Algebry symetryczne typu Euklidesa

na podstawie referatu Rafała Bociana

28 maja 2002

Przez K oznaczać będziemy ustalone ciało algebraicznie domknięte. Skończenie wymiarową algebrę A nad ciałem K będziemy nazywać algebrą Frobeniusa, jeśli istnieje łączna i niezdegenerowana forma dwuliniowa $\beta : A \times A \to K$. Brauer, Nesbitt i Nakayama pokazali, że skończenie wymiarowa algebra A nad ciałem K jest algebrą Frobeniusa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje forma K-liniowa $\varphi : A \to K$ taka, że $\operatorname{Ker} \varphi$ nie zawiera niezerowych lewych (równoważnie prawych) ideałów, oraz wtedy i tylko wtedy, gdy prawe (równoważnie lewe) A-moduły A i $D(A)$ są izomorficzne.

Algebrę Frobeniusa A będziemy nazywać algebrą symetryczną, jeśli o formie β możemy założyć dodatkowo, że jest symetryczna. Warunek ten jest równoważny stwierdzeniu, że A-A-bimoduły A i $D(A)$ są izomorficzne, a także temu, że istnieje forma K-liniowa $\varphi : A \to K$ taka, że $\operatorname{Ker} \varphi$ nie zawiera niezerowych jednostronnych ideałów oraz $\varphi(ab) = \varphi(ba)$,

Klasycznymi przykładami algebr symetrycznych są algebry grupowe oraz trywialne rozszerzenia algebr. Algebrami Frobeniusa są też algebry Hopfa, choć nie muszą być one symetryczne.

Algebrę A nazywamy algebrą samoinjektywną, jeśli A jest injektywnym prawym A-modułem. Każda algebra Frobeniusa jest algebrą samoinjektywną. Z drugiej strony każda bazowa algebra samoinjektywna jest algebrą Frobeniusa.

Przypomnijmy, że dla algebry A przez C_A oznaczamy macierz Cartana, której współczynnikami są wymiary przestrzeni $\operatorname{Hom}_A(P_i, P_j)$, gdzie $P_1, \ldots, P_n$ tworzą pełny układ parami nieizomorficznych nierozkładalnych projektywnych A-modułów. Brauer pokazał, że jeśli G jest grupą skończoną oraz K jest ciałem charakterystyki $p > 0$, to $\det C_{KG} = p^r$ dla pewnego $r \geq 0$.

Wiadomo, że algebra KG jest półprosta wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka ciała K nie dzieli rzędu grupy G. Gdy p dzieli rząd grupy G, to algebra KG jest skończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy p-podgrupa Sylowa grupy G jest cykliczna.

Defektem bloku B algebry KG nazywamy minimalną podgrupę D grupy G taką, że dowolny B-moduł jest składnikiem prostym KG-modułu $W \otimes_{KD} KG$ dla pewnego KD-modułu W. Wiadomo, że D jest p-podgrupą grupy G. Ponadto dwa różne defekty tego samego bloku są ze sobą sprzężone. Blok B jest skończonego reprezentacyjnego typu wtedy i tylko wtedy, gdy defekt bloku B jest grupą cykliczną.

Drzewem Brauera T_s^m nazywamy spójne skończone drzewo T wraz z cyklicznym uporządkowaniem zbiorów E_v wszystkich krawędzi mających wspólny wierzchołek v, oraz przyporządkowaniem krotności $m \geq 1$ jednemu wierzchołkowi s drzewa T, nazywanym wierzchołkiem wyjątkowym.

Z drzewem T stowarzyszamy kołczan Brauera Q_T, którego wierzchołkami są krawędzie drzewa T i w którym mamy strzałkę z wierzchołka i do wierzchołka j wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie i oraz j mają wspólny wierzchołek v w drzewie T oraz krawędź j jest bezpośrednim następnikiem krawędzi i w zbiorze E_v. Zauważmy, że kołczan Q_T jest sumą zorientowanych cykli, każdy wierzchołek w Q_T należy do dokładnie dwóch cykli oraz dwa cykle przecinają się w co najwyżej jednym wierzchołku.

Cykle w kołczanie Q_T odpowiadając wierzchołkom kołczanu T. W związku z tym możemy podzielić cykle na dwie grupy: α-cykle i β-cykle. Możemy przy tym założyć, że cykl wyjątkowy jest α-cyklem. Strzałkę zaczynającą się w wierzchołku i kołczanu Q_T i należącą do α-cyklu będziemy oznaczać przez α_i, a jest koniec przez $\alpha(i)$. Podobne oznaczenia wprowadzamy dla β-cykli. Przez A_i oznaczymy α-cykl zaczynający się w wierzchołku i, zaś przez $B(i)$ β-cykl zaczynając się w wierzchołku i.

