leq 2n+1$. Mówimy, że algebra $A$ jest małego wymiaru homologicznego (shod – small homological dimension), jeśli $\operatorname{pd}_A X \leq 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leq 1$ dla każdego $X \in \operatorname{ind} A$. Coelho i Lanzilotta pokazali, że algebra $A$ jest małego homologicznego wymiaru wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$.

Niech $\mathscr{C}$ będzie spójnym kołczanem z translacją. Pełny wartościowany podkołczan $\Delta$ kołczanu $\mathscr{C}$ jest nazywany podwójną sekcją, jeśli $\Delta$ jest wypukłym podkołczanem bez zorientowanych cykli, oraz $1 \leq |\Delta \cap \mathscr{O}| \leq 2$ dla dowolnej $\tau$-orbity $\mathscr{O}$ w kołczanie $\mathscr{C}$. Ponadto, jeśli $\mathscr{O}$ jest taką $\tau$-orbitą w kołczanie $\mathscr{C}$, że $|\Delta \cap \mathscr{O}| = 2$, to $\Delta \cap \mathscr{O} = \{x, \tau x\}$ oraz istnieje droga sekcyjna z wierzchołka injektywnego do $\tau x$ oraz droga sekcyjna z $x$ do wierzchołka projektywnego. Dla podwójnej sekcji $\Delta$ przez $\Delta'_l$ oznaczać będziemy zbiór tych wierzchołków $x \in \Delta$, dla których istnieje prawie sekcyjna droga z $x$ do wierzchołka projektywnego, zaś przez $\Delta'_r$ zbiór tych wierzchołków $x \in \Delta$, dla których istnieje prawie sekcyjna droga z wierzchołka injektywnego do $x$. Kładziemy $\Delta_l = (\Delta \setminus \Delta'_r) \cup \tau\Delta'_r$ oraz $\Delta_r = (\Delta \setminus \Delta'_l) \cup \tau^{-}\Delta'_l$. Zauważmy, że jeśli $\Delta$ jest sekcją, to $\Delta = \Delta_l = \Delta_r$.

Spójną algebrę nazywamy podwójną algebrą odwrócona, jeśli w kołczanie $\Gamma_A$ istnieje spójna składowa $\mathscr{C}$ z dokładną podwójną sekcją $\Delta$ o następujących własnościach. Istnieje ilorazowa algebra $A_l$ algebry $A$ będąca algebrą odwróconą i taka, że $\Delta_l$ jest sumą rozłączną sekcji w składowych łączących kołczanów Auslandera–Reiten bloków algebry $A_l$ oraz kategoria poprzedników wierzchołków kołczanu $\Delta_l$ kategorii w $\operatorname{ind} A$ pokrywa się z kategorią poprzedników wierzchołków kołczanu $\Delta_l$ w kategorii $\operatorname{ind} A_l$. Dualnie wymagamy istnienia ilorazowej algebry $A_r$ algebry $A$ będącej algebrą odwróconą i takiej, że $\Delta_r$ jest sumą rozłączną sekcji w składowych łączących kołczanów Auslandera–Reiten bloków algebry $A_r$ oraz kategoria następników wierzchołków kołczanu $\Delta_r$ kategorii w $\operatorname{ind} A$ pokrywa się z kategorią następników wierzchołków kołczanu $\Delta_r$ w kategorii $\operatorname{ind} A_r$.

Reiten i Skowroński pokazali, że algebra $A$ jest podwójną algebrą odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan $\Gamma_A$ posiada spójną składową $\mathscr{C}$ z dokładną podwójną sekcję $\Delta$ taką, że $\operatorname{Hom}_A(X, \tau_A Y) = 0$ dla dowolnego $X \in \Delta_r$, $Y \in \Delta_l$. Ponadto klasa algebr podwójnie odwróconych pokrywa się z klasą algebr małego globalnego wymiaru, które nie są quasi-odwrócone.

Niech $\mathscr{C}$ będzie spójnym kołczanem z translacją. Pełny wartościowany podkołczan $\Delta$ kołczanu $\mathscr{C}$ nazywamy wielosekcją, jeśli $\Delta$ jest prawie skierowanym (tzn. tylko skończenie wiele wierzchołków kołczanu $\Delta$ leży na cyklach zorientowanych) i wypukłym podkołczanem kołczanu $\mathscr{C}$ takim, że $1 \leq |\mathscr{O} \cap \mathscr{C}| < \infty$ dla każdej $\tau$-orbity $\mathscr{O}$ w kołczanie $\mathscr{C}$, przy czym $|\Delta \cap \mathscr{C}| = 1$ dla prawie wszystkich $\tau$-orbit $\mathscr{O}$ w kołczanie $\mathscr{C}$. Żądamy też, aby żaden właściwy wypukły podkołczan kołczanu $\Delta$ nie miał powyższych własności. Z wielosekcją $\Delta$ możemy stowarzyszyć kołczany $\Delta'_l$ i $\Delta'_r$ w analogiczny sposób jak to uczyniliśmy dla podwójnych sekcji, a także kołczany $\Delta''_l = \{x \in \Delta'_l \mid \tau^- x \notin \Delta'_l\}$ oraz $\Delta''_r = \{x \in \Delta'_r \mid \tau x \notin \Delta'_r\}$. Definiujemy $\Delta_l = (\Delta \setminus \Delta'_r) \cup \tau \Delta''_l$, $\Delta_r = (\Delta \setminus \Delta'_l) \cup \tau^- \Delta''_r$ oraz $\Delta_c = \Delta'_l \cap \Delta'_r$. Analogicznie jak algebry podwójnie odwrócone możemy zdefiniować klasę uogólnionych algebr podwójnie odwróconych. Okazuje się, że $A$ jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą wtedy i tylko wtedy, gdy kołczan $\Gamma_A$ posiada dokładną uogólnioną standardową wielosekcję w prawie skierowanej składowej, lub równoważnie, kołczan $\Gamma_A$ posiada składową z dokładną wielosekcją $\Delta$ taką, że $\operatorname{Hom}_A(X, \tau_A Y) = 0$ dla $X \in \Delta_r$ i $Y \in \Delta_l$.

Można pokazać, że składowa kołczanu Auslandera–Reiten algebry jest jest prawie skierowana wtedy i tylko wtedy, gdy posiada wielosekcję. Ponadto jeśli $A$ jest uogólnioną algebrą podwójnie odwróconą oraz $\Delta$ jest dokładną wielosekcją w składowej $\mathscr{C}$ kołczanu $\Gamma_A$, to $\Delta_c$ jest skończonym kołczanem, to każdy zorientowany z cykl w kołczanie $\mathscr{C}$ jest zawarty w $\Delta_c$ oraz $\operatorname{ind} A = \mathscr{L}_A \cup \Delta_c \cup \mathscr{R}_A$. Algebra jest quasi-odwrócona lub uogólniona podwójnie odwrócona wtedy i tylko wtedy, gdy w kategorii $\operatorname{ind} A \setminus \mathscr{L}_A \cup \mathscr{R}_A$ jest tylko skończenie wiele klas izomorfizmów nierozkładalnych $A$-modułów. Nie wiadomo, czy to samo jest prawdą, gdy założymy, że $\operatorname{pd}_A X \leq 1$ lub $\operatorname{id}_A X \leq 1$ dla prawie wszystkich nierozkładalnych $A$-modułów $X$.