Degeneracje modułów prinjektywnych

na podstawie referatu Justyny Kosakowskiej

10 i 17 października 2002

Przez cały referat przez K oznaczać będziemy ustalone ciało algebraicznie domknięte. Symbolem $(M, N)^i$ oznaczać będziemy $\operatorname{Ext}^i(M, N)$, zaś $[M, N]^i$ oznacza $\dim_K \operatorname{Ext}^i(M, N)$.

Celem tego referatu jest udowodnienie następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Niech I będzie posetem skończonego typu prinjektywnego oraz M i N będą dwoma KI-modułami prinjektywnymi. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $M \leq_{\mathrm{ext}} N$;

(b) $M \leq_{\mathrm{deg}} N$;

(c) $M \leq_{\mathrm{hom}} N$.

Niech I będzie posetem. Przez $\max I$ oznaczać będziemy zbiór elementów maksymalnych posetu I. Definiujemy $I^- := I \setminus \max I$. KI-moduł X nazywamy prinjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg dokładny

$$0 \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$$

taki, że moduły P_0 i P_1 są projektywne oraz moduł P_1 jest prosty. Inaczej mówiąc, X jest modułem prinjektywnym wtedy i tylko wtedy, gdy $X|_{I^-}$ jest projektywnym KI^--modułem. Przez $\operatorname{prin} KI$ oznaczać będziemy kategorię modułów prinjektywnych. Algebra KI posiada bipartycję

$$KI = \begin{bmatrix} KI^- & B \\ 0 & K(\max I) \end{bmatrix},$$

gdzie B jest KI^--$K(\max I)$ -bimodułem. Każdy KI-moduł X możemy identyfikować z trójką (X', X'', φ_X), gdzie $X' \in \operatorname{mod} KI^-$, $X'' \in \operatorname{mod} K(\max I)$ oraz $\varphi_X : X' \otimes_{KI^-} B \to X''$ jest odwzorowaniem $K(\max I)$-modułów. Odwzorowanie KI-modułów X i Y możemy utożsamiać z parą (f', f''), gdzie

$f' : X' \to Y'$ jest homomorfizmem KI^--modułów, $f'' : X'' \to Y''$ jest homomorfizmem $K(\max I)$-modułów oraz $\varphi_Y(f' \otimes B) = f''\varphi_X$.

Każdemu KI-modułowi X możemy przyporządkować moduł prinjektywny $\tilde{X} = (P(X'), X'', \tilde{\varphi})$, gdzie $\eta : P(X') \to X'$ jest nakryciem projektywnym w kategorii $\operatorname{mod} KI^-$ oraz $\tilde{\varphi} = \varphi(\eta \otimes B)$. Mamy odwzorowanie $\eta_X : \tilde{X} \to X$ zdefiniowane jako para (η, Id). Zauważmy, że jądro η jest KI^--modułem.

Lemat. *Jeżeli X jest KI-modułem takim, że $X'' = 0$, to $(L, X)^1 = 0$ dla dowolnego prinjektywnego KI-modułu L oraz $[M, X] = [N, X]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów M i N takich, że $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$.*

Dowód. Jeśli X jest dowolnym KI-modułem, zaś L jest KI-modułem prinjektywnym, to każdy ciąg dokładny postaci $0 \to X \to Y \to L \to 0$ jest indukowany przez odwzorowanie $\varepsilon : L' \otimes B \to X''$, ponieważ L' jest modułem projektywnym. To dowodzi pierwszej części lematu. Ponieważ $X'' = 0$, więc $[Y, X]_{KI} = [Y', X']_{KI^-}$ dla dowolnego KI-modułu Y, co kończy dowód drugiej część, gdyż $M' \simeq N'$. □

Wniosek. *Jeśli X jest KI-modułem, to istnieje stała c_X taka, że $[M, \tilde{X}] = [M, X] + c_X$ dla dowolnego prinjektywnego KI-modułu M.*