Definiujemy ideał I_s^m w algebrze dróg kołczanu Q_T jako ideał generowany przez wszystkie drogi postaci $\beta_{\alpha(i)}\alpha_i$, $\alpha_{\beta(i)}\beta_i$, oraz $A_i^m - B_i$, jeśli α-cykl przechodzący przez i jest wyjątkowy, i $A_i - B_i$, jeśli α-cykl przechodzący przez i nie jest wyjątkowy. W ten sposób zdefiniowaliśmy algebrę $A(T_s^m) = KQ_T/I_s^m$.

Dade, Janusz i Kupisch pokazali, że jeśli K jest ciałem charakterystyki $p > 0$ oraz jest B jest blokiem algebry grupowej posiadającym cykliczną grupę defektową rzędu p^n, to algebra B jest Morita równoważna z algebrą postaci $A(T_s^m)$ dla pewnego drzewa Brauera T_s^m o e krawędziach i krotności wierzchołka wyjątkowego $m = (p^n - 1)/e$. Ponieważ $\det C_{A(T_s^m)} = em + 1$ dla drzewa Brauera T_s^m o e krawędziach, więc z powyższego twierdzenia wynika, że w omawianej sytuacji $\det C_B = p^n$.

Wiadomo, że samoinjektywne algebrą typu $\tilde{\mathbb{E}}$ są postaci $\hat{B}/(\varphi\nu_{\hat{B}}^m)$, gdzie B jest reprezentacyjnie nieskończona algebrą odwróconą typu $\tilde{\mathbb{E}}$, $m \geq 1$, oraz φ jest automorfizmem $\hat{B}$ indukowanym przez automorfizm B. Jako wniosek otrzymujemy, że jeśli A jest algebrą symetryczną typu $\tilde{\mathbb{E}}$, to $A \simeq T(B)$, gdzie

B jest jak wyżej.

Przypomnijmy, że jeśli A jest trywialnym rozszerzeniem algebry odwróconej typu Euklidesa, to macierz Cartana C_A jest osobliwa. Zatem jedynych algebr symetrycznych typu Euklidesa z nieosobliwą macierzą Cartana należy szukać wśród algebr typu $\tilde{\mathbb{A}}$ i $\tilde{\mathbb{D}}$. Powinny być one postaci $\hat{B}/(\varphi)$, gdzie $\varphi^2 = \nu_{\hat{B}}$.

Uogólnionym drzewem Braura nazywamy drzewo Braura T_{s_1,s_2}, z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami s_1 i s_2 krotności 2. Z drzewem T_{s_1,s_2} stowarzyszamy kołczan $Q_{T_{s_1,s_2}}$ w analogiczny sposób jak powyżej. Niech $s_1 \to t_1 \to \cdots \to t_2 \to s_2$ będzie jedyną drogą w drzewie T z wierzchołka s_1 do wierzchołka s_2. Niech i_1 będzie wspólnym wierzchołkiem cykli odpowiadających wierzchołkom s_1 i t_1, zaś i_2 wspólnym wierzchołkiem cykli odpowiadających wierzchołkom s_2 i t_2. Przez $\alpha_1 : j_1 \to i_1$ oznaczmy strzałkę leżącą na cyklu opowiadającym wierzchołkowi s_1 i kończącą się w i_1 oraz przez $\alpha_2 : j_2 \to i_2$ analogiczną strzałkę leżącą na cyklu odpowiadającym wierzchołkowi s_2. Przez $\overline{Q}_{T_{s_1,s_2}}$ oznaczać będziemy kołczan powstały z $Q_{T_{s_1,s_2}}$ przez usunięcie strzałek α_1 i α_2 oraz dodanie strzałek $\overline{\alpha}_1 : j_1 \to i_2$ oraz $\overline{\alpha}_2 : j_2 \to i_1$. Definiujemy algebrę $\Lambda(T_{s_1,s_2})$ jako algebrę dróg kołczanu $Q_{T_{s_1,s_2}}$ podzieloną przez ideał $I(T_{s_1,s_2})$ zdefiniowany podobnie jak wyżej. Określamy też algebrę $\Lambda'(T_{s_1,s_2})$ jako odpowiedni iloraz algebry $K\overline{Q}_{T_{s_1,s_2}}$.

Można pokazać, że jeśli A jest algebrą samoinjektywną typu $\tilde{\mathbb{A}}$, to A jest algebrą symetryczną z nieosobliwą macierzą Cartana wtedy i tylko wtedy, gdy $A \simeq \hat{B}/(\varphi)$, $\varphi^2 = \nu_{\hat{B}}$, B jest algebry odwróconą typu $\tilde{\mathbb{A}}$ oraz $A \not\simeq K\langle X,Y\rangle/(X^2,Y^2,XY+YX)$, gdy $\operatorname{char} K \neq 2$. Powyższe warunki są też równoważne temu, że $A \simeq \Lambda(T_{s_1,s_2})$ dla pewnego uogólnionego drzewa Brauera T_{s_1,s_2} lub $\Lambda'(T_{s_1,s_2})$ dla pewnego uogólnionego drzewa Brauera T_{s_1,s_2}, w którym długość drogi z wierzchołka s_1 do wierzchołka s_2 jest nieparzysta.