Dowód. Mamy ciąg dokładny

$$0 \to Y \to \tilde{X} \to X \to 0.$$

Ponieważ $Y'' = 0$, więc dla dowolnego prinjektywnego KI-modułu M mamy $(M, Y)^1 = 0$. Stąd $[M, \tilde{X}] = [M, X] + [M, Y]$. Z poprzedniego lematu wynika, że $c_X := [M, Y]$ nie zależy od wyboru modułu M. □

Lemat. *Niech A będzie dowolną skończenie wymiarową K-algebrą oraz X i P będą dwoma A-modułami takimi, że $\mathbf{dim}\, X = \mathbf{dim}\, P$. Jeśli P jest modułem projektywnym, a X nie jest modułem projektywnym, to istnieje A-moduł Y taki, że $[X, Y] > [P, Y]$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $[X, Y] \leq [P, Y]$ dla wszystkich A-modułów Y. Dla dowolnego A-modułu Y mamy ciąg dokładny

$$0 \to Y \to U_Y \to V_Y \to 0,$$

gdzie moduł U_Y jest injektywny. Stosując funktory $(X, -)$ i $(P, -)$ otrzymujemy ciągi

$$0 \to (X, Y) \to (X, U_Y) \to (X, V_Y) \to (X, Y)^1 \to 0$$

oraz

$$0 \to (P, Y) \to (P, U_Y) \to (P, V_Y) \to 0.$$

Stąd $[X, Y]^1 = [X, Y] - [X, U_Y] + [X, V_Y] \leq [P, Y] - [P, U_Y] + [P, V_Y] = 0$. Z dowolności modułu Y wynika, że moduł X jest projektywny, co kończy dowód. □

Wniosek. *Niech M i X będą dwoma KI-modułami takimi, że* $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, X$. *Jeśli moduł M jest prinjektywny, a moduł X nie jest prinjektywny, to istnieje KI-moduł Y taki, że $[X, Y] > [M, Y]$.*

Dowód. Istnieje KI^- moduł Y taki, że $[X', Y_0]_{KI^-} > [N', Y]_{KI^-}$. Wtedy Y jest KI-modułem oraz $[X, Y]_{KI} > [N, Y]_{KI}$. □

Niech τ oraz Δ będą translacjami Auslandera–Reiten w $\operatorname{mod} KI$ oraz $\operatorname{prin} KI$ odpowiednio.

Lemat. *Niech M i N będą dwoma prinjektywnymi KI-modułami takimi, że* $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$. *Wtedy $[N, X] - [M, X] = 0$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów X, które są injektywne w* $\operatorname{prin} KI$. *Ponadto $[N, \Delta(X)] - [X, N] = [M, \Delta(X)] - [X, M]$ dla wszystkich nierozkładalnych prinjektywnych KI-modułów X.*

Dowód. Pierwszy część lematu ma charakter ogólny i nie będziemy jej tutaj dowodzić. Dla dowodu drugiej części zauważmy, że jeśli moduł X jest projektywny, to teza jest oczywista. Załóżmy zatem, że moduł X nie jest projektywny. Wiadomo, że $\Delta(X) = \widetilde{\tau(X)}$ oraz, że $[N, \tau(X)] - [X, N] = [M, \tau(X)] - [X, M]$. Stąd

$$\begin{aligned}
[N, \Delta(X)] - [X, N] &= [N, \widetilde{\tau(X)}] - [X, N] = [N, \tau(X)] + c_X - [X, N] \\
&= [M, \tau(X)] + c_X - [X, M] = [M, \widetilde{\tau(X)}] - [X, M] \\
&= [M, \Delta(X)] - [X, M],
\end{aligned}$$

gdzie c_X jest taką liczbą całkowitą, że $[L, \tilde{X}] = [L, X] + c_X$ dla dowolnego KI-modułu prinjektywnego L. □

Lemat. *Niech M i N będą dwoma prinjektywnymi KI-modułami takimi, że* $\mathbf{dim}\, M = \mathbf{dim}\, N$. *Wtedy $[X, M] \leq [X, N]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów X wtedy i tylko wtedy, gdy $[M, X] \leq [N, X]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów X.*

Dowód. Załóżmy, że $[X, M] \leq [X, N]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów X. Niech X będzie nierozkładalnym KI-modułem prinjektywnym.

Jeśli moduł X jest injektywny, to $[M,X]=[N,X]$. Załóżmy zatem, że moduł X nie jest injektywny. Wtedy $X=\Delta(Y)$ dla pewnego prinjektywnego KI-modułu Y. Stąd

$$\begin{aligned}[M,X]=[M,\Delta(Y)]&=[N,\Delta(Y)]-[Y,N]+[Y,M]\\ &\leq [N,\Delta(Y)]-[Y,N]+[Y,N]=[N,\Delta(Y)]=[N,X],\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Niech M i N będą dwoma KI-modułami (prinjektywnymi KI-modułami) takimi, że $\mathbf{dim}\, M=\mathbf{dim}\, N$. Wtedy $M\leq_{\text{hom}} N$ ($M\leq^P_{\text{hom}} N$) wtedy i tylko wtedy $[X,M]\leq[X,N]$ dla każdego KI-modułu X (prinjektywnego KI-modułu X).

Lemat. *Niech M i N będą dwoma prinjektywnymi KI-modułami takimi, że $\mathbf{dim}\, M=\mathbf{dim}\, N$. Wtedy $M\leq_{\text{hom}} N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M\leq^P_{\text{hom}} N$*

Dowód. Jedna implikacja jest oczywista. Załóżmy zatem, że $M\leq^P_{\text{hom}} N$ oraz niech X będzie dowolnym KI-modułem. Wtedy $[M,X]=[M,\tilde{X}]-c_X\leq [N,\tilde{X}]-c_X=[N,X]$. □

Zauważmy jeszcze, że jeśli $X\leq_{\text{hom}} N$ oraz moduł N jest prinjektywny, to moduł X jest prinjektywny.

Wniosek. *Niech M i N będą dwoma prinjektywnymi KI-modułami. Jeżeli $[M,U]=[N,U]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów U, to $M\simeq N$. Podobnie, jeżeli $[U,M]=[U,N]$ dla wszystkich prinjektywnych KI-modułów U, to $M\simeq N$.*

Dowód. Jest to konsekwencja wyniku Auslandera dla kategorii modułów. □

Przypomnijmy, że w kategorii $\operatorname{mod} KI$ mamy zdefiniowany porządek $\leq_{\text{ext}}$. Możemy mówić też o porządku $\leq^P_{\text{ext}}$ w kategorii $\operatorname{prin} KI$.

Lemat. *Niech M i N będą dwoma modułami prinjektywnymi. Wtedy $M\leq_{\text{ext}} N$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M\leq^P_{\text{ext}} N$. Ponadto, jeżeli $X\leq_{\text{ext}} N$, to moduł X jest prinjektywny.*

Dowód. Jest to konsekwencja faktu, że kategoria modułów prinjektywnych jest zamknięta na rozszerzenia i składniki proste. □

Ustalmy wektor wymiaru $\mathbf{d}$. Możemy mówić o rozmaitości $\operatorname{mod}_{KI}(\mathbf{d})$ wraz z działaniem grupy $\operatorname{GL}(\mathbf{d})$. W rozmaitości $\operatorname{mod}_{KI}(\mathbf{d})$ mamy $\operatorname{GL}(\mathbf{d})$-niezmienniczy podzbiór $\operatorname{prin}_{KI}(\mathbf{d})$. Jest on podzbiorem otwartym, gdyż jest to przeciwobraz podzbioru modułów projektywnych w $\operatorname{mod}_{KI^-}(\mathbf{d}|_{KI^-})$ przy naturalnym rzutowaniu $\operatorname{mod}_{KI}(\mathbf{d}) \to \operatorname{mod}_{KI^-}(\mathbf{d}|_{KI^-})$. Możemy rozważać też rozmaitość $\operatorname{prin}^\circ_{KI}(\mathbf{d})$, zdefiniowaną jako przeciwobraz ustalonego KI^--modułu projektywnego P o wektorze wymiaru $\mathbf{d}|_{KI^-}$. Na $\operatorname{prin}^\circ_{KI}(\mathbf{d})$ dział grupa $\mathrm{GL}^\circ(\mathbf{d})$ zdefiniowana jako zbiór tych $g \in \mathrm{GL}(\mathbf{d})$ dla których $gM|_{KI^-} = P$ dla wszystkich $M \in \operatorname{prin}^\circ_{KI}(\mathbf{d})$. Problem badania rozmaitości $\operatorname{prin}^\circ_{KI}$ wraz z działaniem grupy $\mathrm{GL}^\circ(\mathbf{d})$ jest być równoważny badaniu geometrii odpowiedniego problemu macierzowego.

Domknięcie orbity modułu M w rozmaitości $\operatorname{prin}_{KI}(\mathbf{d})$ oznaczać będziemy przez $\overline{\mathscr{O}}^p_M$. Oczywiście $\overline{\mathscr{O}}^P_M = \overline{\mathscr{O}}_M \cap \operatorname{prin}_{KI}(\mathbf{d})$. Można też pokazać, że domknięcie orbity modułu M w rozmaitości $\operatorname{prin}^\circ_{KI}(\mathbf{d})$ jest równe $\overline{\mathscr{O}}_M \cap \operatorname{prin}^\circ_{KI}(\mathbf{d})$. Mamy zdefiniowane porządki $\leq_{\mathrm{deg}}$ oraz $\leq^P_{\mathrm{deg}}$, które pokrywają się. Ponadto, jeśli $X \leq_{\mathrm{deg}} N$ oraz moduł N jest prinjektywny, to moduł X też jest prinjektywny.

Twierdzenie (Bongartz)**.** *Niech U, M i N będą takimi A-modułami, że $M \leq_{\mathrm{deg}} N$, $[N,U] = [M,U]$ oraz istnieje epimorfizm $N \to U$. Wtedy istnieje epimorfizm $M \to U$ oraz domknięcie zbioru jąder wszystkich epimorfizmów $M \to U$ zawiera wszystkie jądra epimorfizmów $N \to U$. W szczególności każde jądro epimorfizmu $N \to U$ jest degeneracją generycznego jądra epimorfizmu $M \to U$, o ile takie istnieje.*

Ponieważ jądra epimorfizmów $M \to U$ tworzą zbiór nieprzywiedlny, więc jeśli z dokładnością do izomorfizmu mamy tylko skończenie wiele jąder epimorfizmów $M \to U$, to istnieje jądro generyczne.

Twierdzenie. *Niech I będzie posetem oraz niech M i N będą dwoma prinjektywnymi KI-modułami. Jeśli moduł N jest preprojektywny w* $\operatorname{prin} KI$*, to:*

(a) $M \leq_{\mathrm{ext}} N$;

(b) $M \leq_{\mathrm{deg}} N$;

(c) $M \leq_{\mathrm{hom}} N$.

Dowód. Implikacje (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) są znane. Pokażemy najpierw, że (c) $\Rightarrow$ (b). Ponieważ $M \leq_{\mathrm{hom}} N$, więc moduł M jest preprojektywny w $\operatorname{prin} KI$. Definiujemy $d(M,N) = \sum_U([U,N] - [U,M])$, gdzie U przebiega wszystkie klasy izomorfizmów nierozkładalnych KI-modułów prinjektywnych. Ta suma jest skończona, gdyż M i N są modułami preprojektywnymi w $\operatorname{prin} KI$. Jeśli $d(M,N) = 0$, to $M \simeq N$, więc możemy założyć, że $d(M,N) > 0$. Ustalmy prinjektywny KI-moduł U taki, że $[U,N] > [U,M]$ oraz dla wszystkich właściwych następników V modułu U w kołczanie Auslandera–Reiten kategorii prin KI mamy $[V,N]=[V,M]$. Moduł U nie może być projektywny, istnieje zatem ciąg Auslandera–Reiten w prin(KI)

$$0 \to \Delta(U) \to L \to U \to 0.$$

Z definicji ciągu Auslandera–Reiten wynika, że

$$[W,L]-[W,U\oplus\Delta(U)] = -\delta_{[W],[U]},$$

dla dowolnego nierozkładalnego prinjektywnego KI-modułu W. Stąd

$$[W,N\oplus L]-[W,M\oplus U\oplus\Delta(U)] = [W,N]-[W,M]-\delta_{[W],[U]}.$$

Stąd można wywnioskować, że $M\oplus U\oplus\Delta(U)\leq_{\text{hom}} N\oplus L$ oraz $d(M\oplus U\oplus \Delta(U), N\oplus L) < d(M,N)$. Z założenia indukcyjnego mamy zatem, że $M\oplus U\oplus \Delta(U)\leq_{\text{deg}} N\oplus L$. Ponieważ $L\leq_{\text{deg}} U\oplus\Delta(U)$, skąd $M\oplus L\leq_{\text{deg}} M\oplus U\oplus\Delta(U)$, więc $M\oplus L\leq_{\text{deg}} N\oplus L$. Z wyboru U wiemy, że $[N,L]=[M,L]$. Istotnie, jeśli moduł L jest injektywny w prin KI, to teza jest oczywista, w przeciwnym wypadku mamy, że $[N,L]=[M,L]+[\Delta^-(L),M]-[\Delta^-(L),N]=[M,L]$, gdyż $[\Delta^-(L),M]=[\Delta^-(L),N]$. Można więc skorzystać z twierdzenia o skracaniu, zatem $M\leq_{\text{deg}} N$.

Dla dowodu implikacji (b) $\Rightarrow$ (a) załóżmy, że $M<_{\text{deg}} N$. Ponieważ wiemy już, że porządki $\leq_{\text{deg}}$ i $\leq_{\text{hom}}$ pokrywają się dla modułów prinjektywnych, więc możemy założyć, że moduły M i N nie mają wspólnych składników prostych. Załóżmy dodatkowo, że relacja $M<_{\text{deg}} N$ jest minimalna. Ustalmy nierozkładalny składnik prosty U modułu N taki, że żaden inny nierozkładalny składnik prosty modułu N nie jest właściwym następnikiem modułu U w kołczanie $\Gamma(\text{prin}\, KI)$. Niech $N=U\oplus L$. Mamy $[N,U]-[M,U] = [\Delta^-(U),N]-[\Delta^-(U),M]=0$. Istnieje zatem taki epimorfizm $\varphi: M\to U$, że $\operatorname{Ker}\varphi\leq_{\text{deg}} L$ (zauważmy, że moduł $\operatorname{Ker}\varphi$ jest prinjektywny jako jądro epimorfizmu modułów prinjektywnych). Ponieważ U nie jest składnikiem prostym modułu M, więc ciąg dokładny $0\to\operatorname{Ker}\varphi\to M\to U\to 0$ nie jest rozszczepialny. Stąd $M<_{\text{deg}}\operatorname{Ker}\varphi\oplus U$. Ponadto $\operatorname{Ker}\varphi\oplus U\leq_{\text{deg}} L\oplus U = N$, a więc $\operatorname{Ker}\varphi\oplus U\simeq N$, co kończy dowód. □

Natychmiastową konsekwencją powyższego twierdzenia jest twierdzenia zapowiedziane na początku referatu, gdyż dla posetów skończonego typu prinjektywnego kołczan $\Gamma(\text{prin}\, KI)$ jest preprojektywny.

Warto przytoczyć też następujący fakt.

Twierdzenie. *Dla posetów minimalnego nieskończonego typu prinjektywnego porządki $\leq_{\text{ext}}$, $\leq_{\text{deg}}$ i $\leq_{\text{hom}}$ pokrywają się.*

Dowód. W tej sytuacji algebra incydencyjna jest oswojoną algebrą utajoną. □